

Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием

© Н.М. Рыскин, А.М. Шигаев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410026 Саратов, Россия
e-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 6 июля 2001 г.)

Представлены результаты исследования простой модели распределенной автоколебательной системы с кубичной нелинейностью и запаздыванием. Теоретически проанализированы условия самовозбуждения колебаний, режимы стационарной генерации и их устойчивость. Проведено численное моделирование нестационарных автомодуляционных режимов (включая режимы сложной динамики и хаоса) в широком диапазоне управляющих параметров. Показано, что по мере увеличения параметра неравновесности реализуется сложная последовательность смены регулярных и хаотических режимов, причем переходы к хаосу могут происходить практически по всем известным сценариям, характерным для конечномерных систем. Отмечается аналогия с некоторыми конечномерными моделями, предлагавшимися ранее для анализа процессов конкуренции мод в резонансных электронных лазерах.

Введение

Распределенные автоколебательные системы (РАС) с запаздывающей обратной связью (ЗОС) играют важную роль во многих областях физики: радиофизике, нелинейной оптике, биофизике и т.д. [1–4]. Хорошо известно, что подобные системы способны генерировать сложные, в том числе хаотические, колебания, поэтому их изучение помогает лучше понять особенности нелинейной динамики систем с большим числом степеней свободы. В частности, в литературе обсуждался вопрос о моделировании некоторых свойств развитой турбулентности при помощи автогенераторов с запаздыванием [2,5]. С практической точки зрения важность исследования подобных систем связана с тем, что автогенераторы с ЗОС составляют обширный класс приборов вакуумной и плазменной сверхвысокочастотной (СВЧ) электроники. В качестве типичных примеров можно привести лампу бегущей волны (ЛБВ) с ЗОС [6–8], клистрон с ЗОС [9–12], лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) [13–15], линейные ускорители электронов с внешней обратной связью [16] и т.д. В таких устройствах, как лампа обратной волны (ЛОВ), автомодуляция и сложная динамика также обусловлены запаздывающим характером внутренней обратной связи. Отметим, что в последнее время возрос интерес к исследованию именно хаотических режимов генерации с целью создания источников шумоподобных сигналов с управляемыми характеристиками.

Исследование сложной динамики распределенных систем представляет собой чрезвычайно трудоемкую задачу, что связано с бесконечным числом степеней свободы и наличием нескольких управляющих параметров. Поэтому представляется интересным рассмотреть достаточно простую модельную систему, демонстрирующую все основные особенности динамики РАС с ЗОС, которую можно было бы детально исследовать численным, а по возможности — и аналитическими методами.

В настоящей работе для этой цели предлагается уравнение

$$\dot{A} + \gamma A = \alpha \exp(i\Theta)(1 - |A(t-1)|^2)A(t-1). \quad (1)$$

Здесь комплексная переменная A имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний; α и γ — параметры, характеризующие неравновесность и диссипацию; Θ — набег фазы в цепи обратной связи. Правая часть уравнения (1) зависит от значений амплитуды в запаздывающий момент времени $t-1$ (всегда можно выбрать такую нормировку переменных, в которой время запаздывания равно единице). Уравнение (1) приближенно описывает, например, динамику триодного генератора Ван-дер-Поля с линией задержки в анодной цепи в случае, когда анодно-сеточная характеристика лампы аппроксимируется кубическим полиномом [17]. В отсутствие запаздывания оно переходит в укороченное уравнение Ван-дер-Поля

$$\dot{A} + \gamma A = \alpha \exp(i\Theta)(1 - |A|^2)A,$$

которое описывает установление режима периодических одночастотных автоколебаний в окрестности порога самовозбуждения в широком классе автоколебательных систем [1,4,18]. Поэтому естественно использовать уравнение (1) в качестве универсальной модели для описания динамики автоколебательных систем с ЗОС. Отметим, что уравнение, описывающее автогенератор клистронного типа с ЗОС

$$\dot{A} + \gamma A = \alpha \exp(i\Theta) J_1(|A(t-1)|) \frac{A(t-1)}{|A(t-1)|},$$

где J_1 — функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка [9–11], в случае слабой нелинейности, когда можно разложить функцию J_1 в ряд и ограничиться двумя первыми членами разложения, также приводится к виду (1).

Ранее различные вопросы, связанные со сложной динамикой автогенератора с кубической нелинейностью и запаздыванием, рассматривались в работах [19–21]. Было показано, что по мере увеличения параметра неравновесности стационарное решение становится неустойчивым и возникает автомодуляция [19]. При дальнейшем увеличении α наблюдался переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, т. е. через последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции [20]. В работе [21] было обнаружено, что значительно выше порога возникновения хаотического режима наблюдается переход к так называемому многомодовому хаосу, связанный с объединением аттракторов, сформировавшихся на базе различных собственных мод.

В настоящей работе представлены подробные результаты исследования укороченного уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием (1) в широком диапазоне управляющих параметров. В частности, теоретически проанализированы условия самовозбуждения автоколебаний, найдены решения, отвечающие режимам стационарной генерации, и определены условия их устойчивости. Поскольку эти вопросы в той или иной степени затрагивались ранее [4,17,19], мы ограничимся лишь основными результатами, необходимыми для дальнейшего изложения.

1. Теоретический анализ

1) Условия самовозбуждения автоколебаний. Найдем условия самовозбуждения автоколебаний. Линеаризуя уравнение (1) и отыскивая решение в виде $A \sim \exp(pt)$, получим характеристическое уравнение

$$p + \gamma = \alpha \exp(i\Theta - p). \quad (2)$$

Это трансцендентное уравнение, которое имеет бесконечное число комплексных корней, что отражает распределенную природу системы. Учитывая, что на границе неустойчивости p является чисто мнимым, $p = i\omega$, где ω — частота колебаний, из (2) находим

$$\gamma = \alpha \cos(\omega - \Theta), \quad \omega = -\alpha \sin(\omega - \Theta). \quad (3)$$

Исключая из уравнений (3) параметр α , можно получить уравнение для частот, с которыми возбуждаются колебания

$$\frac{\omega}{\gamma} = -\operatorname{tg}(\omega - \Theta). \quad (4)$$

Удобно решать уравнение (4) графически (рис. 1). Пронумерует его корни так, как показано на рис. 1. Поскольку по смыслу задачи параметры α , γ считаются положительными, то следует учитывать только те корни, для которых $\cos(\omega - \Theta) > 0$, т. е. корни с четными номерами. Из рис. 1 видно, что при изменении γ частоты собственных мод ведут себя следующим образом. При $\gamma \rightarrow 0$ имеем

$$\omega_{\pm n} \approx \Theta \pm \left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $n = 2, 4, \dots$

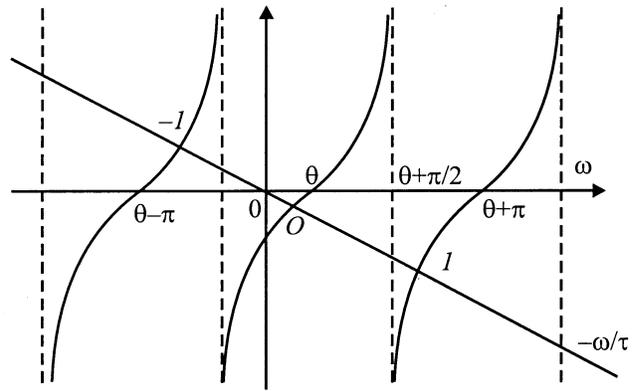


Рис. 1. К определению частот собственных мод генератора с запаздыванием.

Для основной моды ($n = 0$) $\omega_0 \rightarrow 0$ вне зависимости от Θ . При $\gamma \rightarrow \infty$ имеем $\omega_{\pm n} \approx \Theta \pm \pi n$.

Можно также найти стартовое значение параметра $\alpha_{\text{st}}^{(n)}$, при котором возбуждается мода с номером n . Возводя оба уравнения (3) в квадрат и складывая, получаем

$$\alpha_{\text{st}}^{(n)} = \sqrt{\gamma^2 + \omega_n^2(\gamma, \Theta)}, \quad (5)$$

где $\omega_n(\gamma, \Theta)$ — частота n -й моды, которая определяется из уравнения (4).

Отсюда следует, что оптимальным для возбуждения основной моды ($n = 0$) является значение $\Theta = 0$. Тогда $\omega_0 = 0$, $\alpha_0 = \gamma$. Наоборот, при $\Theta = \pm\pi$ самовозбуждение затрудняется. В этом случае частоты ω_0 и $\omega_{\mp 2}$ станут примерно одинаковыми. При дальнейшем увеличении Θ основной моды становится уже вторая мода. Таким образом, граница самовозбуждения на плоскости α , Θ имеет вид, представленный на рис. 2. Существуют области $(2m - 1)\pi < \Theta < (2m + 1)\pi$, которые будем называть зонами генерации. При $\Theta = 2\pi m$ параметр α принимает минимальное значение, а при $\Theta = 2\pi m + \pi$ — максимальное.

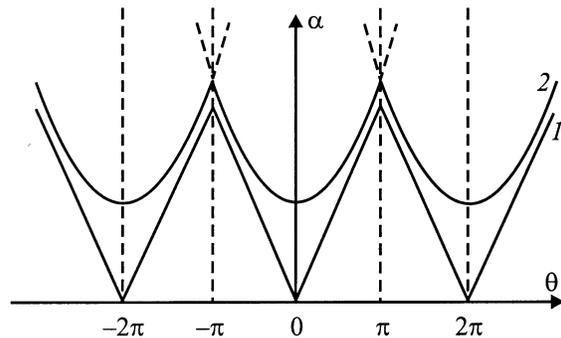


Рис. 2. Вид границ зон самовозбуждения на плоскости параметров (α, Θ) : 1 — $\gamma = 0$, 2 — $\gamma > 0$.

2) Режимы стационарной генерации. В режиме стационарной генерации

$$A = A_0 \exp[i(\omega t + \varphi)], \quad (6)$$

где амплитуда A_0 и фаза φ постоянны.

Подставляя (6) в уравнение (1) и разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha(1 - A_0^2) \cos(\omega - \Theta), \\ \omega &= -\alpha(1 - A_0^2) \sin(\omega - \Theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Разделив одно из соотношений (7) на другое, придем к уравнению (4). Отсюда следует, что частота стационарной генерации равна одной из собственных частот ω_n и не меняется с ростом амплитуды колебаний. Из (7) нетрудно также найти выражение для амплитуды A_0

$$A_0 = \sqrt{1 - \frac{(\gamma^2 + \omega_n^2)^{1/2}}{\alpha}} = \sqrt{1 - \frac{\alpha_{st}^{(n)}}{\alpha}}. \quad (8)$$

Отсюда видно, что при слабой надкритичности, когда $\alpha = \alpha_{st}^{(n)}(1 + \varepsilon)$, где ε — малая величина, нарастание амплитуды происходит по закону $A_0 \sim \sqrt{\varepsilon}$, типичному для суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа (т.е. для мягкого возбуждения автоколебаний). При значениях α , существенно превышающих стартовое, A_0 стремится к единице.

3) Условия возникновения автомодуляции. Исследуем полученные решения на устойчивость. Зададим малое возмущение стационарного режима в виде пары равноотстоящих от основной частоты спутников

$$\begin{aligned} A &= [A_0 + A_+(t) \exp(i\Omega t) + A_-(t) \exp(-i\Omega t)] \\ &\times \exp[i(\omega_n t + \varphi)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь A_0 удовлетворяет уравнению (8), $|A_{\pm}| \ll |A_0|$, ω_n — одна из собственных частот, Ω — частота автомодуляции, а фаза φ произвольна. Выражение (9) необходимо подставить в исходное уравнение (1), линеаризовать его относительно малых возмущений и исследовать поведение амплитуд спутников A_{\pm} . Ограничимся случаем $\Theta = 0$ (центр зоны генерации), когда удается получить аналитическое решение в явном виде. На границе устойчивости имеем $A_{\pm} = \text{const}$, т.е. малые возмущения не нарастают, но и не затухают. После некоторых преобразований получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} [\gamma + i\Omega + (\alpha - 2\gamma) \exp(-i\Omega)] A_+ &= -(\alpha - \gamma) A_-^* \exp(-i\Omega), \\ [\gamma - i\Omega + (\alpha - 2\gamma) \exp(i\Omega)] A_- &= -(\alpha - \gamma) A_+^* \exp(i\Omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) имеет два вида решений: либо $A_+ = A_-^*$, либо $A_+ = -A_-^*$. Можно показать, что первые соответствуют чисто амплитудным возмущениям, вторые — чисто фазовым [13]. Таким образом, в данном случае

амплитудные и фазовые возмущения разделяются и их можно рассматривать независимо.

Остановимся на анализе амплитудных возмущений. В этом случае характеристическое уравнение принимает вид

$$\gamma + i\Omega = -(2\alpha - 3\gamma) \exp(-i\Omega). \quad (11)$$

Разделяя в (11) вещественную и мнимую части, получаем

$$\gamma = -(2\alpha - 3\gamma) \cos \Omega, \quad \Omega = (2\alpha - 3\gamma) \sin \Omega. \quad (12)$$

Анализируя эти соотношения, можно показать, что частота автомодуляции Ω также удовлетворяет уравнению для частот собственных мод (4), но теперь необходимо выбирать корни с нечетными номерами. Напомним, что мы полагаем $\Theta = 0$, параметры α, γ считаются положительными, причем из условий самовозбуждения (раздел 1.1) следует, что $\alpha > \gamma$. Таким образом, должны выполняться следующие условия:

$$2\alpha - 3\gamma > 0, \quad \cos \Omega < 0. \quad (13), (14)$$

Из соотношения (14) следует, что необходимо выбирать нечетные корни (4) (см. рис. 1).

Поскольку рассматриваемая нами система представляет собой усилитель, охваченный кольцом внешней запаздывающей обратной связи, полезно с учетом выражения (8) переписать неравенство (13) в виде

$$1 - 3A_0^2 = dF/dA_0 < 0,$$

где $F(A_0) = A_0 - A_0^3$ — выражение, описывающее амплитудную характеристику усилителя.

Таким образом, физический смысл условия (13) состоит в том, что стационарная амплитуда должна находиться на падающем участке амплитудной характеристики.

Из системы (12) также можно найти критическое значение параметра $\alpha_{sm}^{(n)}$, при котором возникает неустойчивость

$$\alpha_{sm}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(3\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \Omega_n^2} \right). \quad (15)$$

Здесь Ω_n — один из корней уравнения (4), но теперь уже $n = \pm 1, \pm 3, \dots$. Наименьшее значение порога неустойчивости имеют спутники, ближайšie к основной частоте. Так как они могут возбуждаться лишь на фоне колебаний на основной моде с достаточно большой амплитудой, будем называть соответствующие возмущения автомодуляционными модами.

Фактически условие (15) означает, что крутизна падающего участка амплитудной характеристики должна быть достаточно велика. Возникновение автомодуляции происходит мягко, при этом в спектре появляется пара симметрично отстоящих от основной частоты спутников. Их частоты равны $\omega_0 \pm \Omega_n$. По терминологии, принятой в теории распределенных автоколебательных систем (см., например, [8]), такой механизм автомодуляции называется амплитудным.

Анализ фазовых возмущений, который мы подробно проводить не будем, показывает, что стационарные режимы нейтрально устойчивы относительно сдвига по фазе на постоянную величину, т. е. возмущение не нарастает и не затухает. Это является очевидным следствием симметрии стационарных решений относительно замены $A \rightarrow A \exp(i\varphi_0)$, где φ_0 — произвольная константа.

В общем случае, когда $\Theta \neq 0$, уравнения для амплитудных и фазовых возмущений не разделяются, следовательно, неустойчивость сопровождается осцилляциями как амплитуды, так и фазы колебаний. Найти точные аналитические условия автомодуляции не удастся. Однако в целом выводы, полученные для $\Theta = 0$, остаются в силе. Автомодуляция возникает по амплитудному механизму и сопровождается мягким возбуждением соседней пары автомодуляционных мод. Частота автомодуляции при изменении Θ меняется незначительно. Это подтверждается и результатами численного моделирования, которые изложены в следующем разделе.

2. Результаты численного моделирования

Численный анализ динамики системы, описываемой укороченным уравнением Ван-дер-Поля с запаздыванием (1), проводился с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Для анализа полученных данных использовались построение временных реализаций, реконструкция аттракторов методом Паккарда–Такенса, построение бифуркационных диаграмм и расчет фурье-спектров. При численном моделировании мы ограничивались достаточно небольшими значениями параметра диссипации γ (а именно $\gamma < 1$), так как в этом случае автомодуляционные колебания являются квазигармоническими. При больших γ они носят релаксационный характер, так что ставится под сомнение справедливость приближения медленно меняющихся амплитуд. Сразу отметим, что найденные в результате численного моделирования значения порога самовозбуждения, амплитуды и частоты стационарной генерации, порога и частоты автомодуляции полностью согласуются с теоретическими (раздел 1.1).

Было проведено подробное исследование процессов перехода к хаосу в широком диапазоне управляющих параметров. Результаты расчетов показали, что динамика системы является существенно более разнообразной, чем это предполагалось ранее [20,21]. Так, переход по сценарию Фейгенбаума наблюдается только вблизи центра зоны генерации. Типичную последовательность бифуркаций для этого случая иллюстрирует рис. 3, где представлены временные реализации, фазовые портреты и спектры для различных значений параметра неравновесности α ($\gamma = 0.3$, $\Theta = 0.1\pi$). Когда α лежит в пределах $\alpha_{st}^{(0)} < \alpha < \alpha_{sm}^{(1)}$, переходный процесс завершается установлением одночастотного режима генерации (рис. 3, *a*). Здесь $\alpha_{st}^{(0)}$ — порог самовозбуждения для

основной моды, $\alpha_{sm}^{(1)}$ — порог автомодуляции для первой автомодулированной моды (раздел 1). При $\alpha > \alpha_{sm}^{(1)}$ этот режим теряет устойчивость по отношению к первой автомодуляционной моде и возникает режим периодической автомодуляции (рис. 3, *b*), которому в фазовом пространстве соответствует предельный цикл. Для наглядности на фазовых портретах на рис. 3, *a, b* оставлены участки фазовых траекторий, соответствующие переходному процессу.

Вначале автомодуляция является квазигармонической. Однако с ростом α амплитуда автомодуляции увеличивается и спектр обогащается гармониками. Одновременно происходит искажение формы предельного цикла. Это обусловлено тем, что он увеличивается в размерах и приближается к седловому состоянию равновесия, расположенному в начале координат. Оно отталкивает от себя фазовую траекторию, которая накручивается на неустойчивое многообразие седла. За счет этого на предельном цикле образуются петли (рис. 3, *c*). Аналогичная ситуация описана в [11]. Соответственно усложняется временная реализация выходного сигнала: в течение одного периода колебаний наблюдается несколько локальных максимумов. Также отмечается уменьшение частоты автомодуляции, что вызвано тем, что фазовая траектория все больше времени проводит в окрестности неустойчивого положения равновесия. В зависимости от значений параметров существует большое число циклов различной формы (т. е. с различным количеством петель). При $\gamma \ll 1$ переходы от одного цикла к другому происходят мягко. С ростом γ начинают доминировать жесткие переходы, которые сопровождаются гистерезисом. Такое поведение характерно для многих автоколебательных систем с запаздыванием, например, для простой модельной системы, рассмотренной в [22], а также для СВЧ генератора на основе пролетного клистрона, который теоретически и экспериментально исследовался в работе [12].

При увеличении α происходит переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции, причем удается подтвердить выполнение универсальных количественных закономерностей, присущих сценарию Фейгенбаума [1,18]. На рис. 3, *d* представлены реализация, спектр и фазовый портрет в режиме хаотических колебаний. Общую картину помогает представить бифуркационная диаграмма, на которой отложены положения максимумов амплитуды при различных значениях α (рис. 4). На ней хорошо виден жесткий переход между двумя различными циклами при $\alpha \approx 2.33$, область бифуркаций удвоения периода и окна периодических движений в хаосе. При дальнейшем увеличении α наблюдается неоднократное чередование регулярных и хаотических режимов, характерное для подобных систем [11,12], причем переходы к хаосу происходят либо через удвоения периода, либо жестко.

Вблизи границ зон генерации динамика носит существенно более сложный характер. Здесь в зависимости от начальных условий может возбуждаться одна из двух

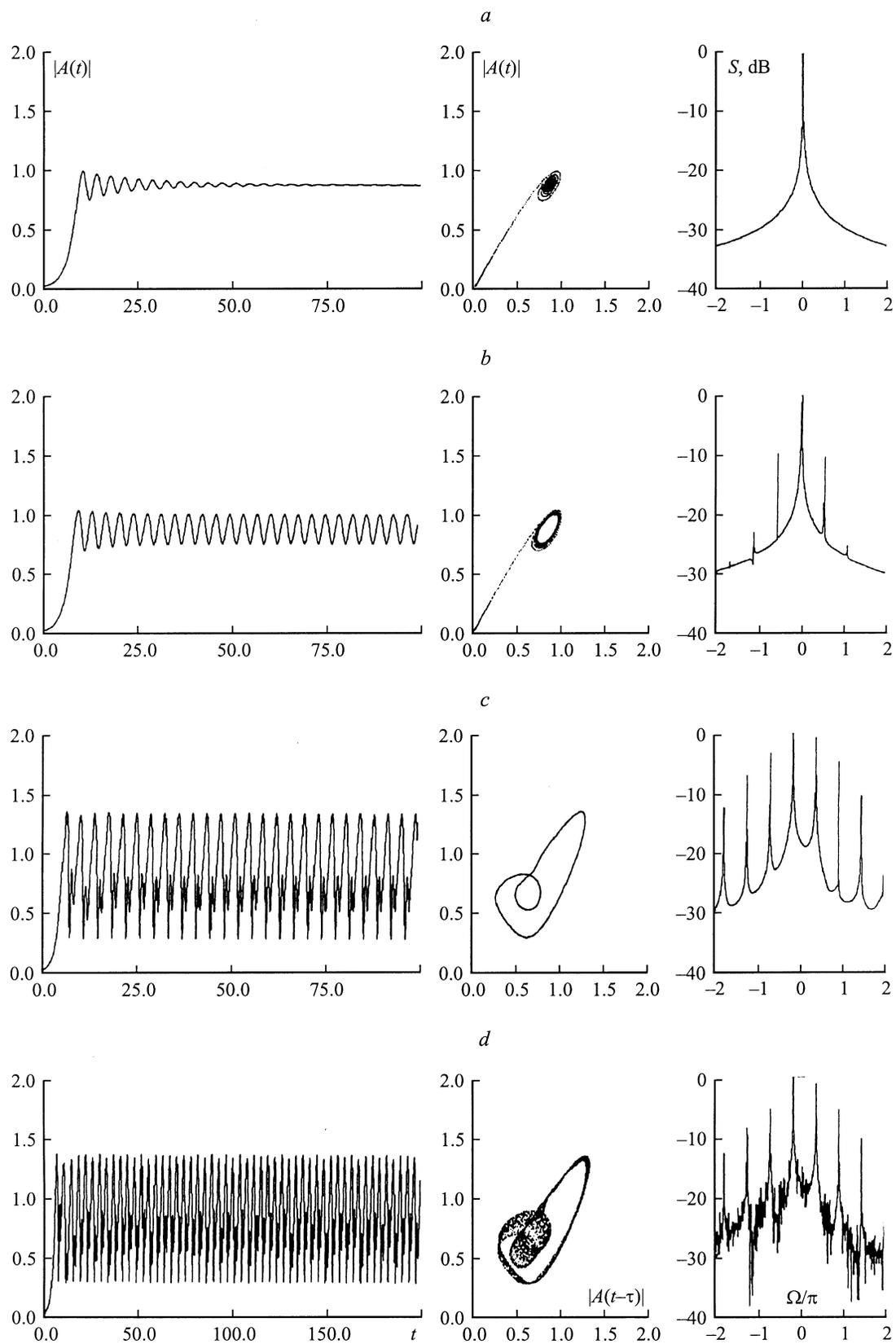


Рис. 3. Временные реализации, фазовые портреты и спектры в различных динамических режимах вблизи центра зоны генерации. $\gamma = 0.3$, $\Theta = 0.1\pi$; $\alpha = 1.3$ (a), 1.4 (b), 2.35 (c), 2.38 (d).

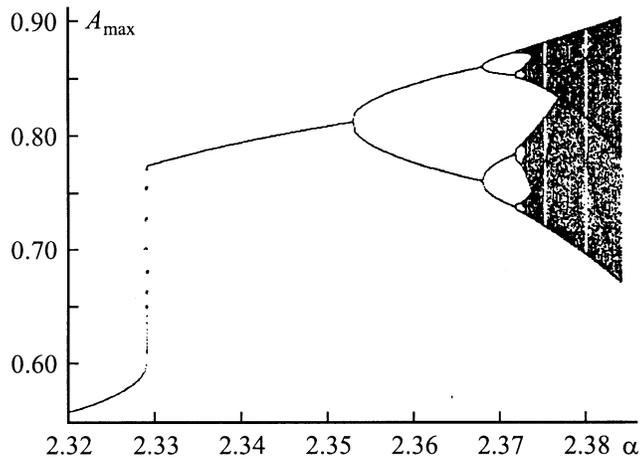


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма в области перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периоды при $\gamma = 0.3$, $\Theta = 0.1\pi$.

соседних мод, т.е. мы имеем типичную картину конкуренции мод при сильной связи [18]. Для каждой из этих мод переход к хаосу происходит по своему сценарию. Для определенности рассмотрим случай, когда Θ близко к π , так что могут возбуждаться моды с номерами $n = 0$ и 2 (раздел 1.1). Далее моду с $n = 0$ будем называть основной, моду с $n = 2$ — побочной. В качестве иллюстрации на рис. 5, *a, b* приведены бифуркационные диаграммы для основной и побочной мод при $\gamma = 0.3$, $\Theta = 0.9\pi$. Как показывает численное моделирование, для основной моды вначале наблюдается переход по сценарию Фейгенбаума, однако при $\alpha = 3.722$ происходит жесткий переход к режиму периодической автомодуляции. Далее автомодуляция становится квазипериодической ($\alpha = 3.76$), после чего происходит еще один переход к хаосу, но уже через разрушение трехчастотного квазипериодического движения (сценарий Рюэля–Такенса). Отметим, что по мере приближения к границе зоны генерации каскад удвоений обрывается и жесткий переход к периодическому режиму происходит после конечного числа бифуркаций, причем чем ближе Θ к границе зоны, тем меньшее число удвоений удается наблюдать.

Для побочной моды переход к хаосу всегда происходит через разрушение квазипериодики (рис. 5, *b*). При этом наблюдаются многочисленные окна периодических движений. Можно заметить, что внутри некоторых окон наблюдаются бифуркации удвоения периода. В данном случае это соответствует удвоениям резонансного цикла на торе.

Следует подчеркнуть аналогию между полученными результатами и данными некоторых экспериментов, в частности в работе [7], где экспериментально исследовался микроволновый генератор на основе ЛБВ с ЗОС, в цепи обратной связи которого содержался узкополосный перестраиваемый фильтр. Когда резонансная частота фильтра была близка к частоте одной из собственных мод, переход к хаосу происходил по сценарию

Фейгенбаума. Если же она лежала примерно посередине между частотами двух мод, переход происходил через разрушение квазипериодического движения.

При увеличении параметра неравновесности α до значений, существенно превышающих порог возникновения хаоса, наблюдается объединение аттракторов, сформировавшихся на базе основной и побочной мод. Это явление отмечалось ранее в работе [21]. Динамику системы после образования объединенного аттрактора иллюстрирует рис. 6. Временная реализация выходного сигнала является сильно нерегулярной, и по сути представляет собой случайные переключения между двумя аттракторами — хаотическую перемежаемость. Спектр имеет два отчетливых максимума на частотах соответствующих мод на фоне достаточно однородного „шумового пьедестала“. На фазовом портрете уже не удается отчетливо различать какую-либо крупномасштабную структуру. Подобные режимы получили название высокоразмерного или развитого хаоса. Они являются отличительной особенностью распределенных систем и характерны для многих РАС электронно-волновой природы (см., например, [7,23,24]).

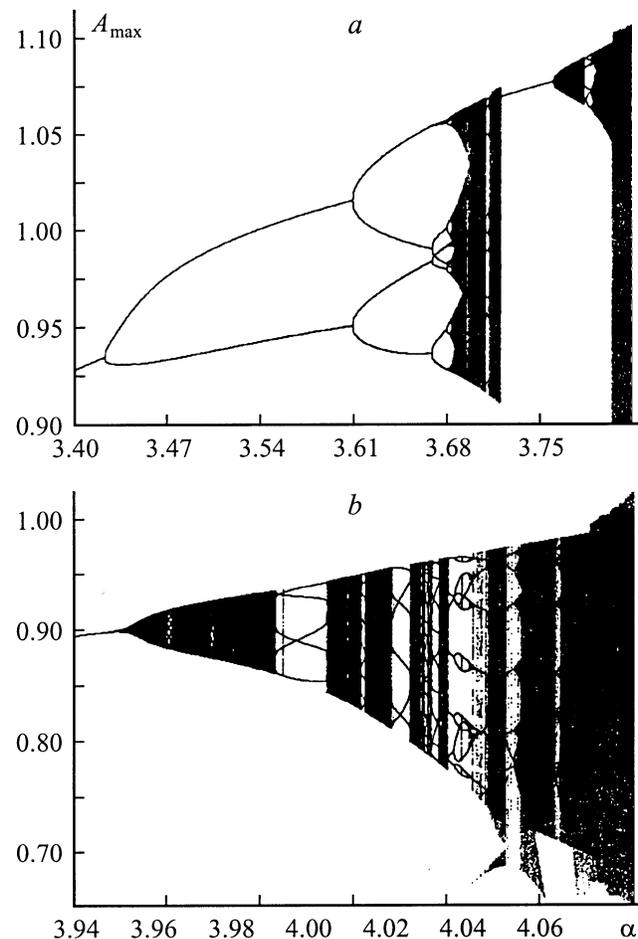


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы для основной (*a*) и побочной (*b*) мод при $\gamma = 0.3$, $\Theta = 0.9\pi$.

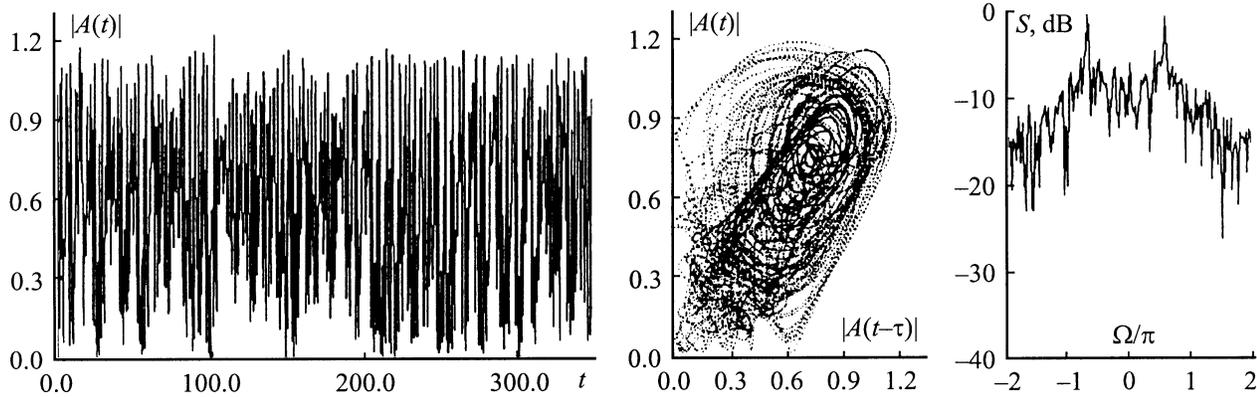


Рис. 6. Временная реализация, фазовый портрет и спектр после объединения аттракторов. $\gamma = 1.0$, $\Theta = 0.9\pi$, $\alpha = 5.68$.

3. Приближение трех взаимодействующих мод

При исследовании распределенных систем часто прибегают к построению различных упрощенных конечномерных моделей, ограничиваясь учетом лишь нескольких взаимодействующих мод. Наиболее известный пример подобного рода — система Лоренца в задаче о тепловой конвекции [1,4,18]. Построим трехмодовую модель системы (1), учитывая только основную и две автомодуляционные моды. Будем искать решение в виде (9), считая A_0 и A_{\pm} медленно меняющимися функциями. При этом будем полагать, что в течение времени запаздывания (которое в используемой здесь нормировке равно единице) их изменением можно пренебречь. Разумеется, амплитуды спутников уже не являются малыми. Подставляя выражение (9) в (1) и применяя метод усреднения [17,18], после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 + (\gamma + i\omega)A_0 &= \alpha e^{i(\Theta - \omega)} \left[(1 - |A_0|^2 - 2|A_+|^2 - 2|A_-|^2)A_0 - 2A_0^*A_+A_- \right], \\ \dot{A}_+ + (\gamma + i\omega + i\Omega)A_+ &= \alpha e^{i(\Theta - \omega - \Omega)} \left[(1 - |A_+|^2 - 2|A_0|^2 - 2|A_-|^2)A_+ - A_0^2A_-^* \right], \\ \dot{A}_- + (\gamma + i\omega - i\Omega)A_- &= \alpha e^{i(\Theta - \omega + \Omega)} \left[(1 - |A_-|^2 - 2|A_0|^2 - 2|A_+|^2)A_- - A_0^2A_+^* \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Если перейти в (16) к вещественным амплитудам и фазам, полагая $A_0 = a_0 \exp(i\varphi_0)$, $A_{\pm} = a_{\pm} \exp(i\varphi_{\pm})$, нетрудно показать, что фазовое пространство данной системы четырехмерно (три вещественные амплитуды и фаза $\Phi = 2\varphi_0 - \varphi_+ - \varphi_-$). В одномодовом случае ($A_{\pm} = 0$) из (16) следует уравнение

$$\dot{A}_0 + (\gamma + i\omega)A_0 = \alpha e^{i(\Theta - \omega)} (1 - |A_0|^2)A_0.$$

Оно описывает установление режима одночастотной генерации на основной моде, причем условия самовозбуждения, амплитуда и частота установившихся колебаний совпадают с найденными в разделе 1 (формулы (4), (5), (8)). Кроме того, из (16) можно получить условия устойчивости одночастотного режима, в точности совпадающие с условиями из раздела 1.3.

Важно отметить, что система (16) с точностью до коэффициентов совпадает с конечномерными моделями, которые широко использовались для анализа процессов конкуренции мод в резонансных электронных лазерах, таких как ЛСЭ, гиротроны и др. [25,26]. Однако эти модели не способны описать режимы сложной динамики, характерные для подобных приборов. Для них устойчивыми являются режимы с постоянными амплитудами (одномодовые либо трехмодовые). С этой точки зрения распределенная модель с запаздыванием (1), обладающая богатым набором динамических режимов, представляется более близкой к реальным системам.

Заключение

Результаты исследований сложной динамики простой модели автогенератора с кубичной нелинейностью и запаздыванием обнаружили богатую картину различных автоколебательных режимов в пространстве параметров. Исследование сценариев перехода к хаосу показало, что по мере увеличения параметра неравновесности наблюдается сложная последовательность чередования регулярных и хаотических автомодуляционных режимов. По сути некорректно говорить о каком-то одном сценарии перехода к хаосу, так как реализуются практически все сценарии, присущие конечномерным динамическим системам. Последовательность бифуркаций завершается переходом к так называемому развитому хаосу, характеризующемуся значительно более однородным сплошным спектром и отсутствием выделенной крупномасштабной структуры на проекции фазового портрета. Такая ситуация типична для распределенных автоколебательных систем электронной природы, в частности ЛБВ с ЗОС [7],

ЛОВ [23,24]. Важно также отметить, что в приближении трехмодового взаимодействия из (1) можно получить конечномерную систему (16), которая использовалась ранее для анализа процессов конкуренции мод в электронных лазерах [25,26]. При этом результаты анализа устойчивости одномодового режима для обеих моделей совпадают, однако распределенная система позволяет продвинуться дальше и описать режимы сложной динамики и хаоса. Таким образом, представленные результаты свидетельствуют о перспективности использования укороченного уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием в качестве эталонной модели генераторов с ЗОС.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов CRDF (Award REC-006) и ФЦП „Интеграция“ (проект № А0057/2001).

Список литературы

- [1] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [2] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
- [3] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 12. С. 1410–1428.
- [4] *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 496 с.
- [5] *Дмитриев А.С., Старков С.О.* // РиЭ. 1988. Т. 33. № 7. С. 1427–1481.
- [6] *Кислов В.Я., Мясин Е.А., Залогин Н.Н.* // РиЭ. 1980. Т. 25. № 10. С. 2160–2168.
- [7] *Кац В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 2. С. 161–176.
- [8] *Блиох Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г.* и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. № 1–2. С. 34–49.
- [9] *Ергаков В.С., Моисеев М.А.* // РиЭ. 1986. Т. 31. № 5. С. 962–967.
- [10] *Афанасьева В.В., Лазерсон А.Г.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3. № 4. С. 88–99.
- [11] *Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 6. С. 66–82.
- [12] *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* // РиЭ. 2001. Т. 46. № 5. С. 561–567.
- [13] *Antonsen T.M., Levush B.* // Phys. Fluids B. 1989. Vol. 1. N 5. P. 1097–1108.
- [14] *Гинзбург Н.С., Петелин М.И.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. № 6. С. 3–26.
- [15] *Гинзбург Н.С., Сергеев А.С.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 6. С. 133–140.
- [16] *Айзацкий Н.И.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 8. С. 1532–1537.
- [17] *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 287 с.
- [18] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [19] *Солнцев В.А., Андреевская Т.М.* // РиЭ. 1983. Т. 28. № 3. С. 561–568.
- [20] *Андреевская Т.М., Солнцев В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 1. С. 34–40.
- [21] *Кац В.А., Кузнецов С.П.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 12. С. 727–733.
- [22] *Reddy D.V.R., Sen A., Johnston G.L.* // Physica D. 2000. Vol. 144. № 3–4. P. 335–357.
- [23] *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6. № 1. С. 75–92.
- [24] *Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И.* // ДАН. 1998. Т. 358. № 5. С. 620–623.
- [25] *Нусинович Г.С.* // Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. Вып. 14. С. 848–852.
- [26] *Бляхман Л.Г., Нусинович Г.С.* // РиЭ. 1982. Т. 27. № 5. С. 996–1003.