

01;05

Электромагнитное поле при ударном сжатии проводника с током

© С.Д. Гилев, Т.Ю. Михайлова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: Gilev@hydro.nsc.ru
Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия

(Поступило в Редакцию 8 ноября 2001 г.)

Решена задача о структуре электромагнитного поля при ударном сжатии проводника с током. Показано, что при ударном сжатии проводника возникает система из двух токовых волн. Одна из них распространяется в несжатом веществе со скоростью ударной волны. Другая волна обусловлена диффузией тока с поверхности вещества. По мере движения ударной волны происходит перераспределение тока из первой волны во вторую. Для большого времени наблюдения картина сводится к классической диффузии тока в проводящее полупространство. Найдены управляющие параметры класса электродинамических задач с ударными волнами и вскрыт их физический смысл как отношение времени конвекции и диффузии поля для соответствующих областей. В частных случаях полученное решение сводится к задачам о движении поверхности полупространства с током и ударной металлизации диэлектрика.

Введение

Ударное сжатие проводника с током сопровождается работой электромагнитных импульсных систем (взрывные магнитокумулятивные генераторы, МГД генераторы, токовые ключи) [1], а также ряда экспериментальных методик физики ударных волн (измерения электропроводности, намагниченности, массовой скорости) [2,3]. Исследование электродинамических процессов, сопровождающих ударное сжатие проводника, позволяет повысить эффективность действия энергетических устройств и получить новую экспериментальную информацию о состоянии вещества в экстремальных условиях.

Электромагнитная картина при ударном сжатии вещества в магнитном поле определяется конкуренцией диффузионного и конвективного механизмов изменения магнитного поля. Движение фронта сжатия сопровождается возникновением индукционных токов в проводнике. При этом генерируются своеобразные токовые волны. Структура токовых волн определяется электродинамическими условиями и характеристиками ударного сжатия. Электродинамические задачи, связанные с определением электромагнитного поля при ударном сжатии вещества известны с конца пятидесятих годов [4–7]. Важность постановки подобных задач возросла в последнее время в связи с развитием новых динамических методов диагностики состояния вещества при высоких плотностях энергии [8–17]. Особенностью методов является построение замкнутой электромагнитной модели ударного сжатия и определение с ее помощью неизвестных свойств вещества. Процедура сводится к использованию экспериментальных данных как входной информации для решения обратных краевых задач электродинамики ударного сжатия. Особое значение на этом пути имеют строгие решения прямых электродинамических задач. В квазистационарном приближении такие постановки

сводятся к уравнению диффузии с подвижными границами, что делает достаточно трудным их анализ. Поскольку одной из границ проводящей области является фронт ударной волны, важное значение имеет корректная формулировка условий на ударном фронте.

Целью настоящей работы является анализ структуры электромагнитного поля при ударном сжатии проводника с током. Такая постановка задачи является обобщением ряда известных задач. Построенное решение основывается на достаточно общем методе, который может быть полезен при решении других физических задач.

Электромагнитная модель и постановка задачи

Для рассмотрения электромагнитных процессов при ударном сжатии проводника принята следующая модель: 1) ударная волна нерелятивистская, массовая скорость вещества u мала по сравнению со скоростью света c ; 2) ударная волна стационарная, массовая u и волновая скорость D остаются постоянными за время движения волны; 3) магнитное поле достаточно мало и не влияет на движение ударной волны; 4) ширина фронта ударной волны пренебрежимо мала; 5) электропроводность металла изменяется скачком на фронте ударной волны от значения σ_1 до σ_2 ; 6) проводник является немагнитным.

Сделанные допущения разумно описывают большую группу экспериментов с ударными волнами [2,3]. Действительно, характерная скорость ударной волны в металле, генерируемой химическим взрывчатым веществом, составляет около 5 km/s, что существенно меньше скорости света. Условие стационарности ударной волны выполняется при достаточном масштабе лабораторного эксперимента. Давление ударной волны в металле при

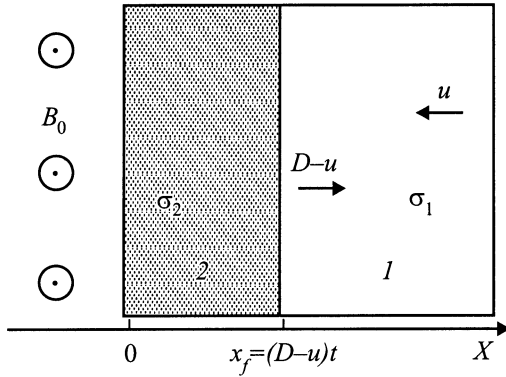


Рис. 1. Вхождение плоской ударной волны в проводящее полупространство с поверхностным током. Система отсчета связана со свободной границей полупространства. 1 — несжатое вещество. 2 — сжатое вещество. Текущее положение ударного фронта $x_f = (D - u)t$.

указанных условиях составляет более 10 GPa, что обычно существенно превышает давление магнитного поля. Ширина фронта ударной волны в металлах составляет $\sim 10 \mu\text{m}$. В [17] показано, что модель со ступенчатым характером изменения электропроводности проводника позволяет удовлетворительно описать результаты эксперимента.

Простейшей является одномерная геометрия. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ плоская ударная волна входит в проводящее полупространство, на поверхности которого протекает заданный ток. Свяжем систему координат с поверхностью полупространства (рис. 1). Индексы 1 и 2 относятся соответственно к областям несжатого и сжатого вещества. Задача состоит в нахождении магнитного поля $B(x, t)$ в полупространстве $x \geq 0$ при движении ударной волны ($t > 0$).

В квазистационарном приближении ($u \ll c$) одномерные уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома приводят к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} - u \frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} = 0, \quad (D - u)t \leq x < \infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq (D - u)t, \quad (2)$$

$$B_1(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

$$B_2(0, t) = B_0, \quad (4)$$

$$B_1((D - u)t, t) = B_2((D - u)t, t), \quad (5)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial B_1}{\partial x} + u B_1 \Big|_{x=(D-u)t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial B_2}{\partial x} \Big|_{x=(D-u)t}. \quad (6)$$

Здесь (1) и (2) — уравнения диффузии магнитного поля соответственно для несжатого и сжатого вещества. В (1) включен конвективный член, соответствующий движению вещества со скоростью u . Уравнение (3) представляет собой начальное условие, а (4) — граничное

условие. Уравнение (5), (6) выражают непрерывность магнитного и электрического полей на фронте ударной волны, что следует из граничных условий на тангенциальную компоненту соответствующих векторов [18]. Действительно, по предположению фронт ударной волны бесконечно тонкий, поэтому он не захватывает в себя тока. В формулировке непрерывности электрического поля (6) использованы дифференциальное уравнение Ампера и обобщенный закон Ома.

Система уравнений (1)–(6) определяет краевую задачу на магнитное поле $B(x, t)$. В отсутствие ударной волны задача сводится к классической диффузии поля в полупространство [1]. При ударном сжатии ситуация сложнее. Вещество за ударным фронтом находится в сжатом состоянии, размер этой области монотонно растет. Кроме того, при сжатии изменяется электропроводность вещества (предельные случаи: переходы диэлектрик-металл, металл-диэлектрик). Задача (1)–(6) имеет достаточно общий характер. Ее решение должно дать описание электромагнитной картины для различных физических ситуаций. По этой причине можно надеяться на выявление общих параметров, определяющих электродинамику ударного сжатия вещества.

Метод решения

Теория решения краевых задач уравнения теплопроводности с подвижными границами имеет свою богатую историю. Начиная с известной работы [19] и ее критики [20,21], в последующие годы были развиты специальные аналитические методы [22–27], обобщенные в [28,29]. Наибольшее распространение получили методы функции Грина, тепловых потенциалов, рядов и функциональных преобразований. В [13] предложен новый метод решения краевых задач с подвижными границами. Суть метода, который может быть назван методом расширения, состоит в преобразовании исходной области переменных (x, t) , определяемой кинематикой движения ударного фронта, в расширенную область более простой формы. Оказалось удобным использовать в качестве расширенной области квадрант $x \geq 0, t \geq 0$. Решение краевой задачи для квадранта с заданным значением при $t = 0$ может быть построено с помощью функции Грина. Неизвестная функция при $t = 0$ определяется из условия на подвижной границе. Полученное таким образом решение имеет физический смысл в исходной области значений (x, t) . После публикации [13] в литературе были обнаружены решения для линейно растущей области с заданными граничными полями методом функционального преобразования Лапласа–Карсона [22] и функции Грина [26]. Сравнение трех различных решений данной задачи с постоянными граничными полями [13,22,26] показывает преимущество метода расширения в подобных физических задачах. В дальнейшем метод расширения был использован для анализа электромагнитных явлений в двухпроводной

системе [14] и при вхождении ударной волны в полупространство [16]. Приведенное ниже решение использует опыт применения метода расширения [13,14,16].

Решение задачи

Сведем краевую задачу (1)–(6) к задаче с нулевыми начальными условиями. Для этого введем новые функции B'_1 и B'_2 ($B_1 = B_0 \cdot B'_1$, $B_2 = B_0(1 + B'_2)$) и без потери общности положим $B_0 = 1$. Тогда получим две краевые задачи на функции $B'_1(x, t)$, $B'_2(x, t)$

$$\frac{\partial B'_1}{\partial t} - u \frac{\partial B'_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial^2 B'_1}{\partial x^2} = 0, \quad (D - u)t \leq x < \infty,$$

$$B'_1(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial B'_1}{\partial x} + u B'_1 \Big|_{x=(D-u)t} = \mu(t)$$

и

$$\frac{\partial B'_2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial^2 B'_2}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq (D - u)t,$$

$$B'_2(0, t) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial B'_2}{\partial x} \Big|_{x=(D-u)t} = \mu(t),$$

связанные условиями на подвижной границе

$$B'_1((D - u)t, t) - B'_2((D - u)t, t) = 1. \quad (9)$$

Здесь $\mu(t)$ есть вспомогательная функция. Задачи (7) и (8) будем называть соответственно задачами I и II. Решение задачи I есть

$$\begin{aligned} B'_1(x', t) = & \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 t}{4} - \frac{\mu_0 \sigma_1 D x'}{2}\right) \\ & \times \left[-\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 \tau}{4} - \frac{\mu_0 \sigma_1 x'^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau \right. \\ & + h \int_0^t \mu(\tau) \exp\left(\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 \tau}{4}\right) \exp\left(hx' + \frac{h^2(t-\tau)}{\mu_0 \sigma_1}\right) \\ & \left. \times \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_1} x'}{2\sqrt{t-\tau}} + h\sqrt{\frac{t-\tau}{\mu_0 \sigma_1}}\right) d\tau \right], \quad (10) \end{aligned}$$

где $x' = x - (D - u)t$, $h = (D/2 - u)\mu_0 \sigma_1$, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erf}(x)$ — функция ошибок.

Основываясь на методе расширения, решение задачи II ищем в виде

$$\begin{aligned} B'_2(x, t) = & \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_2 x^2}{4t}\right) \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2}(D - u)\tau}{2}\right) \\ & \times \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2} x \tau}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau. \quad (11) \end{aligned}$$

С учетом (8), (9) получаем систему уравнений на функции $\mu(t)$, $f(t)$

$$\begin{aligned} & -\frac{D - u}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_2 (D - u)^2 t}{4}\right) \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2}(D - u)\tau}{2}\right) \\ & \times \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2}(D - u)\tau}{2}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi \mu_0 \sigma_2} t^{3/2}} \\ & \times \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_2 (D - u)^2 t}{4}\right) \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2}(D - u)\tau}{2}\right) \\ & \times \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2}(D - u)\tau}{2}\right) \tau \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau = \mu(t), \quad (12) \\ & \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 t}{4}\right) \left[-\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 \tau}{4}\right) d\tau \right. \\ & + h \int_0^t \mu(\tau) \exp\left(\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 \tau}{4} + \frac{h^2(t-\tau)}{\mu_0 \sigma_1}\right) \\ & \left. \times \operatorname{erfc}\left(h\sqrt{\frac{t-\tau}{\mu_0 \sigma_1}}\right) d\tau \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_2 (D - u)^2 t}{4}\right) \\ & \times \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2}(D - u)\tau}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2}(D - u)\tau}{2}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau + 1. \quad (13) \end{aligned}$$

После применения к системе(12), (13) преобразования Лапласа и исключения лапласовского образа функции $\mu(t)$ можно получить уравнение

$$\begin{aligned} & -\frac{u}{D - u} \frac{F_1(p)}{p} + F_2(p) + \sqrt{s} \frac{\sqrt{p^2 + k^2} - p}{p} F_1(p) \\ & + \sqrt{s} F_1(p) = \frac{2u - D}{D - u} \frac{1}{p^2 - 1} - \frac{\sqrt{p^2 + k^2} - p}{p^2 - 1} \sqrt{s} \\ & - \frac{p}{p^2 - 1} \sqrt{s}. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения для лапласовских образов: $F_1(p) = L[f(t) \operatorname{sh} t]$, $F_2(p) = L[f(t) \operatorname{ch} t]$ и приняты обозначения

$$s = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad k^2 = \frac{D^2}{(D - u)^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа над (14), приходим к интегродифференциальному уравнению на

функцию $f(t)$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [f(t)(\text{ch } t + \sqrt{s} \text{ sh } t)] - \frac{u}{D-u} f(t) \text{ sh } t \\ & + \sqrt{s} k \int_0^t f(\tau) \text{ sh } \tau \frac{J_1(k(t-\tau))}{t-\tau} d\tau = \frac{2u-D}{D-u} \text{ ch } t \\ & - \sqrt{s} \text{ sh } t - \sqrt{s} k \int_0^t \text{ ch } \tau \frac{J_1(k(t-\tau))}{t-\tau} d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

при $f(0) = -\sqrt{s}$.

Если функция $f(t)$ найдена, то магнитное поле в сжатом веществе $B_2(x, t)$ есть

$$\begin{aligned} B_2(x, t) = & B_0 + B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{R_2 \varphi^2}{4}\right) \\ & \times \int_0^\infty f(\sqrt{R_2} \tau) \text{ sh}(\sqrt{R_2} \varphi \tau) \exp(-\tau^2) d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\varphi = \frac{x}{(D-u)t}, \quad R_2 = \mu_0 \sigma_2 (D-u)^2 t.$$

Полагая, что магнитное поле на подвижной границе найдено из (16), можно сформулировать задачу для несжатого вещества. Она включает в себя уравнения (1), (3) и (5), где в последнем предполагается, что поле на границе уже известно.

Результат для магнитного поля в несжатом веществе имеет вид

$$\begin{aligned} B_1(\xi, t) = & B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{R_2}{4}\right) \exp(-\sqrt{R_1} \xi) \int_0^\infty f(\sqrt{R_2} \tau) \\ & \times \text{sh}(\sqrt{R_2} \tau) \exp(-(\tau + \xi)^2) G(\xi, t, \tau) d\tau \\ & + \frac{B_0}{2} \exp(-2\sqrt{R_1} \xi) \text{erfc}\left(\xi - \frac{\sqrt{R_1}}{2}\right) \\ & + \frac{B_0}{2} \text{erfc}\left(\xi + \frac{\sqrt{R_1}}{2}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} G(\xi, t, \tau) = & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\left(\Theta - \frac{\xi \tau}{\Theta}\right)^2\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{(R_1 - R_2) \xi^2}{4(\xi^2 + \Theta^2)}\right) d\Theta \end{aligned}$$

и

$$\xi = \frac{x'}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_1}{t}}, \quad R_1 = \mu_0 \sigma_1 D^2 t. \quad (18)$$

Формулы (16)–(18) вместе с уравнением (15) на функцию $f(t)$ дают решение поставленной задачи (1)–(6).

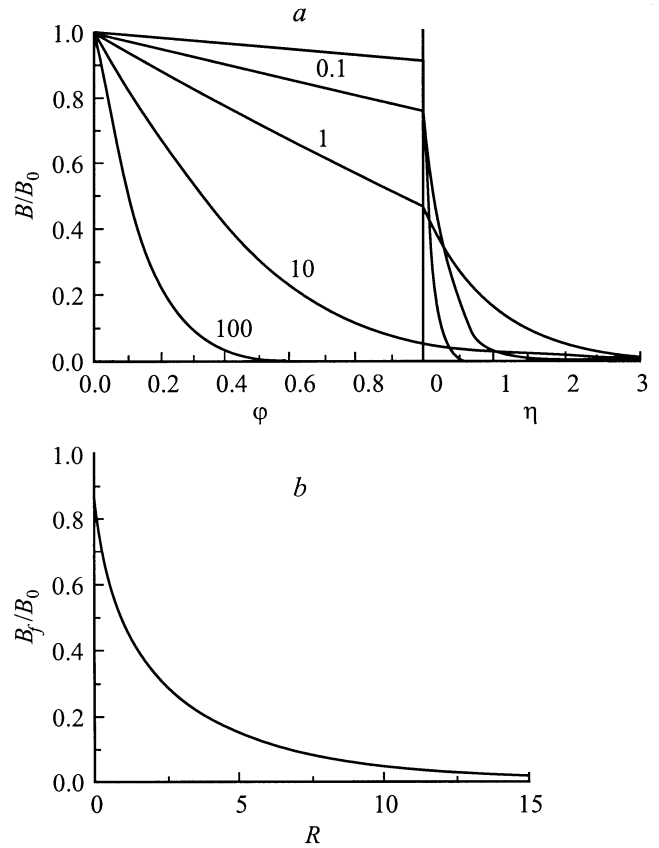


Рис. 2. Магнитное поле при вхождении ударной волны в проводящее полупространство ($u/D = 0.5$, $s = 4$, $R_1 = R_2 = R$). *a* — распределение магнитного поля в проводнике: сжатое вещество ($0 \leq \varphi \leq 1$, цифры у кривых — значения R), несжатое вещество ($\eta \geq 0$); положение фронта ударной волны соответствует $\varphi = 1$ и $\eta = 0$; *b* — зависимость магнитного поля на фронте ударной волны от параметра R .

На рис. 2, *a* показаны распределения магнитного поля, найденные для $R_1 = R_2 = R$ и $u/D = 0.5$. Для несжатого вещества использована пространственная переменная $\eta = \mu_0 \sigma_1 D x'$. На рис. 2, *b* показана зависимость магнитного поля на фронте ударной волны от параметра R . Величина поля дает наглядное представление о соотношении токов в сжатом и несжатом веществе.

При малом времени движения ударной волны ($R \ll 1$) толщина сжатого вещества мала и магнитное поле на ударном фронте слабо отличается от поля на поверхности. При этом практически весь ток протекает в несжатой области перед ударным фронтом. По мере движения ударной волны толщина сжатого вещества растет, а магнитное поле на ударном фронте уменьшается. Ток перераспределяется из несжатого вещества в сжатое. Для большого времени ($R \gg 1$) поле на фронте стремится к нулю, а ток занимает лишь часть сжатой области.

Данную картину можно трактовать как перераспределение тока в системе двух токовых волн. Одна из них

движется по несжатому веществу со скоростью ударного фронта. Максимальная толщина этой волны соответствует условию $\eta \sim 1$. Вторая волна является волной диффузии в сжатом веществе. Ее толщина непрерывно растёт. Для малых времен ток распределяется равномерно по сжатому веществу. Для больших времен фронт ударной волны отрывается от второй токовой волны и вблизи фронта тока нет. Существенно, что величина и пространственное распределение возникающих токов сильно зависят от времени.

Наглядное представление особенностей картины электромагнитного поля дают асимптотики решения и частные случаи задачи.

Асимптотики решения

Достаточно легко могут быть найдены асимптотики полученного решения. Для этого используются свойства функции $f(t)$, вытекающие из (15)

$$f(t) = -\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} + \left(\frac{2u - D}{D - u} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) t + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = -1.$$

Для малых времен ($R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow 0$) поле в несжатом веществе

$$B_1(x', t) \approx B_0 \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{R_1}} \right) - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{\pi}} \right. \\ \times \exp \left(-\frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{4R_1} \right) + \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \exp \left(-\frac{\eta}{2} \right) \frac{\eta}{2} \\ \left. \times \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{R_1}} \right) \right], \quad (19)$$

что при $\eta \gg \sqrt{R_1}$ даёт

$$B_1(\eta, R_1) \approx B_0 \frac{2\sqrt{R_1}}{\sqrt{\pi} \eta} \exp \left(-\frac{\eta^2}{4R_1} \right),$$

т.е. поле быстро падает при удалении от ударного фронта. Поле в сжатом веществе есть

$$B_2(x, t) \approx B_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{\pi}} \varphi \right). \quad (20)$$

Из (19), (20) можно получить магнитное поле на фронте ударной волны B_f

$$B_f(t) \approx B_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{\pi}} \right).$$

Из последних двух формул следует, что поле в сжатом веществе меняется линейно по координате, а поле на фронте ударной волны довольно медленно уменьшается со временем ($\sim 1 - \alpha\sqrt{t}$, $\alpha = \text{const}$).

Для больших времен ($R_1 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty$) асимптотики имеют вид

$$B_1(\eta, R_1) \approx \frac{B_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{R_1}}{2} + \frac{\eta}{2\sqrt{R_1}} \right) \\ - \frac{B_0}{2} \exp(-\eta) \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{R_1}}{2} - \frac{\eta}{2\sqrt{R_1}} \right), \\ B_2(x, t) \approx B_0 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_2}{t}} \right) \right).$$

Нетрудно видеть, что поле в несжатом веществе $B_1(\eta, t)$ вблизи фронта ударной волны стремится к нулю. Выражение для поля в сжатом веществе $B_2(x, t)$ представляют собой решение классической задачи о диффузии поля в проводящее полупространство [1].

Частные случаи

Пусть $R_1 = R_2$, тогда $k = 0$ и функция $f(t)$ может быть найдена из (15) в явном виде

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t + \sqrt{s} \operatorname{sh} t} \\ \times \left(-\sqrt{s} q(t) + q(t) \int_0^t \frac{(\sqrt{s} - 2) \operatorname{ch} \tau - \sqrt{s} \operatorname{sh} \tau}{q(\tau)} d\tau \right), \\ q(t) = \exp \left(\frac{\sqrt{s} t}{\sqrt{s} + 1} \right) (\operatorname{ch} t + \sqrt{s} \operatorname{sh} t)^{-\frac{1}{\sqrt{s}+1}}.$$

При этом функция $G(\xi, t, \tau) = 1$, что упрощает использование формулы (17).

Пусть $\sigma_1 \rightarrow 0$, а σ_2 конечно. Тогда $R_1 \rightarrow 0$, функция $f(t)$ может быть найдена и решение задачи есть

$$B_1(x, t) = 0,$$

$$B_2(x, t) = B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\varphi^2 R_2}{4} \right) \\ \times \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}[(1 - \varphi)\sqrt{R_2} \eta]}{\operatorname{sh}(\sqrt{R_2} \eta)} \exp(-\eta^2) d\eta.$$

Эта формула была получена в [13] и даёт решение задачи о структуре магнитного поля при переходе диэлектрик-металл в ударной волне.

Пусть теперь $\sigma_2 \rightarrow 0$, а σ_1 конечно. Тогда $R_2 \rightarrow 0$ и решение задачи есть

$$B_1(\eta, R_1) = \frac{B_0}{2} \exp(-\eta) \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{R_1}} - \frac{\sqrt{R_1}}{2} \right) \\ + \frac{B_0}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{R_1}} + \frac{\sqrt{R_1}}{2} \right), \quad (21) \\ B_2(x, t) = B_0.$$

Формула (21) дает решение задачи о движении поверхности полупространства с поверхностным током. Постановка такой электродинамической задачи совпадает с известной задачей о движении в среде источника тепла [19–21]. Правильное решение тепловой задачи приведено в [21]. Отличительная особенность формулы (21) состоит в использовании переменных η , R_1 , что позволяет придать решению отчетливый физический смысл. Нетрудно видеть, что при большом времени ($t \rightarrow \infty$, $R_1 \rightarrow \infty$, $\eta/2\sqrt{R_1} \rightarrow 0$) выражение (21) сводится к

$$B_1(\eta) \approx B_0 \exp(-\eta). \quad (22)$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ распределение магнитного поля перед движущейся поверхностью становится стационарным. При этом основное изменение магнитного поля и соответствующий ток сосредоточены в слое проводника толщиной $x_* = 1/\mu_0\sigma_1 D$. При малом времени эффективная толщина токового слоя меньше x_* . Стационарное распределение магнитного поля (22) формируется при $R_1 \approx 10$.

Таким образом, найденное решение (16)–(18) обладает достаточной общностью и позволяет в частных случаях получить решения известных задач [13,19–21].

Физический смысл управляющих параметров

Полученное решение определяется параметрами R_1 , R_2 . Параметр R_1 можно представить в виде отношения двух времен $R_1 = t/\mu_0\sigma_1 x_*^2$. Время t характеризует конвективное движение. Величина $\mu_0\sigma_1 x_*^2$ представляет собой время электромагнитной релаксации в проводящем слое толщиной x_* . Толщина x_* и соответствующее ей время релаксации являются характерными параметрами для класса электродинамических задач с подвижной границей. При движении ударной волны в безграничном проводнике с полем ток сосредоточен перед фронтом волны в слое толщиной x_* [6,7]. При вхождении ударной волны в проводник размер x_* представляет собой предельную толщину токового слоя [16]. При движении поверхности полупространства размер токовой зоны при $t \rightarrow \infty$ составляет также x_* (формула (22)).

Пусть магнитное поле на ударном фронте поддерживается постоянным. Тогда при $R_1 \ll 1$ распределение магнитного поля в несжатом веществе нестационарно. Если $R_1 \gg 1$, то это распределение стационарно в системе отсчета фронта ударной волны. Стационарное распределение формируется за время $t_1 \approx 10\mu_0\sigma_1 x_*^2 \approx 10/\mu_0\sigma_1 D^2$. Если магнитное поле на фронте ударной волны меняется, то требуется время около t_1 , чтобы распределение магнитного поля „подстроилось“ под это изменение.

Параметр R_2 можно представить в виде $R_2 = \mu_0\sigma_1 x_c^2/t$. Числитель этого отношения представляет собой время диффузии в сжатом веществе $x_c = (D - u)t$, а знаменатель — время конвективного движения. Таким образом,

параметр R_2 также представляет собой отношение двух времен, диффузионного и конвективного. Если $R_2 \ll 1$, то в сжатом веществе преобладает диффузия, пространственное распределение магнитного поля близко к равновесному. Если $R_2 \gg 1$, то влияние диффузии существенно лишь в области, примыкающей к свободной границе полупространства, а вблизи ударного фронта токов нет. Условие отрыва фронта ударной волны от волны диффузии $R_2 \gg 1$ дает оценку соответствующего времени $t_2 \approx 10/\mu_0\sigma_2(D - u)^2$. За это время в рассмотренной задаче магнитное поле на ударном фронте существенно падает.

Для сплошного металла без фазовых переходов времена t_1 и t_2 одного порядка. В ударно-волновом эксперименте [2,3] характерное время t_1 составляет ≈ 10 ns для меди, ≈ 300 ns для константана. Можно выделить две области времени. Для малого времени ($t < t_1$, $t < t_2$) распределение магнитного поля неравновесно в несжатом веществе, но равновесно в сжатом. Для большого времени ($t > t_1$, $t > t_2$) ситуация обратная. В последнем случае для рассмотренной задачи магнитное поле на фронте ударной волны близко к нулю и весь ток протекает в сжатой области.

Значение введенных параметров R_1 , R_2 состоит в том, что они имеют ясный физический смысл и позволяют представить решение нестационарной задачи в более простом виде. В силу своей общности параметры R_1 , R_2 характеризуют решение целого класса электродинамических задач с ударными волнами. Параметр R_2 возникал в задаче с одной проводящей областью [13], оба параметра присутствовали в задаче с двумя областями [16]. Решение конкретных электродинамических задач зависит от начальных и граничных условий. Вместе с тем в таких задачах имеются общие управляющие параметры и задаваемые ими характерные времена.

Отметим, что изложенный подход может быть распространен на процессы теплопередачи и молекулярной диффузии, где часто встречаются задачи с подвижной границей. В этих случаях можно также определить толщину скин-слоя (теплого или молекулярного) и соответствующее время диффузии. В определении управляющих параметров R_1 , R_2 вместо электропроводности тогда достаточно использовать соответствующий диссипативный коэффициент. В общем случае параметры R_1 и R_2 можно записать в виде $R_1 = V_1^2 t/\chi_1$, $R_2 = (V_1 - V_2)^2 t/\chi_2$ (V_1, V_2 — скорости передней и задней границ; χ_i — коэффициент диффузии для соответствующей области). При этом смысл параметров R_1 , R_2 остается неизменным (отношение времен конвекции и диффузии). Использование выявленных параметров в задачах с подвижной границей позволяет упростить решения нестационарных задач уравнения теплопроводности и придать им более четкий физический смысл.

Заключение

Применение метода расширения рабочей области позволяет получить решение достаточно общей задачи об электромагнитном поле при ударном сжатии проводника с током. Частными случаями данного анализа являются задачи о движении поверхности полупространства [19–21], ударного перехода диэлектрик–металл [13], классической диффузии тока в полупространство. Важность анализа состоит в выявлении общих параметров и характерных времен класса электродинамических задач с ударными волнами. Это существенно для создания новых экспериментальных методов исследования состояния вещества в области высоких плотностей энергии и в высокоэнергетических электромагнитных системах. Изложенный подход может быть полезен для анализа тепловых и других диффузионных проблем с подвижной границей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 99-02-16807).

Список литературы

- [1] Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
- [2] Альтиулер Л.В. // УФН. 1965. Т. 85. Вып. 2. С. 197–258.
- [3] Физика высоких плотностей энергий / Под ред. П. Калди-рола, Г. Кнопфеля. М.: Мир, 1974.
- [4] Marshall W. // Proc. Roy. Soc. 1955. Vol. 233A. P. 367–376.
- [5] Sen H. // Phys. Rev. 1956. Vol. 102. P. 5–11.
- [6] Бюргерс Ж.М. // Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума). М.: Атомиздат, 1958.
- [7] Забабахин Е.И., Нечаев М.Н. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 2 (8). С. 442–450.
- [8] Fritz J.N., Morgan J.A. // Rev. Sci. Instrum. 1973. Vol. 44. N 2. P. 215–221.
- [9] Жугин Ю.Н., Крутников К.К. // ПМТФ. 1983. Т. 20. № 1. С. 102–108.
- [10] Пай В.В., Яковлев И.В., Кузьмин Г.Е. // ФГВ. 1996. № 2. С. 124–129.
- [11] Жугин Ю.Н., Левакова Ю.Л. // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 6. С. 199–209.
- [12] Пай В.В., Лукьянов Я.Л., Яковлев И.В., Кузьмин Г.Е. // ФГВ. 2000. Т. 36. № 6. С. 164–170.
- [13] Гилев С.Д., Михайлова Т.Ю. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 5. С. 1–9.
- [14] Гилев С.Д., Михайлова Т.Ю. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 109–117.
- [15] Гилев С.Д. // ФГВ. 1995. Т. 31. № 4. С. 109–116.
- [16] Гилев С.Д., Михайлова Т.Ю. // ФГВ. 2000. Т. 36. № 6. С. 153–163.
- [17] Гилев С.Д. // ФГВ. 2001. Т. 37. № 2. С. 121–127.
- [18] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
- [19] Шевельков В.Л. // ЖТФ. 1946. Т. 16. Вып. 2. С. 207–214.
- [20] Любов Б.Я. // ЖТФ. 1948. Т. 18. Вып. 5. С. 713–715.
- [21] Гринберг Г.А. // ЖТФ. 1951. Т. 21. Вып. 3. С. 382–384.
- [22] Любов Б.Я. // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57. № 6. С. 551–554.

- [23] Редозубов Д.В. // ЖТФ. 1960. Т. 30. Вып. 6. С. 606–610.
- [24] Квальвассер В.И., Рутнер Я.Ф. // ДАН СССР. 1964. Т. 156. № 6. С. 1273–1276.
- [25] Карташов Э.М., Бартнев Г.М. // Изв. вузов. Физика. 1969. № 2. С. 70–82.
- [26] Карташов Э.М., Бартнев Г.М. // Изв. вузов. Физика. 1969. № 3 (82). С. 20–27.
- [27] Карташов Э.М., Бартнев Г.М. // Изв. вузов. Физика. 1970. № 12. С. 97–101.
- [28] Карташов Э.М., Любов Б.Я. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1974. № 6. С. 83–111.
- [29] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.