

01;07

Двумерная лауэ-фокусировка рентгеновского излучения двухкристальной системой

© Т. Чен

Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова, 117571 Москва, Россия
e-mail: docent65@mtu-net.ru, ttchen@e-mail.ru

(Поступило в Редакцию 1 октября 2001 г.)

Дано теоретическое описание динамической двумерной фокусировки рентгеновской волны при ее лауэ-дифракции на двухкристальной системе изогнутых кристаллов, отражающие плоскости которых перпендикулярны к поверхности кристаллов. Показано, что двумерная фокусировка обладает высокой чувствительностью к радиусу изгиба кристаллов и к разнотолщинности кристаллов. Проанализировано влияние астигматизма на двумерную лауэ-фокусировку. Получено условие стигматической фокусировки. Обсуждены особенности одномерной фокусировки внутри кристаллов. Рассмотрены спектральные характеристики двухкристального двумерно фокусирующего спектрометра.

Введение

Динамическая лауэ-фокусировка рентгеновского излучения исследовалась теоретически и экспериментально при дифракции узкого пучка на совершенных (плоских) кристаллах [1–4], сферической волны на совершенных кристаллах [5–12] и упругоизогнутых кристаллах [13–20]. Причем было показано, что фокусировка сферической волны возможна как внутри кристаллов, так и вне их. Уже в самых первых работах, посвященных фокусировке, была продемонстрирована возможность использования эффекта фокусировки для спектрального разложения рентгеновского излучения [1,3,4]. Теория лауэ-спектрометра на изогнутом кристалле была развита в [19]. Передача рентгеновского изображения с помощью увеличивающих и уменьшающих лауэ-линз на изогнутых кристаллах рассматривалась в [21–24]. Фокусировка рентгеновской волны на двух изогнутых кристаллах исследовалась теоретически в [25].

Однако во всех перечисленных выше работах речь шла об одномерной фокусировке. В настоящей работе предложена теория динамической фокусировки сферической рентгеновской волны при ее лауэ-дифракции на двух изогнутых кристаллах. При определенной взаимной ориентации кристаллов происходит двумерная фокусировка рентгеновского излучения с образованием точечного фокуса.

Двумерная фокусировка сферической волны в вакууме при лауэ-дифракции на двух изогнутых кристаллах

Пусть сферическая рентгеновская волна падает на систему двух упруго изогнутых кристаллов (рис. 1). Будем использовать параболическое разложение для сферической волны. Рассмотрим случай особого изгиба кри-

сталлов, когда отражающие плоскости обоих кристаллов совпадают с нормальными поперечными сечениями, не искривляющимися при изгибе. Тогда каждая плосковолновая гармоника сферической волны „видит“ кристалл неизогнутым в точке своего падения на кристалл. Поэтому амплитудный плосковолновой коэффициент отражения (АПКО) определяется выражением для неизогнутого идеального кристалла. Плоскость дифракционного рассеяния первым кристаллом назовем меридиональной плоскостью. Тогда плоскость дифракции для второго кристалла образует угол $\approx \Theta_B^{(1)}$ с сагиттальной плоскостью первого кристалла, а сагиттальная плоскость второго кристалла образует угол $\approx \Theta_B^{(2)}$ с меридиональной плоскостью первого кристалла. Здесь $\Theta_B^{(1,2)}$ — брэгговские углы для первого и второго кристаллов соответственно. В сагиттальной плоскости фурье-трансформанта $R(k_y, t)$ функции Грина $G_h^{(y)}(y_T - y, t)$ равна

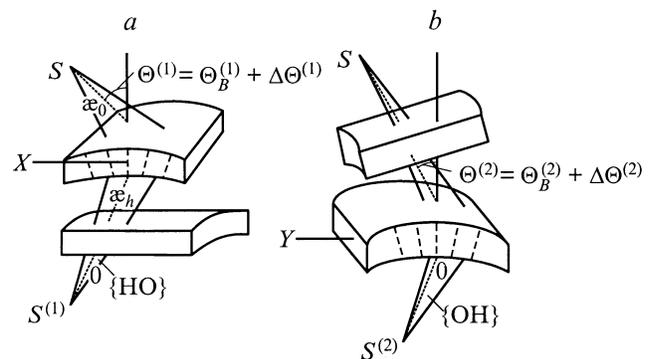


Рис. 1. Принципиальная схема двумерной фокусировки сферической рентгеновской волны при лауэ-дифракции на двухкристальной системе изогнутых кристаллов. *a* — фокусировка в плоскости {HO}, $|\text{OS}^{(1)}| = L_{hh}^{(1)}$, *b* — фокусировка в плоскости {OH}, $|\text{OS}^{(2)}| = L_{hh}^{(2)}$. $S^{(1),(2)}$ — изображения источника *S*.

приблизительно единице. Тогда функция Грина

$$G_h^{(y)}(y_T - y, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \exp[-ik_y(y_T - y)] R(k_y, t)$$

приобретает δ -образный характер. Учитывая это, а также используя рентгенодифракционный и рентгенооптический принципы Гюйгенса–Френеля, находим интенсивность двукратно дифрагировавшей сферической волны на расстоянии L_{hh} в вакууме от второго кристалла

$$I_{hh}(x, y) = I_h^{(1)}(x) I_h^{(2)}(y), \quad (1)$$

где $J_h^{(1)}(x)$ и $I_h^{(2)}(y)$ — распределения интенсивности в плоскостях {НО} и {ОН} соответственно (рис. 1); (x, y) — координаты точки наблюдения;

$$I_h^{(1,2)} = (\gamma_{h(1,2)}^2 / 2\pi\chi(L_0^{(1,2)} + L_h^{(1,2)}) L_0^{(1,2)} L_h^{(1,2)} \alpha_0^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)}) \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\check{y}_{(1,2)} R(\check{y}_{(1,2)}, t_{(1,2)}) \exp\{i\varphi_{(1,2)}(\check{y}_{(1,2)}, t_{(1,2)})\}, \quad (2)$$

$$\varphi_{(1,2)}(\check{y}_{(1,2)}, t_{(1,2)}) = -\sigma_{h(1,2)}^2 \check{y}_{(1,2)}^2 (1/\alpha_0^{(1,2)} + 1/\alpha_h^{(1,2)}) / 2\chi + \sigma_{h(1,2)} \check{y}_{(1,2)} \gamma_{(1,2)} (\Delta\Theta^{(1,2)} / \alpha_0^{(1,2)} - \gamma_{h(1,2)}) \times \{\psi - \psi_0\} / L_h^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{h(1,2)} = \chi\chi_{h(1,2)} / 2 \sin \Theta_B^{(1,2)}, \quad \psi - \psi_0 = x - x_0 \text{ для } \varphi_{(1)} \\ \text{и } \psi - \psi_0 = y - y_0 \text{ для } \varphi_{(2)}. \quad (4)$$

В интеграле (2) использованы следующие обозначения:

$$R(\check{y}_{(1,2)}, t_{(1,2)}) = (\chi_h / \chi_{\bar{h}})^{1/2} \times \exp\{i\varepsilon_{(1,2)} t_{(1,2)} / 2\} / 2(\check{y}_{(1,2)}^2 + 1)^{1/2} \quad (5)$$

— АПКО плоскими совершенными кристаллами [26],

$$\varepsilon_{(1,2)} = \chi\chi_{0(1,2)} / \gamma_{0(1,2)} - C\chi(\chi_{h(1,2)} \chi_{\bar{h}(1,2)})^{1/2} \times (\check{y}_{(1,2)} \pm (\check{y}_{(1,2)}^2 + 1)^{1/2}) / \gamma_{h(1,2)}, \quad (6)$$

$\check{y}_{(1,2)} = \Delta\Theta^{(1,2)} \sin 2\Theta_B^{(1,2)} / (\chi_h \chi_{\bar{h}})^{1/2}$ — нормированная угловая переменная (без учета преломления), $\Delta\Theta^{(1,2)}$ — отклонение от точного брэгговского угла для первого и второго кристаллов,

$$\psi_{0(1,2)} = L_h^{(1,2)} (1 - \gamma_{h(1,2)}^2)^{1/2} + (1/\gamma_{h(1,2)}^2 - 1)^{1/2} t_{(1,2)}, \quad (7)$$

$$\alpha_0^{(1,2)} = \gamma_{0(1,2)}^2 / L_0^{(1,2)} - \gamma_{0(1,2)} / R_{(1,2)}, \\ \alpha_h^{(1,2)} = \gamma_{h(1,2)}^2 / L_h^{(1,2)} + \gamma_{h(1,2)} / R_{(1,2)}, \quad (8)$$

γ_0 и γ_h — направляющие косинусы для падающих и дифрагированных волн, $R_{(1,2)}$ — радиусы изгиба кристаллов в плоскостях дифракционного рассеяния;

$$L_h^{(1)} = L_{hh}^{(1)} + L_{12} / \gamma_{h(1)} + t_2 / \gamma_{h(2)},$$

$$L_0^{(2)} = L_0^{(1)} + (t_1 + L_{12}) / \gamma_{h(1)}, \quad (9)$$

$L_h^{(2)} = L_{hh}^{(2)}$ — расстояние от второго кристалла до изображения источника в плоскости {ОН}; $L_{hh}^{(1)}$ — расстояние от второго кристалла до изображения в плоскости {НО}; L_{12} — расстояние между кристаллами; $\chi = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны падающего излучения; $t_{(1,2)}$ — толщины кристаллов; $\chi_{h,\bar{h}}$ и χ_0 — фурье-компоненты рентгеновской поляризуемости; C — поляризационный фактор; знаки \pm в (6) соответствуют двум модам (α и β) волнового поля в кристаллах, причем „минус“ относится к слабопоглощающейся моде; индексы (1) и (2) соответствуют во всех обозначениях первому и второму кристаллам.

Вычисление интенсивности (2) дифрагированного излучения проведем с помощью метода стационарной фазы, учитывая, что функция $(\check{y}^2 + 1)^{-1/2}$ меняется гораздо медленнее, чем экспоненциальная функция. С учетом фазы АПКО найдем производные эйкональной функции первых четырех порядков

$$\partial\Phi_{(1,2)} / \partial\check{y}_{(1,2)} = -\sigma_{h(1,2)}^2 \check{y}_{(1,2)} (1 - \alpha_0^{(1,2)} + 1/\alpha_h^{(1,2)}) / \chi + \sigma_{h(1,2)} \gamma_{h(1,2)} (\Delta\Theta^{(1,2)} / \alpha_0^{(1,2)} - \gamma_{h(1,2)} (\Psi - \Psi_0) / L_h^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)}) - t_{(1,2)} \text{tg} \Theta_B^{(1,2)} \sigma_{h(1,2)} \{1 \pm \check{y}_{(1,2)} / (\check{y}_{(1,2)}^2 + 1)^{1/2}\},$$

$$\partial^2\Phi_{(1,2)} / \partial\check{y}_{(1,2)}^2 = -\sigma_{h(1,2)}^2 (1/\alpha_0^{(1,2)} + 1/\alpha_h^{(1,2)}) / \chi \pm \text{tg} \Theta_B^{(1,2)} t_{(1,2)} \sigma_{h(1,2)} / (\check{y}_{(1,2)}^2 + 1)^{3/2},$$

$$\partial^3\Phi_{(1,2)} / \partial\check{y}_{(1,2)}^3 = (\pm 3 \text{tg} \Theta_B^{(1,2)} t_{(1,2)} \sigma_{h(1,2)} \times \check{y}_{(1,2)}) / (\check{y}_{(1,2)}^2 + 1)^{5/2},$$

$$\partial^4\Phi_{(1,2)} / \partial\check{y}_{(1,2)}^4 = \{\pm 3 \text{tg} \Theta_B^{(1,2)} t_{(1,2)} \sigma_{h(1,2)} \times (1 - 4\check{y}_{(1,2)}^2)\} / (\check{y}_{(1,2)}^2 + 1)^{7/2}.$$

$$\Phi_{(1,2)} = \varphi_{(1,2)} + \varepsilon_{\check{y}(1,2)} t_{(1,2)} / 2, \quad (10)$$

где $\varepsilon_{\check{y}(1,2)}$ — зависящая от $\check{y}_{(1,2)}$ часть $\varepsilon_{(1,2)}$ (см. (6)).

Стационарные точки \check{y}_{st} определяются из условия $\partial\Phi_{(1,2)} / \partial\check{y}_{(1,2)} = 0$. Для пересечения траекторий лучей, т.е. для фокусировки в плоскостях {НО} и {ОН}, необходимо к тому же обращение в нуль второй производной $\partial^2\Phi_{(1,2)} / \partial\check{y}_{(1,2)}^2 = 0$. Для обеих плоскостей стационарная точка $\check{y}_{st(1,2)} = 0$ и фокусировка волны

происходит в точке геометрического фокуса с координатами, определяемыми из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} 1/\alpha_0^{(1,2)} + 1/\alpha_h^{(1,2)} &= \pm \chi \operatorname{tg} \Theta_B^{(1,2)} t_{(1,2)} / \sigma_{h(1,2)}, \\ \Psi - \Psi_0 &= L_h^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)} (\Delta\Theta^{(1,2)} / \alpha_0^{(1,2)} - \\ &\quad - t_{(1,2)} \operatorname{tg} \Theta_B^{(1,2)} / \gamma_{h(1,2)}) / \gamma_{h(1,2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Двумерный (точечный) фокус образуется при пересечении двух фокальных линий, проходящих через точки $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$. Фокальная линия, проходящая через точку $S^{(1)}$, ориентирована под углом $\Theta^{(2)}$ относительно оси Y .

При повороте второго кристалла относительно нормали к поверхности кристалла на угол φ вторая фокальная линия, проходящая через точку $S^{(2)}$, также поворачивается на тот же угол. При стремлении $\varphi \rightarrow 90^\circ$ вторая фокальная линия трансформируется в новую фокальную линию, возникающую из-за фокусировки сходящегося пучка вторым кристаллом. Первая фокальная линия при $\varphi = 90^\circ$ пропадает. Двумерная фокусировка исчезает и происходит одномерная фокусировка в линию, находящуюся на расстоянии $L_h^{(2)}$ от второго кристалла. Геометрические условия фокусировки имеют при этом вид

$$1/\alpha_0 + 1/\alpha_h = \pm \chi [\operatorname{tg} \Theta_B^{(1)} t_1 / \sigma_{h(1)} + \operatorname{tg} \Theta_B^{(2)} t_2 / \sigma_{h(2)}], \quad (12)$$

где $\alpha_h = \gamma_{h(1)}^2 / L_h^{(2)} + \gamma_{h(1)} / R_1 + \gamma_{h(2)} / R_2$.

Для фокусировки сходящегося пучка вторым кристаллом необходимо, чтобы $\xi \sim x_{(2)} / R_2 > \phi \sim x_{(2)} / L_h^{(2)}$, где ξ — угол между нормальными поперечными сечениями к поверхности кристалла, ϕ — угол сходимости пучка.

При повороте второго кристалла на угол $\approx 2\Theta_B^{(2)}$ против часовой стрелки вокруг оси X фокус переместится по дуге окружности радиуса $\approx L_{hh}^{(2)}$ в другую точку. Угол между направлениями на первоначальное и перемещенное положения фокуса равен $4\Theta_B^{(2)}$.

Из выражений (11) и (12) видно, что если кристаллы не очень толстые, то за вторым кристаллом могут образоваться два фокуса, соответствующие α и β — модам волнового поля.

Интересной является также возможность двумерной лауэ-фокусировки, когда одна фокальная линия является результатом фокусировки α -моды, а другая возникает благодаря β -моду. Условия α - β -фокусировки имеют вид

$$\begin{aligned} 1/\alpha_{0,(+)}^{(1)} + 1/\alpha_{h,(+)}^{(1)} &= \chi \operatorname{tg} \Theta_B^{(1)} t_1 / \sigma_{h(1)}, \\ 1/\alpha_{0,(-)}^{(2)} + 1/\alpha_{h,(-)}^{(2)} &= -\chi \operatorname{tg} \Theta_B^{(2)} t_2 / \sigma_{h(2)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где знаки \pm соответствуют разным модам.

Отметим, что на второй кристалл падает волна с расходимостью $\sim |\chi_{hr}|^{1/2}$ (в плоскости дифракционного рассеяния этого кристалла). Дифрагирует на втором кристалле лишь небольшая часть пучка с углом расходимости $\sim |\chi_{hr}|$. Однако эффект фокусировки компенсирует с

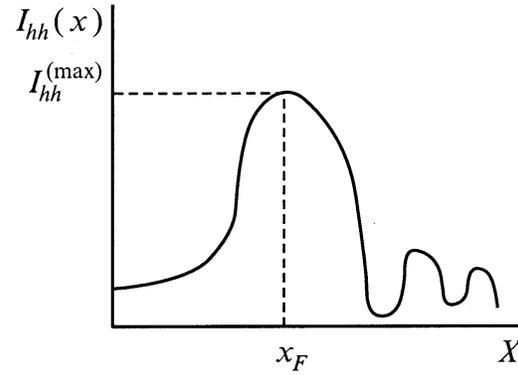


Рис. 2. Распределение интенсивности дважды дифрагированной волны в плоскости {HO}.

$$I_{hh}^{(\max)} \cong 0.675 \times \gamma_{(1)}^2 / \{2\pi\chi(L_0^{(1)} L_h^{(1)}) L_0^{(1)} L_h^{(1)} \times \alpha_0^{(1)} \alpha_h^{(1)}\}.$$

избытком потерю светосилы. При $L_0 \sim 1$ м, $L_h \leq 1$ м, $\chi_{hr} \sim 10^{-5}$ и ширине фокуса $\Delta\Psi \sim 10 \mu\text{м}$ двумерная фокусировка дает выигрыш в светосиле примерно в 800 раз по сравнению со случаем одномерной фокусировки.

Найдем теперь распределение интенсивности в непосредственной близости от фокуса. Для определенности рассмотрим фокусировку слабопоглощающейся моды. Вычисление интенсивности (1) с учетом (2) и (10) дает

$$\begin{aligned} I_{hh}(x, y) &= (16)^{-1} \gamma_{h(1)}^2 \gamma_{h(2)}^2 [4\pi^2 \chi^2 (L_0^{(1)} + L_h^{(1)}) (L_0^{(2)} + L_h^{(2)}) \\ &\quad \times L_0^{(1)} L_0^{(2)} L_h^{(1)} L_h^{(2)} \alpha_0^{(1)} \alpha_0^{(2)} \alpha_h^{(1)} \alpha_h^{(2)}]^{-1} \\ &\quad \times I_p^{(1)}(A_1^{(1)}, A_2^{(1)}) I_p^{(2)}(A_1^{(2)}, A_2^{(2)}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $I_p(A_1, A_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i[A_2\tau + A_1\tau^2 + \tau^4]\} d\tau$ — интеграл Пирси [27];

$$\tau = \check{y}_{(1,2)} C_{(1,2)} / (4!)^{1/4},$$

$$C_{(1,2)} = (3 \operatorname{tg} \Theta_B^{(1,2)} t_{(1,2)} \sigma_{h(1,2)})^{1/4},$$

$$A_1^{(1,2)} = (6)^{1/2} (\partial^2 \Phi_{(1,2)} / \partial \check{y}_{(1,2)}^2) |_{\check{y}=0} / C_{(1,2)}^2,$$

$$\begin{aligned} A_2^{(1,2)} &= C_{(1,2)}^{-1} \delta(\partial \Phi_{(1,2)} / \partial \check{y}_{(1,2)}) |_{\check{y}=0} \\ &= -\sigma_{h(1,2)} \gamma_{h(1,2)}^2 C_{(1,2)}^{-1} \delta\psi / L_h^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)}, \end{aligned}$$

$$\delta\Psi = \Psi - \Psi_F, \quad (15)$$

Ψ_F — положение геометрического фокуса.

Распределение интенсивности имеет максимум с небольшими осцилляциями справа от него (рис. 2).

Определим дифракционную ширину фокуса как расстояние, на котором интенсивность падает вдвое. Тогда, учитывая свойства интеграла Пирси [27] и положив

$A_1 = 0$, получим для дифракционных размеров фокуса в плоскостях {НО} и {ОН} следующие оценки:

$$A_2 \approx 1.8,$$

$$\Delta\Psi^{(1,2)} \cong 1.8 L_h^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)} C_{(1,2)} / \sigma_{h(1,2)} \gamma_{h(1,2)}^2. \quad (16)$$

Видно, что размеры фокуса $\Delta\Psi \sim t_{(1,2)}^{1/4}$. Получим оценку дифракционного размера фокуса для отражения (220) излучения $\text{Cu} K_\alpha$ от кристалла кремния толщиной $t \cong 600 \mu\text{m}$, изогнутых с радиусом изгиба $R = -2\text{m}$ при $\sin \Theta_B \cong 0.4$ и $L_h \cong 0.65\text{m}$. Расчет по формуле (16) дает оценку $\Delta\Psi \approx 11 \mu\text{m}$. Из (16) следует интересный результат, а именно: дифракционное уширение фокуса будет несколько меньше для системы плоских кристаллов. Однако отмеченное преимущество схемы на плоских кристаллах становится заметным лишь при $L_h \geq R\gamma_h$.

Точно в геометрическом фокусе ($A_1 = A_2 = 0$) модуль интеграла Пирси равен 1.813. Отметим, что максимум модуля интеграла Пирси, равный приблизительно 2.7, расположен не в геометрическом фокусе, а при $A_1 \cong -2$ и $A_2 = 0$. Максимальная интенсивность дважды дифрагированной волны достигается при выполнении условия

$$1/\alpha_0 + 1/\alpha_h = x \text{tg} \Theta_B t / \sigma_h + x(2 \text{tg} \Theta_B t)^{1/2} / \sigma_h^{3/2}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что вклад второго слагаемого в правой части существен лишь при $t \leq 2\Lambda/\pi < \Lambda$. Здесь $\Lambda = \lambda \cos \Theta_B / |\chi_{hr}|$ — экстинкционная длина. Для динамической лауэ-фокусировки смещением положения максимума интенсивности относительно геометрического фокуса можно пренебречь.

Фокусировка сферической волны внутри кристаллов

Рассмотрим случай $L_0^{(1)} \neq R_1 \gamma_{0(1)}$. Эйкональная функция Φ в первом кристалле для слабопоглощающейся моды

$$\begin{aligned} \Phi = & -\sigma_{h(1)}^2 \check{y}_{(1)}^2 / 2\chi\alpha_0^{(1)} - \sigma_{h(1)} \check{y}_{(1)} x \\ & + \sigma_{h(1)} z (\check{y}_{(1)}^2 + 1)^{1/2} / \gamma_{h(1)} + \sigma_{h(1)} \gamma_{h(1)} \Delta\Theta^{(1)} \check{y}_{(1)} / \alpha_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть $\gamma_0 = \gamma_h$. Тогда анализ (18) дает, что внутри первого кристалла происходит фокусировка слабопоглощающейся волны на глубине

$$Z_F^{(1)} = \sigma_{h(1)} \text{ctg} \Theta_B^{(1)} / \chi\alpha_0^{(1)}. \quad (19)$$

Толщина первого кристалла должна быть больше $Z_F^{(1)}$. Варьируя расстояние $L_0^{(1)}$, можно перемещать фокус внутри кристалла. Данное обстоятельство может найти практическое применение для исследования дефектной структуры изогнутых кристаллов.

Положив в (19) $Z_F^{(1)} = t_1$, получим как частный случай уравнение цилиндрической лауэ-линзы [22]

$$\cos \Theta_B / L_0 - 1/R_1 = \chi_h / 2t_1 \sin^2 \Theta_B.$$

Условие кинематической фокусировки на выходной поверхности первого кристалла, вытекающее из уравнения линзы, имеет вид $L_0 = R_1 \cos \Theta_B$. Волна слабопоглощающаяся в обоих кристаллах, фокусируется внутри второго кристалла на глубине $Z_F^{(2)} < t_2$

$$Z_F^{(2)} = \sigma_{h(2)} \text{ctg} \Theta_B^{(2)} / \chi\alpha_0^{(2)}.$$

Интересно, что каждый из кристаллов по отдельности, а также вся двухкристалльная система могут выступать в качестве уменьшающей (в продольном направлении) рентгеновской дифракционной линзы. Действительно, небольшое смещение источника на расстояние ΔL_0 вдоль направления падающего пучка вызывает смещение положения фокуса внутри кристалла на величину

$$\Delta Z_F = |\chi_{hr}| \cos \Theta_B / 2 \sin^2 \Theta_B (\cos \Theta_B - L_0/R)^2 \Delta L_0. \quad (20)$$

Здесь рассмотрена симметричная геометрия дифракции. Из (20) следует, что коэффициент продольной передачи изображения может быть очень мал по величине ($\sim 10^{-4} - 10^{-5}$). Например, для источников, расположенных очень близко к поверхности кристалла, или в случае плоского кристалла продольная передача изображения источника происходит с коэффициентом передачи $\sim |\chi_{hr}|$. Заметим, что слабопоглощающаяся блоховская волна, сфокусированная в первом кристалле, еще раз сжимается уже за первым кристаллом на расстоянии $L_h^{(1)} = 2 \sin^2 \Theta_B^{(1)} \cos \Theta_B^{(1)} t_1 / |\chi_{hr(1)}| - \cos^2 \Theta_B^{(1)} / \alpha_0^{(1)}$.

Пусть плоскости дифракционного рассеяния обоих кристаллов совпадают. Тогда, во втором кристалле произойдет фокусировка слабопоглощающейся в обоих кристаллах моды на глубине

$$\begin{aligned} Z_F^{(2)} = & \pm |\chi_{hr(1,2)}| (L_{12} - L_h^{(1)}) / (\sin \Theta_B^{(2)} \sin 2\Theta_B^{(2)}) \\ = & \pm |\chi_{hr(2)}| L_{12} / (\sin \Theta_B^{(2)} \sin 2\Theta_B^{(2)}) \\ & + |\chi_{hr(2)}| \sin \Theta_B^{(1)} \sin 2\Theta_B^{(1)} t_1 / (\sin \Theta_B^{(2)} \sin 2\Theta_B^{(2)} |\chi_{hr(1)}|) \\ & \pm |\chi_{hr(2)}| \cos^2 \Theta_B^{(1)} / (\sin \Theta_B^{(2)} \sin 2\Theta_B^{(2)} \alpha_0^{(1)}). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь верхний знак относится к случаю $L_{12} > L_h^{(1)}$, а нижний — $L_{12} < L_h^{(1)}$. Из (21) видно, что в системе плоских кристаллов с $\Theta_B^{(1)} = \Theta_B^{(2)}$, $\chi_{hr(1)} = \chi_{hr(2)}$ фокусировка дважды дифрагировавшей волны происходит во втором кристалле на глубине

$$Z_F^{(2)} = \pm t_1 + |\chi_{hr}| (L_0 + L_{12}) / (\sin \Theta_B \sin 2\Theta_B). \quad (22)$$

При $(L_0 + L_{12}) \ll t_1 \sin \Theta_B \sin 2\Theta_B / |\chi_{hr}|$ и $L_{12} < L_h^{(1)}$ фокусировка во втором кристалле произойдет на глубине,

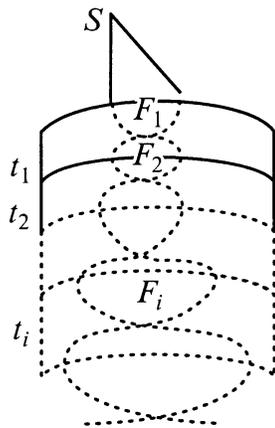


Рис. 3. Многократная фокусировка слабопоглощающейся моды сферической рентгеновской волны при лауэ-дифракции в кристаллах различного атомного состава. S — точечный источник. $F_{1,2,\dots,i}$ — фокусы.

равной толщине первого кристалла. Полученный результат находится в соответствии с результатом работ [1–4].

Упругоизогнутый кристалл, фокусируя внутри себя падающую на него сферическую волну, работает как рентгеновская дифракционная линза. Формула этой линзы может быть записана в виде:

$$1/L_0 + 1/Z_F = 1/F, \quad (23)$$

где „фокусное“ расстояние F равно

$$F = |\chi_{hr}|L_0R / \{ (|\chi_{hr}| + \sin \Theta_B \sin 2\Theta_B)R - 2 \sin^2 \Theta_B L_0 \} \\ \approx |\chi_{hr}| / \{ 2 \sin^2 \Theta_B | \cos \Theta_B / L_0 - 1/R | \}.$$

В случае плоской волны ($L_0 \gg R \cos \Theta$) получим отсюда $F \approx R|\chi_{hr}|/2 \sin^2 \Theta_B$. Видно, что расстояние $F \sim |\chi_{hr}|$ для слабоизогнутых кристаллов с $R \approx 1$ м. Для радиусов изгиба $R < \lambda \sin \Theta_B \sin 2\Theta_B / |\chi_{hr}|^2$ фокусировка происходит на глубине меньше экстинкционной длины. Очевидно, что, пропуская сферическую волну через стопку изогнутых кристаллов, ориентированных вблизи точного брэгговского условия и имеющих толщины $t_i \geq \Lambda_i$, мы получим в каждом кристалле дифракционный фокус (рис. 3). Для этого необходимо, чтобы слабопоглощающаяся в первом кристалле волна слабо поглощалась и во всех остальных кристаллах.

Влияние астигматизма на фокусировку сферической волны двухкристалльной системой

Анализ уравнений (11) показывает, что двумерно фокусирующийся пучок обладает астигматизмом. Рассмотрим симметричную дифракцию, когда $\gamma_0 = \gamma_h = \gamma$, кристаллы имеют одинаковую структуру ($\sigma_{h(1)} = \sigma_{h(2)}$)

и брэгговские углы совпадают. Расстояния $L_{hh}^{(1,2)}$ от второго кристалла до изображений $S^{(1,2)}$ источника

$$L_{hh}^{(1)} = L_h^{(1)} - (L_{12} + t_2)/\gamma, \quad L_{hh}^{(2)} = L_h^{(2)},$$

$$L_h^{(1,2)} = \gamma G_{(1,2)} R_{(1,2)} / (R_{(1,2)} - G_{(1,2)}),$$

$$G_{(1,2)} = \kappa \sin \Theta_B t_{(1,2)} / \sigma_h - (\gamma/L_0^{(1,2)} - 1/R_{(1,2)})^{-1}. \quad (24)$$

В общем случае произвольных величин $L_0^{(1)}, L_{12}, t_{(1,2)}, R_{(1,2)}$ двукратно дифрагировавший пучок сжимается не в точку, а в фокальное пятно, размеры которого зависят от величины астигматизма (см. таблицу). Предположим, что пучок „освещает“ всю поверхность второго кристалла, площадь которой $\approx L_x^{(2)}L_y^{(2)}$. Тогда размеры фокального пятна, расположенного посередине между фокальными линиями, равны $\approx (\Delta L_{hh}L_x^{(2)}/2L_{hh}^{(1)}) \times (\Delta L_{hh}L_y^{(2)}/2L_{hh}^{(1)})$. Здесь мы считаем, что $\Delta L_{hh} = L_{hh}^{(2)} - L_{hh}^{(1)} > 0$.

Дифракционные уширения фокуса в плоскостях {НО} и {ОН}, рассчитанные по формуле (16), равны $\Delta\Psi \approx 10 \mu\text{m}$. Астигматизм приводит к уменьшению светосилы в $N \approx \Delta L_x \Delta L_y / (\Delta\Psi)_{(1)} (\Delta\Psi)_{(2)}$ раз. Значения коэффициента N для различных R_2 приведены в таблице. Видно, что величина астигматизма, а следовательно и светосилы, чувствительна к радиусу изгиба R_2 . Например, изменение R_2 с -2.000 до -1.984 м вызывает увеличение светосилы на два порядка.

Влияние астигматизма на светосилу двумерно фокусирующегося пучка

R_2, m	$\Delta L_{hh}, \text{cm}$	$\Delta L, \mu\text{m}$	$10^{-4} N$	N
-2.100	8.099	1285	6.50	285
-2.050	4.676	742	2.17	35.5
-2.040	3.989	633	1.58	15.78
-2.030	3.300	523	1.08	3.2
-2.020	2.611	414	0.68	0.35
-2.010	2.317	367	0.53	6.68
-2.000	1.230	195	0.15	22.70
-1.990	0.538	85		
-1.985	0.192	30		
-1.984	0.123	20		
-1.983	0.054	9		
-1.982	-0.016	3		
-1.981	-0.085	13		
-1.980	-0.154	24		

Примечание. $t_1 = t_2 = 400 \mu\text{m}$, $L_0^{(1)} = 1$ м, $L_{12} = 1$ см, $R_1 = -2$ м. Отражение (220) излучения $\text{Cu } K_\alpha$ от кристаллов кремния, $\sigma_h = 4.5899 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$, $L_x^{(2)} = L_y^{(2)} = 2$ см, $L_{hh}^{(1)} = 63.05$ см, $L_h^{(1)} = 64.24$ см. $\Delta L_x = \Delta L_y = \Delta L$ — размеры абберационных пятен.

Покажем теперь, что величина астигматизма обладает высокой чувствительностью к разнотолщинности кристаллов. Пусть источник расположен вблизи поверхности первого кристалла ($L_0^{(1)} \rightarrow 0$), $R_{(1,2)} \rightarrow \infty$ (плоские кристаллы). Тогда для величины астигматизма из (24) получим

$$\Delta L_{hh} = (\chi \sin \Theta_B \gamma \Delta t / \sigma_h) + (L_{12} + t_2) / \gamma. \quad (25)$$

Видно, что ΔL_{hh} линейно зависит от разнотолщинности $\Delta t = t_2 - t_1$ кристаллов при $L_{12} = \text{const}$ и $t_2 = \text{const}$.

Для числовых значений $\Delta t \cong 1 \mu\text{m}$, $\sin \Theta_B \cong 0.4$, $\chi_h \sim 10^{-5}$ имеем из (25) $\Delta L_{hh} \approx 3 \text{ см}$. При этом световая сила падает на 3–4 порядка по сравнению с стигматическим случаем. Полученный результат имеет практическое значение, так как появляется возможность использовать рассматриваемый эффект фокусировки для контроля толщины кристаллов с микронной (и даже более высокой) точностью.

Двухкристальный фокусирующий лауэ-спектрометр

Обсудим теперь спектральные характеристики рассматриваемой двухкристаллической системы при ее использовании в качестве двухкристального лауэ-спектрометра с дифракционной фокусировкой. В случае, если присутствует астигматизм, мы имеем фактически два различных спектрометра с разной величиной спектрального разрешения. Пусть выполнено условие отсутствия астигматизма $\Delta L_{hh} = L_{hh}^{(2)} - L_{hh}^{(1)} = 0$. Учитывая, что, согласно уравнению Вульфа–Брэгга, $d\Theta = d\lambda \text{tg} \Theta_B / \lambda$, а линейная дисперсия равна

$$D_\Psi = \text{tg} \Theta_B (L_h^{(1,2)} - L_0^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)} / \alpha_0^{(1,2)}) / \lambda \gamma, \quad (26)$$

найдем для спектрального разрешения в плоскостях {НО} и {ОН}

$$(d\lambda/\lambda)_{(1,2)} \cong \text{ctg} \Theta_B \gamma \Delta \Psi^{(1,2)} \times |L_h^{(1,2)} - L_0^{(1,2)} \alpha_h^{(1,2)} / \alpha_0^{(1,2)}|^{-1}. \quad (27)$$

Для $\alpha_0 = \alpha_h$, $L_0 = 1 \text{ м}$, $\gamma = 0.91$, $R = -2 \text{ м}$, $L_h = 0.48 \text{ м}$, $\delta\Psi = 10 \mu\text{m}$ получим из (27) следующую оценку для спектрального разрешения: $d\lambda/\lambda \sim 4 \cdot 10^{-5}$. Спектральное разрешение (27) зависит от толщины кристалла $\sim t^{1/4}$ и нижний предел достигается при $t \sim \Lambda$. Из (27) следует, что при симметричной геометрии дифракции в случае $\alpha_0 = \alpha_h$ наилучшее разрешение достигается для плоского кристалла, когда $L_0 = L_h$.

При падении плоской волны ($L_0 \gg R\gamma$), если $\alpha_0 = \alpha_h$, спектральное разрешение может быть равно по порядку величины $\sim 10^{-6}$ ($L_0 \approx 10 \text{ м}$).

В случае, когда источник сферической волны расположен очень близко к поверхности первого кристалла ($L_0^{(1)} \rightarrow 0$), наилучшее разрешение достигается при

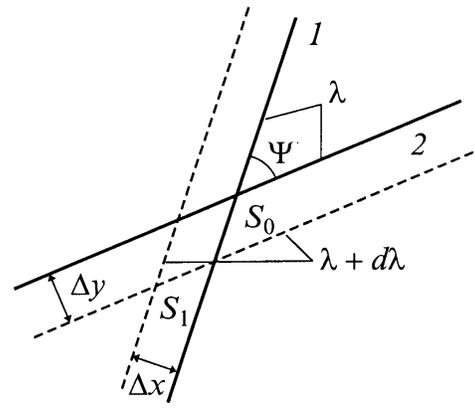


Рис. 4. К вопросу о спектральном разложении при двумерной лауэ-фокусировке сферической волны (астигматизм отсутствует). I — фокальная линия, перпендикулярная плоскости {НО}; 2 — фокальная линия, перпендикулярная плоскости {ОН}; Δx и Δy — дифракционные уширения фокуса соответственно в плоскостях {НО} и {ОН}; S_0 — изображение точечного источника (фокус) для длины волны λ , соответствующей точному брэгговскому условию; S_1 — изображение для $\lambda + d\lambda$.

$L_h^{(1,2)} \approx -R_{(1,2)} \gamma_{h(1,2)}$. Знак „минус“ означает, что первый кристалл должен быть обращен к источнику выпуклой стороной ($R < 0$).

При отсутствии астигматизма разложение в спектр происходит вдоль линии, образующей углы Ψ_1 и Ψ_2 с фокальными линиями I и 2 (рис. 4), причем: $\sin \Psi_1 / \sin \Psi_2 = \Delta x / \Delta y$, $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Оценкой величины спектрального разрешения при этом является $\max\{(d\lambda/\lambda)_1, (d\lambda/\lambda)_2\}$.

Фокусировка плоской волны и синхротронного излучения

На практике особый интерес представляет случай падения плоской рентгеновской волны ($L_0^{(1)} \gg R_1 \gamma_{0(1)}$), а также синхротронного излучения, когда в одной плоскости падающее излучение обладает очень малой расходимостью, а в перпендикулярной плоскости расходимость существенна.

Условия фокусировки (11) остаются справедливыми и для плоской волны с заменой в (11) $\alpha_0^{(1,2)} \rightarrow -\gamma_0^{(1,2)} / R_{(1,2)}$. Тогда величины линейных дисперсий и спектральных разрешений в плоскостях {НО} и {ОН} равны

$$D_\Psi^{(p1)} \cong \text{tg} \Theta_B^{(1,2)} L_0^{(1,2)} R_{(1,2)} (1/L_h^{(1,2)} + 1/\gamma R_{(1,2)}) / \lambda, \\ (d\lambda/\lambda)_{(1,2)}^{p(1)} \cong \frac{(\Delta\Psi)_{(1,2)} \text{ctg} \Theta_B^{(1,2)}}{\{L_0^{(1,2)} (1/\gamma + R_{(1,2)} / L_h^{(1,2)})\}}. \quad (28)$$

Понятно, что при проведении численных оценок на основе выражений (28) необходимо в них положить

$L_0 \gg R\gamma$. Формулы (28) характеризуют спектральные свойства плоской волны при ее фокусировке двухкристалльной схемой.

Величина астигматизма в случае плоской волны равна

$$\Delta L_{hh} = -\gamma R_2(1 + \sigma_h R_2 / (\chi \sin \Theta_B t_2)) + \gamma R_1(1 + \sigma_h R_1 / (\chi \sin \Theta_B t_1)) + (L_{12} + t_2) / \gamma. \quad (29)$$

Покажем, что ΔL_{hh} очень чувствительна к разности радиусов изгиба кристаллов $\Delta R = R_2 - R_1 \ll R_1$. Действительно, для $t_1 = t_2 = 400 \mu\text{m}$, $\gamma \cong 0.91$, $\sigma_h = 4.5899 \cdot 10^5 \text{ m}^{-2}$, $R_1 \cong 1 \text{ m}$, $\lambda = 1.54 \text{ \AA}$, $L_{12} \approx 1 \text{ cm}$, и $\Delta R \approx 1 \text{ cm}$ находим $\Delta L_{hh} \approx 1.47 \text{ cm}$. Светосила при этом падает на 1–1.5 порядка по сравнению со случаем, когда фокусировка происходит в „точку“. При $L_{12} \gg \Delta R$ величина ΔL_{hh} очень слабо зависит от ΔR и астигматизм определяется в основном только расстоянием L_{12} . Из (29) видно, что для уменьшения астигматизма при $R_2 > R_1$ лучше использовать первый кристалл, повернутый выпуклой стороной к падающей волне ($R_1 < 0$). Таким образом, при небольших расстояниях между кристаллами, когда $L_{12} < \Delta R$, для плоской волны имеет место высокая чувствительность фокусировки „плоская волна–точка“ к разности радиусов изгиба кристаллов.

На рис. 4 представлена зависимость астигматизма от радиуса изгиба первого кристалла. Видно, что для кристаллов с одинаковой толщиной минимальный астигматизм достигается при одинаковых радиусах изгиба. Формула (29) получена для кристаллических пластин, изготовленных из одного и того же материала. Анализ (29) показывает, что астигматизм отсутствует, например, в частном случае, когда $R_1 = R_2 = R$, $\Delta t = t_2 - t_1 < 0$ при расстоянии между кристаллами

$$L_{12}^{(p1)} = -(|\chi_{hr}| \gamma^2 R^2 \Delta t / 2 \sin^2 \Theta_B t_1 t_2 + t_2). \quad (30)$$

Для числовых значений $R = 2 \text{ m}$, $\sin \Theta_B = 0.4$, $t_1 = 400 \mu\text{m}$, $t_2 = 300 \mu\text{m}$, $\chi_h \sim 10^{-5}$ получим из (30) расстояние между кристаллами, при котором изображение удаленного источника будет стигматическим $L_{12}^{(p1)} \approx 8.7 \text{ cm}$.

Для кристаллов с одинаковыми толщинами и радиусами изгиба величина астигматизма линейно зависит от расстояния между кристаллами $\Delta L_{hh} = (L_{12} + t_2) / \gamma$. В этом случае для получения светосильного пучка необходимо располагать кристаллы очень близко друг от друга.

Рассмотрим кристаллы с одинаковыми радиусами изгиба $R_1 = R_2 = R$, но с разными толщинами. Астигматизм зависит линейно от разнотолщинности $\Delta t = t_2 - t_1 \ll t_1$

$$\Delta L_{hh} \cong \gamma \sigma_h R^2 \Delta t / (\chi \sin \Theta_B t_1^2) + (L_{12} + t_2) / \gamma. \quad (31)$$

Сделаем численную оценку для ΔL_{hh} при тех же числовых значениях величин, что и выше. Тогда первый член в (31) равен $1.6 \cdot 10^2 \Delta t$ и при $\Delta t = 1 \mu\text{m}$, $L_{12} \sim 1 \text{ cm}$

его вклад гораздо меньше второго. Зависимость ΔL_{hh} от разнотолщинности кристаллов при $L_{12} \sim 1 \text{ cm}$ становится существенной лишь при достаточно больших радиусах изгиба $R \geq 10 \text{ m}$.

Пусть теперь падающее на первый кристалл излучение слабо расходится в плоскости рассеяния и обладает конечной расходимостью в перпендикулярной плоскости (случай синхротронного излучения). Тогда геометрические условия двумерной лауэ-фокусировки синхротронного излучения имеют вид

$$-R_1 / \gamma + 1 / \alpha_h^{(1)} = \chi \text{tg} \Theta_B^{(1)} t_1 / \sigma_{h(1)},$$

$$1 / \alpha_0^{(2)} + 1 / \alpha_h^{(2)} = \chi \text{tg} \Theta_B^{(2)} t_2 / \sigma_{h(2)},$$

$$x - x_0 = -L_h^{(1)} \alpha_h^{(1)} (\Delta \Theta^{(1)} R_1 + t_1 \text{tg} \Theta_B^{(1)}) / \gamma^2,$$

$$y - y_0 = L_h^{(2)} \alpha_h^{(2)} (\Delta \Theta^{(2)} / \alpha_0^{(2)} - t_2 \text{tg} \Theta_B^{(2)} / \gamma) / \gamma. \quad (32)$$

Из выражений (32) видно, что в точке фокуса вместе с гармоникой λ в первом порядке дифракции фокусируется и λ/n в n -м порядке.

Список литературы

- [1] Инденбом В.Л., Слободецкий И.Ш., Труни К.Г. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. Вып. 3. С. 1110–1120.
- [2] Суворов Э.В., Половинкина В.И. // Письма в ЖЭТФ. 1974. Вып. 5. С. 326–329.
- [3] Инденбом В.Л., Суворов Э.В. // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. Вып. 9. С. 485–489.
- [4] Инденбом В.Л., Суворов Э.В., Слободецкий И.Ш. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. Вып. 1 (7). С. 359–369.
- [5] Афанасьев А.М., Кон В.Г. // ФТТ. 1977. Т. 19. Вып. 6. С. 1775–1783.
- [6] Кон В.Г. // Металлофизика. 1988. Т. 10. № 2. С. 78–84.
- [7] Кон В.Г. ФТТ. 1977. Т. 19. Вып.12. С. 3567–3573.
- [8] Aristov V.V., Snigiriv A.A., Afanas'ev A.M., Kohn V.G., Polovinkina V.I. // Acta Cryst. (A). 1986. Vol. A42. P. 426–435.
- [9] Kohn V.G., Toneyan A.H. // Acta Cryst. (A). 1986. Vol. A42. P. 441–449.
- [10] Кон В.Г. Кристаллография. 1979. Т. 24. Вып. 4. С. 712–719.
- [11] Аристов В.В., Кон В.Г., Снигирев А.А. // Кристаллография. 1986. Т. 31. Вып. 6. С. 1059–1065.
- [12] Левонян Л.В. // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 5. С. 269–272.
- [13] Чуховский Ф.Н., Петрашень П.В. // ДАН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 599–602.
- [14] Петрашень П.В., Чуховский Ф.Н. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. Вып. 2 (8). С. 477–487.
- [15] Петрашень П.В., Чуховский Ф.Н. // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. Вып. 7. С. 385–388.
- [16] Чуховский Ф.Н., Петрашень П.В. // ДАН СССР. 1976. Т. 228. № 5. С. 1087–1090.
- [17] Петрашень П.В., Чуховский Ф.Н. // Кристаллография. 1976. Т. 21. Вып. 2. С. 283–292.
- [18] Чуховский Ф.Н. // Металлофизика. 1980. Т. 2. № 6. С. 3–27.
- [19] Габриелян К.Т., Чуховский Ф.Н., Пинскер З.Г. // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 8. С. 1641–1646.
- [20] Габриелян К.Т., Чуховский Ф.Н. // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 10. С. 2127–2128.

- [21] *Кушнир В.И., Суворов Э.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. Вып. 9. С. 551–554.
- [22] *Кушнир В.И., Суворов Э.В.* // ФТТ. 1982. Т. 24. Вып. 6. С. 1606–1611.
- [23] *Kushnir V.I., Suvorov E.V.* // Phys. Stat. Sol. (A). 1982. Vol. 69. P. 483–490.
- [24] *Kushnir V.I., Kaganer V.M., Suvorov E.V.* Acta Cryst. (A). 1985. Vol. A41. P. 17–25.
- [25] *Габриелян К.Т., Демирчян Г.О.* Кристаллография. 1989. Т. 34. Вып. 1. С. 22–27.
- [26] *Пинскер З.Г.* // Рентгеновская кристаллооптика. М.: Наука, 1982. 392 с.
- [27] *Pearse T.* // Philos. Mag. 1946. Vol. 37. P. 311.