

Сопоставление информации Шеннона, информации Тсаллиса и функции числа состояний системы при диагностике регулярных и хаотических режимов движения

© А.Л. Тукмаков

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН,
42011 Казань, Россия
e-mail: tukmakov@mail.knc.ru

(Поступило в Редакцию 30 октября 2001 г.)

На примере решения системы уравнений Лоренца сопоставляются особенности диагностики ламинарных и турбулентных фаз движения при помощи информации Шеннона и информации Тсаллиса. Предлагается метод анализа типа динамического поведения, основанный на построении функции числа состояний системы.

Информация Шеннона используется для классификации типа динамического поведения нелинейной системы и позволяет различать ламинарные и турбулентные фазы движения [1]

$$I_S = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i. \quad (1)$$

Здесь N — число состояний системы, p_i — вероятность реализации i -состояния. Для того чтобы применить (1) к анализу временной реализации сигнала, необходимо тем или иным способом определить пространство состояний динамической системы и найти вероятности этих состояний. Для получения зависящей от времени функции информации обычно используется принцип оконного выделения [2]: на временной оси выбирается интервал ΔT и информация (1), найденная для данного интервала, отождествляется с моментом времени, соответствующим середине или правой границе временного окна. Далее окно смещается вдоль временной оси, что позволяет построить зависимость информации от времени. Пространство состояний можно ввести, например, с помощью покрытия аттрактора в фазовом пространстве сеткой с заданным разбиением (рис. 1). Попадание точки аттрактора в ячейку (j, k) в этом случае отождествляется с состоянием системы, имеющим номер $(k-1)J + j$. В пределах текущего временного окна определяется общее число различных состояний системы N , составляющих полную систему событий, находятся вероятности их реализации p_i , где $i = (1, N)$, вычисляется значение информации в момент времени $t = \Delta T/2$. Затем временное окно сдвигается на $\Delta \tau$ и определяется значение информации в момент времени $t = \Delta T/2 + \Delta \tau$ и т.д. Обобщением информации Шеннона является информация Тсаллиса [2]

$$I_T = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^N (p_i)^q - 1 \right), \quad (2)$$

обладающая по сравнению с информацией Шеннона рядом дополнительных свойств. Как показано в [3],

в пределе при стремлении числового параметра q к единице, $I_T \rightarrow I_S$. Сопоставление свойств информации Шеннона и Тсаллиса при диагностировании ламинарных и турбулентных фаз проведем на примере анализа решения системы уравнений Лоренца (3) при следующих значениях управляющих параметров: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 170.5$. В этом случае параметр надкритичности $r - r^v = 170.5 - 166.07 = 4.43$,

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - xz - y, \quad \dot{z} = xy - bz. \quad (3)$$

Система (3) решалась численно. Значения функций x , y , z в момент времени t^{n+1} записывались в виде отрезка ряда Тейлора в окрестности значений в момент времени t^n . Производные высших порядков выражались через производные первого порядка, что позволяло осуществить переход на $(n+1)$ временной слой. Использовались 4 первых члена ряда Тейлора, метод имел 4-й порядок точности. В приведенных расчетах временной шаг составлял $\Delta t = 0.0001$.

На рис. 2,а приводится временная реализация x -составляющей решения, полученного при $x(0) = 0$,

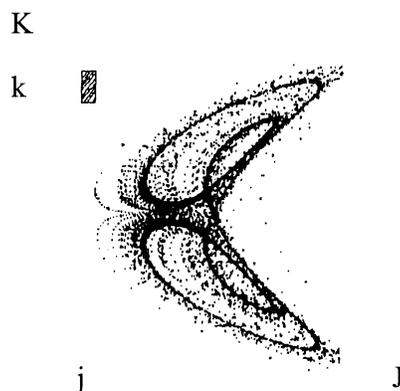


Рис. 1. Введение пространства состояний динамической системы с помощью покрытия сеткой области фазового пространства, занятой аттрактором. J, K — число ячеек сетки в x - и y -направлениях.

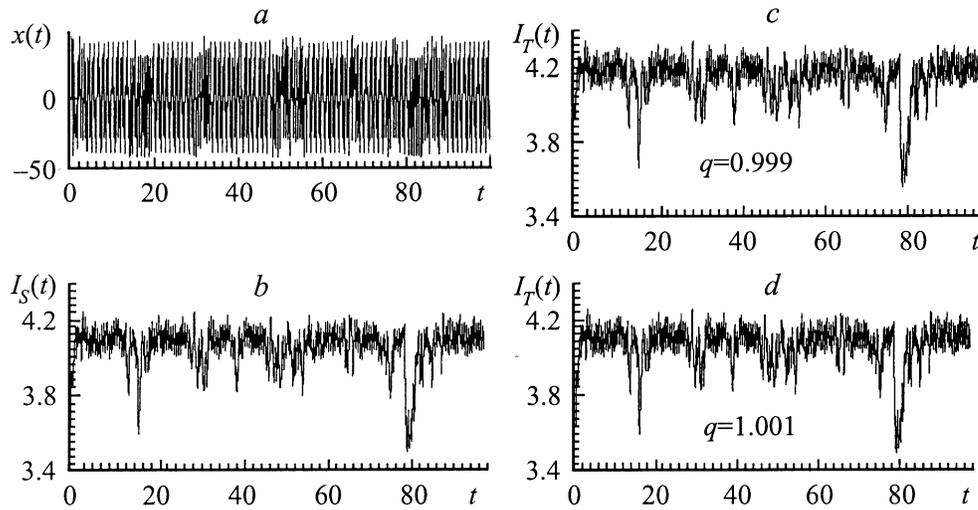


Рис. 2. *a* — временная реализация $x(t)$, построенная по 10^4 точкам; *b* — информация Шеннона; *c, d* — информация Тсаллиса при $q = 0.999$ и 1.001 . Пространство состояний вводилось на плоскости $x(t) - y(t)$ путем наложения на область, занятую аттрактором, сетки с $J = 30$, $K = 30$. Временное окно содержало 100 точек.

$y(0) = 0.01$, $z(0) = 0$, содержащая перемежающиеся ламинарные и турбулентные фазы движения. На рис. 2, *b–d* приведена информация Шеннона и информация Тсаллиса при значениях параметра q , близких к единице. Как видно, ламинарным фазам временного процесса соответствуют осцилляции функции информации относительно мало меняющегося среднего значения. Турбулентные фазы сопровождаются колебаниями функции информации с амплитудами, значительно превосходящими шумовую составляющую. При $q \approx 1$ информации Шеннона и Тсаллиса близки (*2, b–d*). Рост значения q приводит к изменению отношения сигнал–шум для информации Тсаллиса (рис. 3, *a, b*).

Эффект подавления шумовой составляющей связан с тем, что шум в текущем временном окне имеет вид ряда состояний со сравнительно малыми относительными частотами появления. При возведении в степень $q > 1$ вес состояний с малой относительной частотой появления уменьшается по сравнению с состояниями, имеющими большую относительную частоту появления и соответствующими сигналу. При $q = 0$ информация Тсаллиса $I_T(t) = N(t) - 1$, где $N(t)$ — число состояний системы в момент времени t . Таким образом, число состояний системы при возникновении турбулентных фаз движения резко изменяется по сравнению с числом состояний, реализующихся при ламинарном движении (рис. 4). Дальнейшее уменьшение параметра q в области отрицательных значений не приводит к качественному изменению поведения $I_T(t)$ при смене ламинарных и турбулентных фаз. Уменьшению q соответствует рост уровня сигнала, сопровождающийся ростом уровня шума (рис. 5). Повышение интенсивности шума при $q < 1$ связано с увеличением веса состояний, имеющих малые относительные частоты.

Турбулентные и ламинарные фазы движения различаются числом состояний, в которых может находиться система. По этой причине для анализа типа динамического поведения можно использовать текущее число состояний динамической системы. Будем подсчитывать число состояний системы по следующему правилу: в текущий момент времени число состояний системы S увеличивается на единицу, если оно встречается впервые. В зависимости от глубины анализа под состоянием может по-

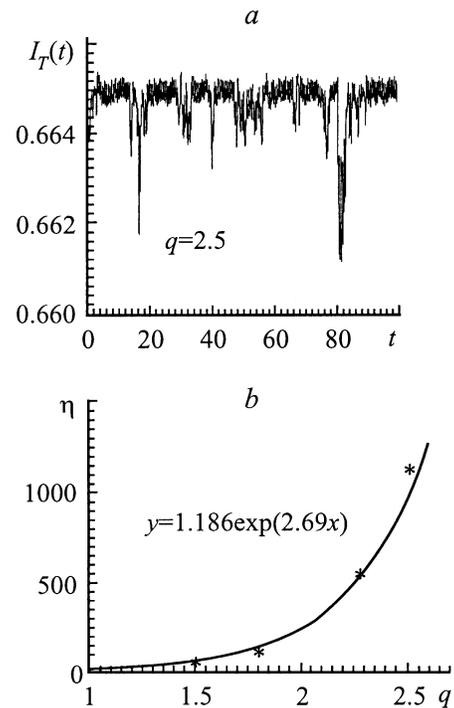


Рис. 3.

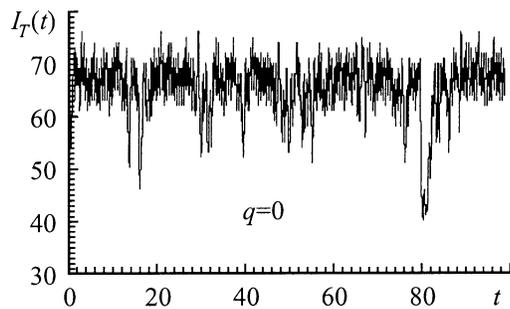


Рис. 4.

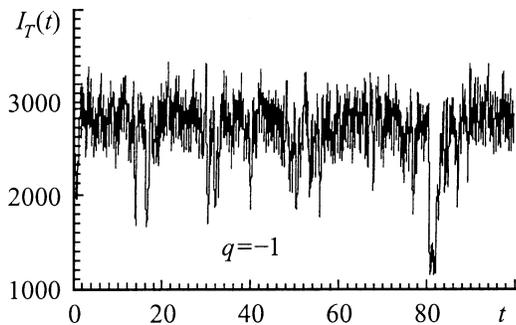


Рис. 5.

ниматься состояние в текущий момент времени $S(t^n)$ либо совокупность состояний $(S(t^n), S(t^{n-1}), \dots, S(t^{n-k}))$.

Начальный этап роста функции $S(t)$ (рис. 6, *a*) связан с накоплением числа неповторяющихся состояний системы. С течением времени наблюдается насыщение функции $S(t^n)$: пространство ее состояний исчерпывается достаточно быстро. При усложнении понятия „состояния“ процесс насыщения происходит более медленно (кривые 2, 3 на рис. 6, *a*). Ламинарным окнам функции $y(t)$ (рис. 6, *c*) соответствуют горизонтальные участки функции S . В областях турбулентности функция S нарастает, что связано с появлением новых состояний динамического процесса. Нужно отметить, что в рамках данного подхода состояние турбулентного всплеска, отмеченное в предыдущие моменты времени, в последующие моменты времени будет восприниматься как ламинарное, что и приводит к „насыщению“ функции $S(T)$ и к необходимости анализа следующего по глубине вложения понятия „состояния“ системы.

Избежать процесса „насыщения“ функции $S(t)$ можно с помощью ограничения множества анализируемых состояний. Введем временное окно шириной ΔT . Для построения функции числа состояний $S(t^n)$ будем анализировать состояния, которые были реализованы в пределах временного окна в интервале $t^n - \Delta T < t < t^n$. Информация о состояниях при $t < t^n - \Delta T$ отсутствует, функция $S(t^n)$ увеличивается на единицу, если состояние, соответствующее моменту времени t^n , в пределах

текущего временного окна (при $t^n - \Delta T < t < t^n$) не встречалось. На рис. 6, *b* представлены результаты анализа ламинарных и турбулентных фаз y -составляющей системы Лоренца на основе подсчета числа состояний системы, реализующихся в смещающемся вдоль временной оси окне шириной $\Delta T = 3$. Сопоставление кривых 1 и 2 на рис. 6, *b*, с кривой $y(t)$ на рис. 6, *c* указывает на отсутствие „насыщения“ оконной функции $S(t^n)$, что позволяет более точно диагностировать турбулентные фазы движения. Можно предположить, что выбор ширины окна ΔT определяется временем установления ламинарного режима: окно должно включать в себя хотя бы один период ламинарного движения.

Таким образом, изменение параметра q позволяет задавать отношение сигнал-шум зависящей от времени функции информации Тсаллиса. Анализ числа состояний системы при помощи информации Тсаллиса при $q = 0$ показал, что ламинарные и турбулентные движения отличаются числом состояний. Полученный результат поз-

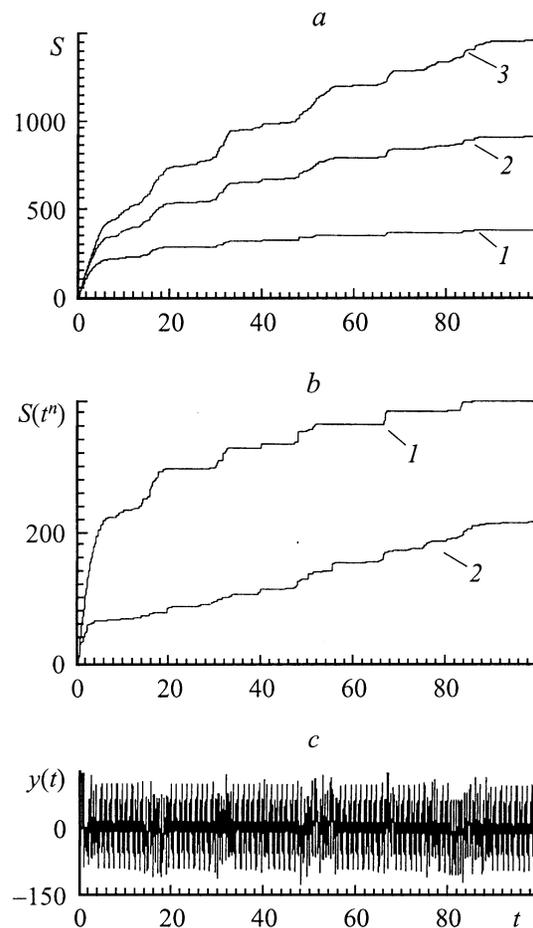


Рис. 6. *a* — число состояний динамической системы при различной глубине анализа: 1 — $S = S(t^n)$; 2 — $S = S(t^n, t^{n-1})$; 3 — $S = S(t^n, t^{n-1}, t^{n-2})$; *b* — сопоставление числа состояний $S(t^n)$ при использовании временного окна (2) и без временного окна (1); *c* — зависимость y -составляющей системы Лоренца от времени.

волил сформулировать эффективный метод диагностики ламинарных и турбулентных режимов, отличающийся предельной простотой реализации и основанный на подсчете числа состояний системы в пределах текущего временного окна.

Список литературы

- [1] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [2] *Capurro A., Diambra L., Lorenzo D.* et al. // *Physica A.* 1999. Vol. 265. P. 235.
- [3] *Sumiyoshi Abe* // *Phys. Lett. A.* 2000. Vol. 271. P. 74.