01

Нелинейное трение как механизм генерации направленных движений

© Ю.Л. Болотин,[1] А.В. Тур,[2] В.В. Яновский[3]

[1] Институт теоретической физики Национального научного центра „Харьковский физико-технический институт“,
61108 Харьков, Украина
[2] Center D'etude Spatiale Des Rayonnements, 9, Av. du colonel Roche,
31028 Toulouse, France
[3] Институт монокристаллов НАН Украины,
61001 Харьков, Украина
e-mail: bolotin@kipt.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 16 июля 2001 г.)

Предложена простая модель возникновения направленного движения под действием флуктуационных сил с нулевым средним (ratchet). Механизмом служит нарушение симметрии в пространстве скоростей нелинейным трением. Обсуждается качественная картина возникновения направленного движения. Получены критерии его возникновения. Оценена эффективность преобразования флуктуационных, хаотических воздействий в направленное движение.

Введение

В последнее десятилетие возродился интерес к задаче выпрямления флуктуаций, т. е. получения макроскопического потока частиц без внешних смещающих сил и градиентов полей (давления, температуры, концентрации и др.) [1]. Были не только сформулированы условия, при которых соответствующие устройства могли бы функционировать, но и реализованы эксперименты по прямому наблюдению потока частиц [2–5]. Большинство устройств (моделей) подобного рода получили название храповиков, так как интерес к проблеме в значительной мере был инспирирован фейнмановским обсуждением [6] модели храповика и собачки (модель впервые использована Смолуховским [7]). Основное внимание было сосредоточено на проблеме транспорта в пространственно-периодических системах в отсутствие смещающих сил (т. е. пространственные, временны́е средние и средние по ансамблю от вынуждающих сил равны нулю). При этом приоритет отдавался системам малых масштабов (так называемый броуновский мир [8]), для которых тепловыми флуктуациями нельзя пренебречь. Если не учитывать переходные процессы, то направленный транспорт в таких системах, находящихся в контакате с единственным источником диссипации и флуктуаций — тепловым резервуаром, запрещен вторым началом термодинамики. Каковы же условия существования направленного броуновского транспорта в отсутствие смещающих сил? Этими условиями являются неравновесность флуктуаций и нарушенная отражательная симметрия. Первое условие прозрачно в контексте второго начала термодинамики, в то время как второе необходимо для выбора предпочтительного направления транспорта. Нарушив симметрию детального баланса (равновесность флуктуаций) и отражательную симметрию пространственно-периодического потенциала, мы устраняем все запретительные симметрии и тем самым (согласно принципу Кюри [9]) делаем возможным существование тока без любых макроскопических градиентов. Одна из наиболее хорошо изученных возможностей создания неравновесности — введение пространственной или временно́й зависимости температуры [10]. Соответствующие модели получили название диффузионного храповика. С точки зрения соотношения Эйнштейна при движении в потенциале с нарушенной отражательной симметрией эквивалентного результата можно добиться, введя пространственную или временну́ю зависимость коэффициента трения (friction ratchet). В работе мы исследуем другую возможность — зависимость коэффициента трения от направления движения „частицы“. Такая зависимость может быть в простейшем случае индуцирована формой частицы или ее конформациями. Такие конформационные переходы в рассматриваемой модели не связаны с наличием „программы“ переходов в частице, а индуцированы влиянием внешней среды. Мы используем в дальнейшем термин „зонтик“ для частиц, обладающих такой особенностью. Для зонтика, находящегося под действием сил с нулевым средним, можно поставить вопрос о существовании отличного от нуля тока даже в отсутствие потенциала: отражательная симметрия нарушена уже на уровне коэффициента трения. Соответствующую модель можно назвать непотенциальный храповик с трением (nonpotential friction ratchet). Исследование динамики такой модели и есть основная цель работы. В работе получены критерии возникновения направленного движения зонтика под воздействием случайных сил с нулевым средним значением. Обсуждена эффективность такого способа движения. Используя кинетическое описание, показана возможность преодоления постоянного поля сил и получены условия на амплитуду шума для такого режима.

Механизм возникновения направленного движения

Рассмотрим движения определенного объекта под воздействием случайной силы $F(t)$ в среде с трением. Статистические свойства случайной силы будем считать заданными. Основное свойство такой силы $\langle F(t)\rangle = 0$. В качестве такого объекта рассмотрим зонтик (рис. 1). Уравнение движения этого объекта под воздействием внешней случайной силы легко записать в виде

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - \alpha(\dot{x})\frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

где α — коэффициент трения, зависящий от направления движения объекта.

Причина такой зависимости очевидна из рис. 1. Остановимся более детально на этой зависимости. Простейшую модель можно получить, считая, что при движении в положительном направлении оси x зонтик закрывается и коэффициент трения будет α_1. При движении зонтика в обратном направлении он раскрывается и коэффициент трения увеличивается до значения α_2. Такую зависимость легко описать

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(\alpha_2 + \alpha_2) + \frac{1}{2}\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}. \tag{2}$$

Записывая теперь исходное уравнение в терминах скорости $\dot{x} = v$, получим

$$m\dot{v} = F(t) - \frac{1}{2}\big((\alpha_1 + \alpha_2)v + (\alpha_1 - \alpha_2)|v|\big). \tag{3}$$

Упрощение в такой модели заключается в предположении, что раскрытие и закрытие зонтика происходит мгновенно. Разумеется, это приближение разумно, если характерные времена случайной силы T и характерные времена зонтика τ, удовлетворяют неравенству $T \gg \tau$. Более детальные модели можно построить, используя непрерывные зависимости α от скорости, например,

$$\alpha_e(v) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 + \exp(\beta v)}. \tag{4}$$

Здесь β — характерный масштаб перехода между двумя значениями коэффициента трения. Собственно модель зонтика и его характеристики и определяются этой функцией. Другим примером ее может служить

$$\alpha_p(v) = \frac{1}{2}\left((\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)v}{\sqrt{\varepsilon^2 + v^2}}\right), \tag{5}$$

где ε^2 — характерный параметр перехода.

Обсудим теперь механизм возникновения направленного движения под воздействием флуктуационной случайной силы. Природа этого заключается в нарушении симметрии уравнений движения относительно замены $v \leftrightarrow -v$. Для оценки возникающей направленной скорости используем простые соображения. Усредним уравнение (3) по случайной силе. Стационарное состояние определяется равенством

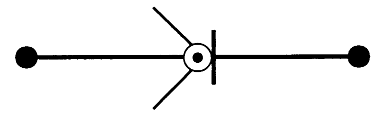

Рис. 1. Устройство объекта, состоящего из оси, двух подвижных лопастей и стопора.

$$\langle v\rangle = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\,\langle |v|\rangle. \tag{6}$$

Среднее значение от модуля скорости оценим через квадратичный момент как

$$\langle |v|\rangle \simeq \langle v^2\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Из баланса энергии в стационаре оценим парный коррелятор скорости

$$\langle vF\rangle = \frac{1}{2}\,(\alpha_1 + \alpha_2)\langle v^2\rangle.$$

Выразим теперь коррелятор в левой части через корреляционные характеристики силы. Это легко сделать, исходя из оценки

$$v \simeq \frac{1}{m}\int F(\tau)d\tau.$$

Тогда получим

$$\langle Fv\rangle = \frac{1}{m}\int \langle F(t)F(\tau)\rangle d\tau \approx \frac{1}{m}\langle F^2\rangle\tau_c.$$

Подставляя в уравнение (6), получим окончательно

$$\langle v\rangle \simeq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_2 + \alpha_1)}\left(\frac{2\tau_c\langle F^2\rangle}{m(\alpha_2 + \alpha_1)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Таким образом, возникает направленное движение под воздействием флуктуационной случайной силы со средним, равным нулю. Величина и направление скорости определяется разностью $(\alpha_2 - \alpha_1)$. Разумеется, эти простые оценки демонстрируют только возможность возникновения направленного движения, но требуют более аккуратного обоснования. Для этого перейдем к получению кинетического уравнения для функции распределения зонтика по скоростям.

Кинетическое уравнение

Для вывода кинетического уравнения используем обычное определение функции распределения

$$f(V,t) = \langle \delta\big(V - v(t)\big)\rangle.$$

Здесь $v(t)$ — решение динамического уравнения со случайной силой и усреднение осуществляется по ней. Дифференцируя $f(V,t)$ по времени и используя уравнение движения, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial V}\big(\langle F(t)\delta\big(V - v(t)\big)\rangle - \alpha(V)Vf\big) \qquad (8)$$

или в более удобной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\alpha(V)}{m}Vf\right) = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial V}\langle F(t)\delta\big(V - v(t)\big)\rangle. \quad (9)$$

Таким образом, проблема сводиться к усреднению слагаемого в правой части и выражению его через функцию распределения. Используя стандартные методы (см., например, [11–13]), легко получить замкнутое уравнение для функции распределения при гауссовой δ-коррелированной случайной силе вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\alpha(V)}{m}Vf\right) = \frac{\langle F^2\rangle\tau_c}{2m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}, \qquad (10)$$

где использовано обозначение $\int_{-\infty}^{\infty}\langle F(t)F(\tau)\rangle d\tau \equiv \equiv \langle F^2\rangle\tau_c$, имеющее очевидный физический смысл. Стационарное решение этого уравнения, соответствующее отсутствию потока в пространстве скоростей, легко получить для двухуровневой модели $\alpha(V)$ (2)

$$f(V) = C\exp\left\{-\frac{2m}{\langle F^2\rangle\tau_c}\int V\alpha(V)dV\right\}$$
$$= C\exp\left\{-\frac{mV^2}{\langle F^2\rangle\tau_c}\big(\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\Theta(V)\big)\right\}. \qquad (11)$$

Константа C определяется условием нормировки

$$C = \left(\frac{m\alpha_1\alpha_2}{\pi\langle F^2\rangle\tau_c}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_2}}.$$

Используя найденную равновесную функцию распределения, получим среднюю скорость движения зонтика в виде

$$\langle V\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Vf(V)dV = \left(\frac{\langle F^2\rangle\tau_c}{\pi m\alpha_1\alpha_2}\right)^{1/2}\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_1}}. \quad (12)$$

Значение этой скорости отличается от полученной ранее оценки (7) не только численным множителем, но и более сложной зависимостью от двух уровней трения. Оценим теперь эффективность такого способа перемещений зонтика по отношению к его средней энергии

$$\xi = \frac{\langle V\rangle^2}{\langle V^2\rangle} = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\pi(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})(\alpha_1^{3/2} + \alpha_2^{3/2})} \xrightarrow{\alpha_2\gg\alpha_1} \frac{2}{\pi}. \quad (13)$$

В определенном смысле при больших различиях $\alpha_2 \gg \alpha_1$ такой способ движения достаточно эффективен. Коэффициент полезного действия (КПД) легко определить как

$$\eta = \frac{\langle V\rangle^2}{\langle V\rangle^2 + \langle V^2\rangle} = \frac{\xi}{1+\xi} \xrightarrow{\alpha_2\gg\alpha_1} \frac{2}{\pi+2},$$

и приведенное значение соответствует максимальному КПД, достижимому при описанном способе движения.

Воздействие постоянной силы

Эффективность, возникшего направленного движения, достаточно высока. В этом можно убедиться, рассматривая движение зонтика в постоянном поле тяжести. Этот случай очень близок к способу движения медуз. Пусть постоянная сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси x. Тогда кинетическое уравнение, описывающее перемещения зонтика, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial V}\left(gf + \frac{\alpha(V)}{m}Vf\right) = \frac{\langle F^2\rangle\tau_c}{2m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}. \qquad (14)$$

Разумеется, его стационарное решение легко найти, как и в предыдущем случае

$$f(V) = C\exp\left\{-\frac{2m}{\langle F^2\rangle\tau_c}\int\big(gm + V\alpha(V)\big)dV\right\}$$
$$= C\exp\left\{-\frac{2gm^2V}{\langle F^2\rangle\tau_c} - \frac{mV^2}{\langle F^2\rangle\tau_c}\big(\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\Theta(V)\big)\right\}. \quad (15)$$

Здесь C — нормировочная постоянная. Эту постоянную определим из условия нормировки функции f

$$\frac{C}{q}(I_1 + I_2) = 1.$$

Здесь $q = 2gm^2/\langle F^2\rangle\tau_c > 0$, а I_i $(i = 1, 2)$ определены как

$$I_i = \sqrt{\pi}\beta_i e^{\beta_i^2}\,\mathrm{erfc}\big((-1)^{i+1}\beta_i\big).$$

Параметры β_i $(i = 1, 2)$ равны

$$\beta_i = \frac{m^{3/2}g}{\sqrt{\alpha_i\langle F^2\rangle\tau_c}}. \qquad (16)$$

Тогда критерий для возникновения направленного движения в положительном направлении оси x легко записать в виде

$$\langle V\rangle = \frac{-2}{q(I_1 + I_2)}\,(\beta_1^2 I_1 + \beta_2^2 I_2 + \beta_2^2 - \beta_1^2) > 0. \qquad (17)$$

Легко убедиться, что существует область параметров, в которой это условие выполняется. Это условие качественно можно понять исходя из простой физической интерпретации. Дело в том, что уравнение Ланжевена, которое используется при выводе кинетического уравнения, эквивалентно передемпфированному случаю обычного уравнения Ланжевена. В этом легко убедиться с учетом замены $V \to x$ и $m \to \alpha$. Это означает, что,

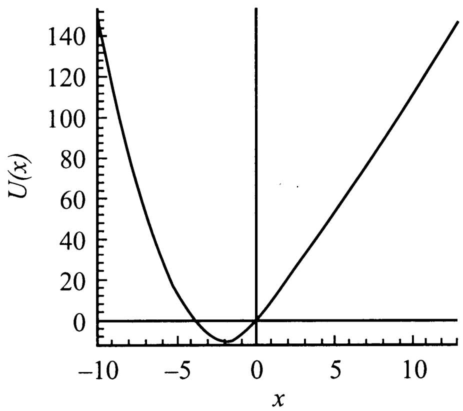

Рис. 2. Вид эффективного потенциала.

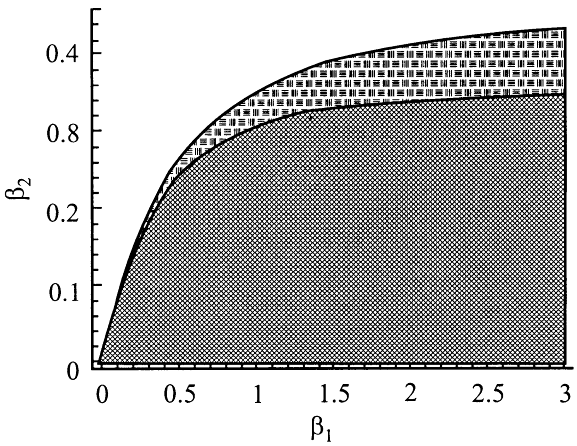

Рис. 3. Область параметров согласно грубому критерию, где реализуется подъем зонтика (заштрихованная темная зона). Более слабая штриховка определяет область выполнения точного критерия.

используя идеологию передемпфированного уравнения Ланжевена, можно описать поведение рассматриваемой системы. По сути в такой интерпретации частица совершает финитные движения в эффективном потенциале

$$U(x) = mgx + \frac{x^2}{2}\big(\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\Theta(x)\big).$$

Разумеется, глобальный минимум этого потенциала располагается в отрицательной области x (рис. 2).

Это означает, что среднее значение положений при низких уровнях энергии частицы меньше нуля. При возврате к исходным переменным ясно, что зонтик имеет среднюю скорость отрицательную и падает под воздействием силы тяжести. Однако при высоких уровнях энергии ситуация меняется. И среднее положение частицы из-за разного асимптотического поведения потенциала ($\alpha_1 < \alpha_2$) может стать положительным. Легко доказать, что если уровень энергии

$$E \geq \frac{4(mg)^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2},$$

то среднее положение положительно. Уровень энергии в передемфированном случае определяется уровнем парного коррелятора внешней случайной силы. В нашем случае это означает, что при выполнении условия

$$\frac{\langle F^2\rangle \tau_c}{2m} \geq \frac{4(mg)^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \qquad (18)$$

зонтик будет двигаться в положительном направлении против силы тяжести. Полученный критерий является достаточно грубым. Физическая причина этого в том, что не учтены различия характерных времен движения в области $x > 0$ и $x < 0$. Легко понять, что учет этих времен приведет к наступлению режима движения против силы тяжести при больших β_2, чем предсказывает неравенство (18). Именно это подтверждается точным критерием, следующим из условия (17). На рис. 3 показаны различия в точном и грубом критерии. Таким образом, эффективность такого способа движений достаточна для преодоления противодействия постоянных сил. В определенном смысле такой механизм направленного движения может наблюдаться для многих биологических объектов как микро-, так и макроразмеров. В макрослучае роль случайных сил может играть периодические силы за счет втягивания и выталкивания среды (жидкости). Такой способ используют многие жители водной среды, например медузы. Следует подчеркнуть, что при этом не требуется превышения сил на стадии выталкивания, над силами на стадии втягивания жидкости. Среднее значение этих сил по периоду может и должно быть нулевым. Молекулы с специальной асимметрией могут перемещаться в случайных внешних полях по аналогичному механиму.

Список литературы

[1] *Reimann P.* Submitted to Physics Report. Cond-mat/0010237.
[2] *Rousselet J., Salome L., Ajdari A.* et al. // Nature. 1994. Vol. 370. P. 446–448.
[3] *Faucheux L.P., Bourdieu L.S., Kaplan R.D.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74. P. 1504–1507.
[4] *Mennerat-Robillard C., Lucas D., Guibal S.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 851–854.
[5] *Белиничер В.Б., Стурман Б.И.* // УФН. 1980. Т. 130. С. 415–456.
[6] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1965. 261 с.
[7] *Smoluchowski M.* // Physik. Zeitschr. 1912. N 13. S. 1069–1083.
[8] *Magnasco M.O.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 1477–1481.
[9] *Curie P.* // J. Phys. (Paris). 1894. N 3. P. 393–406.
[10] *Reinmann P., Bartussek R., Haussler P., Hanggi P.* // Phys. Lett. 1996. Vol. A215. P. 26–29.
[11] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
[12] *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
[13] *Riskin H.* The Fokker-Planck Equation. Berlin: Springer Verlag, 1989. 472 p.