05;12

Скин-эффект в массивных проводниках электроимпульсных установок I. Электромагнитное поле массивных проводников

© Б.Э. Фридман

Институт проблем электрофизики РАН,
191186 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: fridman@mail.infostar.ru

(Поступило в Редакцию 27 июня 2001 г. В окончательной редакции 21 февраля 2002 г.)

Рассматривается диффузия импульсного электромагнитного поля в массивные проводящие тела с произвольной гладкой поверхностью при условии малой глубины проникновения поля. Методами пограничного слоя построено асимптотическое решение для электромагнитного поля, определены поправки первого и второго приближения к предельному решению, соответствующему распределению поля при бесконечно большой проводимости проводников. Установлены временные зависимости функций первого и второго приближений напряженности электрического поля на поверхности проводников.

Введение

Неотъемлемой частью устройств, генерирующих или использующих большие импульсные токи, являются массивные проводники, по которым проходят токи в единицы и десятки мегаампер [1]. Режим работы этих проводников характеризуется тем, что глубина проникновения импульсного магнитного поля в металл мала по сравнению с характерными размерами проводников, т. е. в них имеет место так называемый „резкий“ скин-эффект.

Изучению скин-эффекта в массивных проводящих телах посвящено значительное количество работ. Для случая „резкого“ скин-эффекта при расчете внешнего квазистационарного переменного электромагнитного поля обычно используются приближенные методы расчета, основанные на одном из двух вариантов приближенных граничных условий. В первом варианте проводимость проводника считается бесконечно большой; при этом касательная составляющая электрического вектора и нормальная составляющая магнитного вектора на поверхности проводника равны нулю. Второй вариант — это использование импедансных граничных условий (граничных условий Леонтовича), которые соответствуют предположению, что локально электромагнитная волна проникает в толщу металла так же, как проникает плоская волна в проводящее полупространство [2]. При этом оказывается, что в случае неферромагнитных металлов внешнее поле незначительно отличается от поля, полученного при граничных условиях бесконечно большой проводимости. Это в свою очередь позволяет рассчитывать системы с массивными проводниками с помощью двух последовательных приближений [3]. В первом приближении находится распределение внешнего магнитного поля и линейной плотности тока в проводниках при граничных условиях идеальной проводимости. Для второго приближения принимается, что локальное распределение поля и тока у поверхности металла соответствует проникновению одномерного поля в проводящее полупространство, т. е. используются условия Леонтовича.

Возможен численный расчет поля с непосредственным использованием импедансных граничных условий. При этом используется метод граничных элементов [4,5], при котором поле во внешней области описывается интегральными уравнениями, учитывающими граничные условия.

Относительно общий подход к расчету переменного и импульсного электромагнитного поля в проводящих телах использован в [6–9]. В [6] определяется поле в локальной системе криволинейных координат, построенной на поверхности проводящей оболочки произвольной геометрической формы. Целью расчетов является определение поля, проникшего внутрь оболочки. Поэтому там не рассматривался случай возбуждения поля током от внешних источников, подключенным к проводящим телам.

Для задач расчета поля при резко выраженном поверхностном эффекте естественным является решение методом пограничного слоя. Такой подход был реализован еще в 1940 г. с целью определения распределения поля и расчета нагрева вихревыми токами проводника [7]. Метод пограничного слоя был также применен для нахождения граничных условий на поверхности проводников, которые использовались в интегральных уравнениях метода граничных элементов [8,9].

Несмотря на опубликованные ранее работы, задача вывода общих соотношений для поля, возбуждаемого током в массивных проводниках, является актуальной. Эта задача может быть разрешена в характерном для источников и приемников больших импульсных токах случае резко выраженного поверхностного эффекта, когда электромагнитное поле распространяется в тонком слое металла у поверхности проводников. При этом появляется возможность задать в поверхностном слое металла локальные криволинейные координаты, которые в свою очередь позволяют установить асимптотические зависимости между векторами электромагнитного поля на поверхности проводников с различными геометрическим формами. Целью настоящей работы является вывод и обоснование таких зависимостей.

Основные соотношения

Рассмотрим систему массивных проводников, по которым протекает импульсный ток $I(t)$. Электромагнитное поле в проводниках (в области Ω_i) и окружающих их пространстве (в области Ω_e) описывается следующим уравнением для вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$\Delta\mathbf{B} = \alpha\mu_0\gamma\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\alpha = 0$ вне металла и $\alpha = 1$ в металле, γ — проводимость металла, t — время, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$.

В случае резкого скин-эффекта можно разделить вектор магнитной индукции на две составляющие

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_S, \tag{2}$$

где $\mathbf{B}_0$ определяет электромагнитное поле при идеальном поверхностном эффекте (при $\gamma = \infty$), а $\mathbf{B}_S$ учитывает влияние на результирующее поле вихревых токов в металле.

В точках, принадлежащих поверхности проводников Γ, вектор $\mathbf{B}_0$ направлен по касательной к поверхности металла и

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{B}_0]_\Gamma = \mu_0\boldsymbol{\delta}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\delta}$ — линейная плотность тока в проводнике в предельном случае идеального поверхностного эффекта, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Γ.

Поле $\mathbf{B}_0$ определяет внешнюю индуктивность системы проводников L. Расчету электромагнитного поля при идеальном поверхностном эффекте и задаче определения индуктивности L посвящено значительное количество работ [3,10]. В настоящей работе методы такого расчета не рассматриваются. Важным для дальнейшего свойством поля $\mathbf{B}_0$ является то, что в этом поле возможно разделение времени t и пространственных переменных. При этом линейная плотность тока δ может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r})\,I(t), \tag{4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки на поверхности Γ; $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ — вектор-функция, заданная на поверхности Γ и зависящая только от геометрической конфигурации проводников; $I(t)$ — электрический ток в проводниках.

Электромагнитное поле в поверхностном слое проводника

Рассматриваем проводники с достаточно гладкой поверхностью, у которой минимальные радиусы кривизны существенно больше глубины проникновения электромагнитного поля. В поверхностном слое проводника, где вычисляется поле, векторы внутренней нормали к поверхности не пересекаются. Введем на поверхности проводника Γ координаты (x_1, x_2) по линиям кривизны. Такие координаты являются ортогональными, при этом первая и вторая квадратичные формы поверхности Γ выражаются следующим образом [11]:

$$d\mathbf{r}^2 = h_{10}^2 dx_1^2 + h_{20}^2 dx_2^2,$$

$$-d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{n} = k_1 h_{10}^2 dx_1^2 + k_2 h_{20}^2 dx_2^2,$$

где $\mathbf{r}(x_1, x_2)$ — радиус-вектор точки (x_1, x_2) на поверхности Γ, k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Γ в точке (x_1, x_2).

В слой металла, прилегающий к поверхности Γ, введем третью пространственную координату x_3 таким образом, чтобы ось x_3 совпадала бы с направлением внутренней нормали к поверхности металла. Рассматриваем в окрестности точек поверхности ортогональную координатную систему (x_1, x_2, x_3), коэффициенты Ламе которой

$$h_1 = h_{10}(1 - k_1 h_3 x_3) = h_{10}(1 - \varepsilon\chi_1 x_3),$$

$$h_2 = h_{20}(1 - k_2 h_3 x_3) = h_{20}(1 - \varepsilon\chi_2 x_3),$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{t_1}{\mu_0\gamma}},$$

где t_1 — характерное время импульсного процесса, например длительность импульса тока; $\varepsilon = h_3 k \ll 1$ — малый параметр; $K = \max\limits_{\Gamma}(|k_1|, |k_2|)$ или $K = 1/a$, где a — характерный размер проводников, не превышающий радиусы кривизны поверхности Γ; $\chi_1 = k_1/K$; $\chi_2 = k_2/K$; координаты на поверхности Γ выбраны таким образом, что координатная система (x_1, x_2, x_3) является правой.

Будем обозначать верхним индексом Γ значения векторов поля и их составляющих в точках поверхности металла. Первый нижний индекс указывает на величины, относящиеся к соответствующей координате локальной системы координат. Этот индекс принимает значения $i = 1$ или $i = 2$, если не указано другое. Второй нижний индекс компонентов поля, если он имеется, указывает на порядковый номер составляющих асимптотических разложений соответствующих функций.

Считаем, что все рассматриваемые функции (например, компоненты вектора $\mathbf{B}$ и их производные) достаточно гладкие, такие что при перемещении на расстоянии h_3 вдоль координат x_1 или x_2 любая функция $X(x_1, x_2, x_3)$ изменяется незначительно

$$\left|\frac{h_3}{h_i}\,\frac{\partial X}{\partial x_i}\right| < \varepsilon|X|.$$

Тогда справедливы следующие оценки для производных от коэффициентов Ламе h_1, h_2 и функции $X(x_1, x_2, x_3)$:

$$\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_{i'}}\right| \leqslant K h_{i0} h_{i'0}, \quad \left|\frac{\partial X}{\partial x_i}\right| \leqslant h_{i0} K |X|,$$

$$\left|h_i \frac{\partial X}{\partial x_{i'}}\right| \leqslant 2 h_{i0} h_{i'0} K |X|, \tag{5}$$

где $i, i' = 1, 2$.

Для области проводников Ω_i справедливы соотношения для компонентов оператора Лапласа $(\Delta \mathbf{B}_S)_i$ в локальной системе координат, полученные с использованием (1), (2) и неравенств (5),

$$h_3^2 (\Delta \mathbf{B}_S)_i = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_3^2}$$

$$- \varepsilon \left(\frac{\chi_1}{1 - \varepsilon \chi_1 x_3} + \frac{\chi_2}{1 - \varepsilon \chi_2 x_3} \right) \frac{\partial B_i}{\partial x_3} + \varepsilon \Phi_i = \frac{\partial B_i}{\partial \tau},$$

$$h_3^2 (\Delta \mathbf{B}_S)_3 = \varepsilon \Phi_3 = \frac{\partial B_3}{\partial \tau}, \tag{6}$$

где B_1, B_2, B_3 — компоненты вектора $\mathbf{B}_S$; $\tau = t/t_1$; для функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 справедливы оценки

$$|\Phi_i| \leqslant \left|\frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right| + \varepsilon \left[|B_i| \cdot \left(2 + |\chi_1 \chi_2 - \chi_i^2|\right) + 2|B_{3-i}| + 2|B_3| \right],$$

$$|\Phi_3| \leqslant 2 \left(\left|\frac{\partial B_1}{\partial x_3}\right| + \left|\frac{\partial B_2}{\partial x_3}\right| \right) + \varepsilon (2|B_1| + 2|B_2| + 2|B_3|).$$

Тангенциальные компоненты напряженности электрического поля на поверхности проводника $\mathbf{E}^\Gamma$ определяются в локальной системе координат на основании закона полного тока $\mathbf{E} = (\mu_0 \gamma)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B} = h_3^2 t_1^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B}$

$$E_{3-i}^\Gamma = (-1)^{3-i} \frac{h_3}{t_1} \left[\frac{\partial B_i}{\partial x_3} - \varepsilon \chi_i B_i - \frac{h_3}{h_{i0}} \frac{\partial B_3}{\partial x_i} \right]_\Gamma. \tag{7}$$

Следуя асимптотическим методам решения задач типа пограничного слоя [12], представим компоненты векторов электромагнитного поля в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$B_i = B_{i,0} + \varepsilon B_{i,1} + \varepsilon^2 B_{i,2} + \ldots, \tag{8}$$

$$E_i = E_{i,0} + \varepsilon E_{i,1} + \varepsilon^2 E_{i,2} + \ldots, \tag{9}$$

где $i = 1, 2, 3$.

Подставляя ряды (8) в (6) и сравнивая выражения с одинаковыми степенями ε, мы получим набор одномерных краевых задач (10), (11)

$$\frac{\partial^2 B_{i,0}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial B_{i,0}}{\partial \tau} = 0, \quad B_{i,0}\big|_{x_3=0} = (-1)^i \mu_0 \delta_{3-i},$$

$$B_{i,0}\big|_{x_3 \to 0} \to 0, \quad B_{i,0}\big|_{\tau=0} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial B_{i,1}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial B_{i,1}}{\partial \tau} = (\chi_1 + \chi_2) \frac{\partial B_{i,0}}{\partial x_3},$$

$$B_{i,1}\big|_{x_3=0} = B_{i,1}^\Gamma, \quad B_{i,1}\big|_{x_3 \to \infty} \to 0, \quad B_{i,1}\big|_{\tau=0} = 0. \tag{11}$$

Условия для $B_{i,0}|_{x_3=0}$ определены в (10) согласно (3). При выводе дифференциальных уравнений (11) было принято во внимание, что в первом приближении нормальная компонента индукции магнитного поля $B_{3,0} = 0$.

Подставляя (9) в (7) и приравнивая слагаемые с одинаковыми степенями ε, получим

$$E_{i,0}^\Gamma = (-1)^i \frac{h_3}{t_1} \frac{\partial B_{3-i,0}}{\partial x_3}\Big|_\Gamma, \tag{12}$$

$$E_{i,1}^\Gamma = (-1)^i \frac{h_3}{t_1} \left(\frac{\partial B_{3-i,1}}{\partial x_3}\Big|_\Gamma - \chi_{3-i} B_{3-i,0}^\Gamma \right). \tag{13}$$

Расчет диффузии электромагнитного поля в металл

Применение интегрального преобразования Фурье во времени τ к (10) приводит к двум краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых дает образ Фурье для первого приближения двух тангенциальных компонент магнитной индукции

$$\hat{B}_{i,0} = (-1)^i \mu_0 \hat{\delta}_{3-i} \exp(-\beta x_3),$$

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\omega}{2}} (1 + j) & \text{при} \quad \omega \geqslant 0, \\ \sqrt{-\dfrac{\omega}{2}} (1 - j) & \text{при} \quad \omega \leqslant 0, \end{cases} \tag{14}$$

где $\hat{B}_{i,0}$, $\hat{\delta}_i$ — образы Фурье функций $B_{i,0}$, δ_i соответственно; $j = \sqrt{-1}$.

В краевых задачах (11) граничные условия $B_{i,1}|_{x_3=0} = B_{i,1}^\Gamma$ должны определяться из условий сращивания на границе Γ, т.е. из условий равенства на границе компонент вектора индукции $\mathbf{B}$ в Ω_i и в Ω_e. Во втором приближении (для коэффициентов при ε^1 в асимптотических разложениях (8), (9)) возбуждение внешнего (в Ω_e) поля создается нормальной составляющей индукции $B_{3,1}^\Gamma$ и определяется ее значениями на границе Γ. В свою очередь граничное значение нормальной компоненты индукции поля $B_{3,1}^\Gamma$ может быть установлено из разложения по степеням ε уравнения непрерывности магнитного потока $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ для области металла Ω_i

$$\frac{\partial B_{3,1}}{\partial x_3} = -\frac{1}{K h_{10} h_{20}} \left[\frac{\partial (h_{20} B_{1,0})}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_{10} B_{2,0})}{\partial x_2} \right].$$

Отсюда с учетом (14) получаем, что образ Фурье нормальной компоненты магнитной индукции на границе

$$\hat{B}_{3,1}^\Gamma = \frac{\mu_0}{\beta K h_{10} h_{20}} \left[\frac{\partial (h_{10} \hat{\delta}_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial (h_{20} \hat{\delta}_2)}{\partial x_1} \right]. \tag{15}$$

Определим в Ω_e скалярный потенциал U_1 для векторного поля $\mathbf{B}_1$, соответствующего поправке второго приближения $\operatorname{grad} U_1 = -\mathbf{B}_1$. Потенциал U_1 может быть найден как решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в Ω_e

$$\Delta U_1 = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial n}\Big|_\Gamma = -B^\Gamma_{3,1}.$$

Значения U_1 позволяют определить тангенциальные составляющие поправки второго приближения индукции магнитного поля

$$B^\Gamma_{i,1} = -\frac{1}{h_{i0}}\frac{\partial U_1}{\partial x_i}\Big|_\Gamma. \tag{16}$$

Следует отметить, что зависимость от частоты ω функции $\beta\hat{B}^\Gamma_{3,1}$, так же как и функции $\beta\hat{B}^\Gamma_{i,1}$, определяется множителями $\hat{\delta}_i(\omega) = b_i(\mathbf{r})\hat{I}(\omega)$. Это позволяет считать, что

$$\beta\hat{B}^\Gamma_{i,1} = \mu_0 K^{-1} f_i(\mathbf{r})\hat{I}(\omega), \tag{17}$$

где $f_i(\mathbf{r})$ — функция, зависящая только от координат точки поверхности Γ; $\hat{I}(\omega)$ — образ Фурье полного тока $I(\tau)$.

Применение к (11) преобразования Фурье по времени τ сводит расчет второго приближения к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\hat{B}_{i,1}}{dx_3^2} - \beta^2\hat{B}_{i,1} = (\chi_1 + \chi_2)\frac{d\hat{B}_{i,0}}{dx_3},$$

$$\hat{B}_{i,1}\big|_{x_3=0} = \hat{B}^\Gamma_{i,1}, \quad \hat{B}_{i,1}\big|_{x_3\to\infty} \to 0.$$

$$\hat{B}_{i,1} = \hat{B}^\Gamma_{i,1}\exp(-\beta x_3) + (-1)^i\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\mu_0\hat{\delta}_{3-i}x_3\exp(-\beta x_3). \tag{18}$$

Полученное решение (18) показывает, что во втором приближении магнитная индукция внутри металла определяется влиянием неоднородности внешнего поля (первое слагаемое в (18)) и кривизной поверхности металла (второе слагаемое в (18)).

На основании (12) и (13) получим из (14) и (18) выражения для образов фурье-компонентов первого и второго приближения напряженности электрического поля на поверхности Γ

$$\hat{E}^\Gamma_{i,0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma t_1}}\beta\hat{\delta}_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma t_1}}\beta b_i\hat{I}(\omega), \tag{19}$$

$$\hat{E}^\Gamma_{i,1} = (-1)^i\sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma t_1}}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\hat{\delta}_i - \frac{1}{\mu_0}\beta\hat{B}^\Gamma_{3-i,1}\right) = (-1)^i\sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma t_1}}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}b_i - K^{-1}f_{3-i}\right)\hat{I}(\omega). \tag{20}$$

Заметим, что соотношение (19) с учетом (3) может быть записано в векторной форме

$$\mathbf{E}^\Gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma t_1}}\beta\left[\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{B}}_0\right]_\Gamma,$$

что при $\omega \geqslant 0$ соответствует граничным условиям Леонтовича.

Формула для второго приближения $E^\Gamma_{i,1}$, близкая к (20), была получена в [7]. В этой работе решение строилось в произвольных локальных ортогональных координатах на поверхности проводника, которые не привязаны к линиям кривизны. Следует отметить, что условие построения координат на поверхности Γ по линиям кривизны является обязательным, так как в противном случае при перемещении по нормали в глубину проводника ортогональность координат нарушается. В полученной в [7] формуле, аналогичной (20), вместо параметров относительной кривизны χ_1 и χ_2 даны производные по координатам поверхности от метрических коэффициентов.

В [8,9], где определялись граничные условия высоких порядков аппроксимации (ε^2 и ε^3) для расчета поля методом граничных элементов, также даны соотношения, устанавливающие связь между электрическим и магнитным векторами во втором приближении. Однако в этих формулах отсутствует составляющая, учитывающая возмущение внешнего поля в Ω_e и соответствующая второму слагаемому в круглых скобках (20). Наличие этой составляющей в соотношениях между электрическими и магнитными векторами поля на границе не позволяет применять метод граничных элементов при расчете поля вихревых токов, как это предлагается делать в [8,9].

Применяя обратное преобразование Фурье к функциям первого приближения (19), получим

$$E^\Gamma_{i,0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi\gamma t_1}}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau\frac{\delta_i(\Theta)}{\sqrt{\tau-\Theta}}d\Theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi\gamma t_1}}b_i\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau\frac{I(\Theta)}{\sqrt{(\tau-\Theta)}}d\Theta. \tag{21}$$

Так как в (20) коэффициент при $\hat{I}(\omega)$ не зависит от частоты ω, то обратное преобразование Фурье от функций второго приближения

$$E^\Gamma_{i,1} = (-1)^i\sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma t_1}}\left[\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\delta_i(\tau) - K^{-1}f_{3-i}I(\tau)\right] = (-1)^i\sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma t_1}}\left[\frac{\chi_1-\chi_2}{2}b_i - K^{-1}f_{3-i}\right]I(\tau). \tag{22}$$

Переходя к размерным физическим величинам, получим из (9), (21) и (22) выражения для тангенциальных составляющих **E** в точках поверхности проводника Г.

$$E_i^{\Gamma} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi\gamma}}\, b_i \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}}\,d\Theta + (-1)^i\left[\frac{k_1-k_2}{2\gamma}\,b_i - f_{3-i}\right] I(t) + \ldots . \qquad (23)$$

Проекция **E** на направление вектора линейной плотности тока $\delta(t)$

$$E_{-}^{\Gamma} = \frac{\delta_1 E_1^{\Gamma} + \delta_2 E_2^{\Gamma}}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi\gamma}}\, b \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}}\,d\Theta + \left[\frac{(k_2-k_1)(b_1^2-b_2^2)}{2\gamma b} + \frac{b_1 f_1 - b_2 f_2}{b}\right] I(t) + \ldots . \qquad (24)$$

Проекция **E** на направление, перпендикулярное $\delta(t)$

$$E_{\perp}^{\Gamma} = \left[\frac{(k_1-k_2)b_1 b_2}{\gamma b} - \frac{b_1 f_2 + b_2 f_1}{b}\right] I(t) + \ldots .$$

Заметим, что первое слагаемое в (23), соответствующее первому приближению в асимптотическом разложении **E**, является аналогом граничных условий Леонтовича для случая импульсного электромагнитного поля, которые в векторной форме определяются выражением

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_0^t \frac{\mathbf{B}(\Theta)\times\mathbf{n}}{\sqrt{t-\Theta}}\,d\Theta\right].$$

Последняя формула является решением интегрального уравнения Абеля [13]

$$\mathbf{B}(t)\times\mathbf{n} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma}{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mathbf{E}(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}}\,d\Theta. \qquad (25)$$

Для случая одномерного поля формула, аналогичная (25), приведена в [3] и [14]. В [14] для вывода подобного соотношения между векторами поля на границе металла использовался другой метод, основанный на применении интеграла Дюамеля к решению известной задачи о проникновении ступенчатого импульса магнитного поля в проводящее полупространство, где распределение поля по пространственной координате и времени определяется с использованием интеграла вероятностей.

Примеры расчета компонентов **E** на поверхности проводников для случаев, допускающих точное решение, представлены в Приложениях 1, 2 и 3.

Заключение

При малой глубине скин-слоя электромагнитное поле в проводниках и окружающем их диэлектрическом пространстве может быть найдено методами пограничного слоя. При этом предельное решение соответствует распределению внешнего поля в случае бесконечной проводимости проводников, а первое и последующие приближения определяются из условия сращивания решений на границе — поверхности проводников и зависят от предельного значения линейной плотности тока и геометрической формы проводников.

Первое приближение поля определяется из условий сращивания предельного внешнего поля на поверхности проводников и соответствует импедансным граничным условиям (условиям Леонтовича). Поправка второго приближения внешнего поля определяется возмущением внешнего поля, которое создается нормальной составляющей магнитной индукции второго приближения поля в металле, и может быть рассчитана как решение задачи Неймана во внешнем пространстве. Поправка второго приближения поля в металле определяется сращиванием на поверхности проводников с поправкой второго приближения внешнего поля.

В асимптотическом разложении функций напряженности электрического поля на поверхности проводников поправка первого приближения соответствует граничным условиям Леонтовича для внешнего предельного магнитного поля и зависит от времени подобно интегралу Абеля от производной электрического тока в проводниках. Вторая поправка напряженности электрического поля на поверхности проводников зависит от геометрической формы этой поверхности (главных кривизн поверхности) и от неоднородности внешнего поля. Зависимость от времени второй поправки пропорциональна функции электрического тока в проводниках.

Приложение 1

Скин-эффект в проводе круглого поперечного сечения

Распределение переменного электрического поля в круглом проводе описывается уравнением

$$\frac{d^2E}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE}{dr} - j\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\gamma}E = 0,$$

$$\left.\frac{dE}{dr}\right|_{r=R} = -j\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\delta}, \quad |E|_{r=0} < \infty, \qquad (\text{П}1.1)$$

где ω — частота переменного тока, R — радиус провода, δ — линейная плотность тока при бесконечно большой проводимости материала провода.

Решение этой задачи может быть выражено через функции Бесселя, которые в свою очередь можно представить через асимптотические разложения при условии $(\omega\mu_0\gamma)^{1/2}r \to \infty$. Таким образом, в принципе можно получить разложение E по степеням малого параметра и сравнить его с (9), (19) и (20).

Более короткий и простой путь — это искать решение задачи (П1.1) в окрестности $r = R$ в виде разложения по степеням $\varepsilon = (\omega\mu_0\gamma R^2)^{-1/2}$. Для этого произведем в (П1.1) замену переменных $r = R(1 - \varepsilon x)$

$$\frac{d^2E}{dx^2} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon x}\frac{dE}{dx} - \beta^2 E = 0,$$

$$\left.\frac{dE}{dx}\right|_{x=0} = \beta^2 A, \quad E|_{x\to\infty} \to 0, \qquad (\text{П}1.2)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\gamma}}\,\delta, \quad \beta = \sqrt{j}.$$

Заметим, что это значение β эквивалентно значениям, использованным в (14) и в других формулах основного текста, так как для случая переменного тока мы можем считать, что характерное время $t_1 = \omega^{-1}$.

Ищем решение (П1.2) в виде ряда $E = E_0 + \varepsilon E_1 + {}+\varepsilon^2 E_2 \ldots$. Подставим этот ряд в (П1.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим набор краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\frac{d^2E_0}{dx^2} - \beta^2 E_0 = 0, \quad \left.\frac{dE_0}{dx}\right|_{x=0} = \beta^2 A, \quad E_0|_{x\to\infty} \to 0,$$

$$\frac{d^2E_1}{dx^2} - \beta^2 E_1 = \frac{dE_0}{dx}, \quad \left.\frac{dE_1}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad E_1|_{x\to\infty} \to 0.$$

Отсюда следует

$$E_0^\Gamma = \beta\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\gamma}}\,\delta, \qquad (\text{П}1.3)$$

$$E_1^\Gamma = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\gamma}}\,\delta, \qquad (\text{П}1.4)$$

Формулы (П1.3) и (19) полностью совпадают. Формула (П1.4) также совпадает с (20), так как в рассматриваемом случае влияние внешнего поля на распределение тока внутри провода отсутствует ($\hat{B}^\Gamma_{i'1} = 0$) и параметры кривизны равны соответственно $\chi_1 = k_1 R = 1$ и $\chi_2 = k_2 R = 0$.

Приложение 2

Скин-эффект в шаре из проводящего материала

Рассмотрим электромагнитное поле, возбуждаемое переменным током I с частотой ω, который протекает в шаре из проводящего материала радиусом R. Шар подключен к источнику переменного тока двумя точками: на южном и северном полюсе. На границе проводящей области Γ, которая представляет собой сферу, индукция магнитного поля имеет только одну составляющую в направлении линии широты $B^\Gamma = B_q/\sin\Theta$, где $B_q = \mu_0 I/(2\pi R)$ — значение индукции на экваторе, $\Theta \in [0, \pi]$ — угловая координата широты точки.

В этом примере радиальная составляющая индукции магнитного поля на границе Γ отсутствует, поэтому распределение тока и магнитного поля внутри шара не влияет на внешнее поле в Ω_e. Отсюда получается, что в краевой задаче второго приближения (11) будут однородные граничные условия и компоненты $B_{i,1}$ в скин-слое определяются только вторым слагаемым в (18), учитывающим влияние кривизны поверхности Γ. Тогда, согласно (22), в асимптотическом разложении $\mathbf{E}^\Gamma$ составляющая второго приближения $E^\Gamma_{i,1} = 0$ и в правой части (23) и (24) вторые слагаемые также равны нулю. Цель настоящего примера подтвердить этот результат другим аналитическим методом.

Распределение B в проводящем шаре ($r \leqslant R$) описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial B}{\partial x}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial B}{\partial\Theta}\right) - k^2x^2B = 0, \qquad (\text{П}2.1)$$

где $k^2 = j\omega\mu_0\gamma R^2$, $x = r/R$.

Ищем решение задачи в виде суммы

$$B(x,\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(x)P_n(\cos\Theta), \qquad (\text{П}2.2)$$

где $P_n(\cos\Theta)$ — полиномы Лежандра.

Используя классическую технику разделения переменных, получим из (П2.1) и (П2.2) краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\Psi_n}{dx}\right) - \left[k^2x^2 - n(n+1)\right]\Psi_n = 0,$$

$$\Psi_n\big|_{x=1} = \Psi_n(1), \quad \left|\Psi_n\right|_{x=0} < \infty, \qquad (\text{П}2.3)$$

где $\Psi_n(1)$ определяется разложением B^Γ по полиномам Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(1)P_n(\cos\Theta) = \frac{B_q}{\sin\Theta}. \qquad (\text{П}2.4)$$

Решение задачи (П2.3) может быть выражено через функции Бесселя порядка $n + 1/2$, которые в свою очередь можно представить в виде асимптотических разложений при $|kx| \to 0$. Таким образом, в принципе можно получить требуемый результат.

Более короткий и простой путь — это искать решение задачи (П2.3) в окрестности $x = 1$ в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon = |k|^{-1} = (\omega\mu_0\gamma R^2)^{-1/2}$. Применяя к (П2.3) стандартную методику построения асимптотического решения типа пограничного слоя, получим

$$\Psi_n(\xi) = \Psi_n(1)\exp(-\beta\xi)\left[1 + \varepsilon\xi + 0(\varepsilon^2)\right], \qquad (\text{П}2.5)$$

где $\xi = (1-x)/\varepsilon$, $\beta = \sqrt{j}$, $\mathrm{Re}\,(B) > 0$.

Напряженность электрического поля на поверхности шара имеет только меридианную составляющую

$$E^{\Gamma} = E_{\Theta}\big|_{r=1} = \frac{1}{\mu_0 \gamma x} \frac{\partial(xB)}{\partial x}\Big|_{x=1}$$

$$= \frac{1}{\mu_0\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(1) P_n(\cos(\Theta), \qquad (\text{П}2.6)$$

где

$$\Phi_n(x) = -\frac{1}{x}\frac{d(x\Psi_n)}{dx}.$$

Функция Φ_n может быть определена в виде ряда по степеням малого параметра ε из (П3.5) при замене переменной $x = 1 - \varepsilon\xi$

$$\Phi_n(\xi) = \Psi_n(1)\exp(-\beta\xi)\varepsilon^{-1}\left[-\beta - \varepsilon\beta\xi + 0(\varepsilon^2)\right]. \quad (\text{П}2.7)$$

Первые два слагаемых в квадратных скобках (П2.7) не зависят от n. С учетом этого, подставляя (П2.7) в (П2.6), получим

$$E^{\Gamma} = -\sqrt{\frac{j\omega}{\mu_0\gamma}}\frac{B_q}{\sin\Theta} + 0(\varepsilon^2)$$

$$= \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\gamma}}\delta(\Theta) + 0(\varepsilon^2), \qquad (\text{П}2.8)$$

так как $\delta(\Theta) = \mu_0^{-1}B_q/\sin(\Theta)$ — линейная плотность тока при идеальном поверхностном эффекте. Сравнивая (П2.8) с (9), (19) и (20), получаем, что в асимптотическом разложении напряженности электрического поля на поверхности шара составляющая второго приближения $E^{\Gamma}_{i,1} = 0$.

Настоящий пример показывает, что для некоторых геометрических форм проводящих тел или их фрагментов в асимптотическом разложении напряженности электрического поля на поверхности проводника поправка второго приближения может быть равна нулю.

Приложение 3

Скин-эффект в неоднородном электромагнитном поле, возбуждаемом в проводящем полупространстве

Рассмотрим электромагнитное поле, возбуждаемое тонким одиночным проводом с переменным током I с частотой ω. Граница Γ проводящей области ($x > 0$) представляет собой плоскость $x = 0$, провод проходит параллельно этой плоскости в направлении оси z на расстоянии a от нее.

а) Точное решение. Поле в такой системе может быть описано уравнением Гельмгольца для электрической составляющей поля

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \alpha k^2 E = j\omega\mu_0 I\delta(x+a)\delta(y), \qquad (\text{П}3.1)$$

где $k^2 = j\omega\mu_0\gamma$, δ — дельта-функция, E и $\partial E/\partial x$ непрерывны в окрестности границы Γ,

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Точное решение задачи (П3.1) может быть получено с помощью косинус преобразования Фурье по y

$$\tilde{E}(x,s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} E(x,y)\cos(sy)\,dy,$$

$$E(x,y) = \int_0^{\infty} \tilde{E}(x,s)\cos(sy)\,ds,$$

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} - (s^2 + \alpha k^2)\tilde{E} = D\delta(x+a), \quad \tilde{E}\big|_{x\to\pm\infty} \to 0, \quad (\text{П}3.2)$$

где $\tilde{E}(x,s)$ — образ Фурье электрической напряженности поля, $\tilde{E}$ и $d\tilde{E}/dx$ непрерывны при $x = 0$, $D = j\omega\pi^{-1}\mu_0 I$.

Решая граничную задачу (П3.2), нетрудно установить, что

$$\tilde{E}(0,s) = \frac{D}{k^2}\exp(-sa)\left(s - \sqrt{s^2+k^2}\right)$$

$$= -\frac{D}{k}\exp(-sa)\left(1 - \frac{s}{k} + \frac{s^2}{2k^2} - \ldots\right). \quad (\text{П}3.3)$$

Выполняя обратное косинус преобразование Фурье над компонентами (П3.3), получим

$$E(0,y) = -\frac{\beta_1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma}}\frac{a}{a^2+y^2}I + \frac{1}{\pi\gamma}\frac{a^2-y^2}{(a^2+y^2)^2}I$$

$$-\frac{2a}{\pi\beta_1\sqrt{\mu_0\gamma^3}}\frac{(a^2-3y^2)}{(a^2+y^2)^3}I + \ldots, \qquad (\text{П}3.4)$$

где $\beta_1 = \sqrt{j\omega}$, $\operatorname{Re}(\beta_1) \geqslant 0$.

б) Решение методом пограничного слоя. В приближении идеального поверхностного эффекта индукция магнитного поля $\mathbf{B}_0$ в Ω_e и линейная плотность тока δ на границе Γ могут быть определены методом зеркальных отражений

$$B_0^{\Gamma} = B_0(0,y) = \frac{\mu_0 aI}{\pi(a^2+y^2)}, \quad \delta = \frac{aI}{\pi(a^2+y^2)}.$$

Определим в точках около плоской поверхности проводника Γ локальную систему координат (x_1, x_2, x_3), $x_1 = y/a$, $x_2 = z/a$, $x_3 = x/h_3$, $h_1 = h_{10} = h_2 = h_{20} = 1$, $t_1 = \omega^{-1}$, $K = a^{-1}$, $h_3 = (\omega\mu_0\gamma)^{-1/2}$, $\varepsilon = h_3 K = h_3/a$.

В первом приближении индукция магнитного поля внутри проводника $B_{1,0}$ и значения электрического вектора на поверхности $E^{\Gamma}_{2,0}$ определяются согласно (14) и (19)

$$B_{1,0} = \frac{\mu_0 I}{\pi a (1 + x_1^2)} \exp(\beta x_3),$$

$$E^{\Gamma}_{2,0} = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{\gamma}} \frac{\beta I}{(1 + x_1^2)}, \qquad (\Pi 3.5)$$

здесь $\beta = \sqrt{j}$, $\mathrm{Re}\,(\beta) \geqslant 0$.

В соответствии с (15) нормальная компонента магнитной индукции

$$B^{\Gamma}_{3,1} = -\frac{2\mu_0 I}{\pi a \beta} \cdot \frac{x_1}{(1 + x_1^2)^2} = -C \frac{y}{(a^2 + y^2)^2},$$

где $C = 2\mu_0 a^2 I/(\pi\beta)$.

Найденное значение B^{Γ}_{31} определяет граничное условие Неймана для скалярного потенциала U_1 задачи второго приближения в Ω_e

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad x \leqslant 0, \quad -\infty < y < \infty,$$

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=0} = -B^{\Gamma}_{31} = C \frac{y}{(a^2 + y^2)^2},$$

$$U_1\big|_{x \to -\infty} \to 0, \quad U_1\big|_{y \to \pm\infty} \to 0. \qquad (\Pi 3.6)$$

Для решения задачи (П3.6) примем синус преобразования Фурье по y

$$\tilde{U}(x, s) = \frac{2}{\pi C} \int\limits_0^\infty U_1(x, y) \sin(sy)\, dy,$$

$$U_1 = C \int\limits_0^\infty \tilde{U}_1(x, s) \sin(sy)\, ds.$$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_1}{dx^2} - s^2 \tilde{U}_1 = 0, \quad x \leqslant 0,$$

$$\frac{d\tilde{U}_1}{dx} = \frac{s}{2a} \exp(-sa), \quad \tilde{U}_1\big|_{x \to -\infty} \to 0.$$

Отсюда $\tilde{U}_1(x, s) = (2a)^{-1} \exp\left[s(x - a)\right]$ и

$$U_1(x, y) = \frac{C}{2a} \cdot \frac{y}{(x - a)^2 + y^2}.$$

Тогда тангенциальная составляющая второго приближения индукции внешнего поля

$$B_{y,1} = -\frac{\partial U_1}{\partial y} = -\frac{C\left[(x - a)^2 - y^2\right]}{2a\left[(x - a)^2 + y^2\right]^2}. \qquad (\Pi 3.7)$$

Выражение (П3.7) определяет граничное условие для задачи второго приближения пограничного слоя в Ω_i.

$$\frac{d^2 B_{1,1}}{dx_3^2} - \beta^2 B_{1,1} = 0, \quad x_3 \geqslant 0,$$

$$B_{1,1}\big|_{x_3=0} = B^{\Gamma}_{1,1} = -\frac{C(1 - x_1^2)}{2a^3(1 + x_1^2)^2}, \quad B_{1,1}\big|_{x_3 \to \infty} \to 0.$$

$$B_{1,1} = -\frac{\mu_0 I}{\pi \beta a} \cdot \frac{1 - x_1^2}{(1 + x_1^2)^2} \exp(-\beta x_3).$$

Отсюда в соответствии с (13)

$$E^{\Gamma}_{2,1} = \frac{I}{\pi a \gamma h_3} \frac{1 - x_1^2}{(1 + x_1^2)^2}. \qquad (\Pi 3.8)$$

Подставим (П3.5) и (П3.8) в ряд (9) и перейдем к физическим координатам (x, y, z). В результате имеем то же разложение (П3.4), ограниченное первыми двумя членами, определенными методом пограничного слоя.

Настоящий пример показывает влияние неоднородности внешнего магнитного поля на значения поправки второго приближения напряженности электрического поля на поверхности проводника.

Список литературы

[1] *Фридман Б.Э., Рутберг Ф.Г.* // ПТЭ, 2001, № 2, С. 196–203.

[2] *Тозони О.В., Маергойз И.Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1974. 352 с.

[3] *Шнеерсон Г.А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. М.: Энергоатомиздат, 1992. 413 с.

[4] *Ahmed M.R., Lavers J.D., Burke P.E.* // IEEE Trans. Magn. 1988. Vol. 24, N 1, P. 138–141.

[5] *Ishubashi K.* // IEEE Trans. Magn. 1990. Vol. 26. N 2. P. 458–461.

[6] *Аполлонский С.М.* Расчет электромагнитных экранирующих оболочек. Л.: Энергоиздат, 1982. 144 с.

[7] *Рытов С.М.* // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. Вып. 2. С. 180–190.

[8] *Yuferev S., Ida N.* IEEE Trans. Magn. 1998. Vol. 34. N 5. P. 2605–2608.

[9] *Yuferev S., Ida N.* // IEEE Trans. Magn. 1999. Vol. 35. N 3. P. 1486–1489.

[10] *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей (Справочная книга). Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.

[11] *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.

[12] *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 275 с.

[13] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. С. 249.

[14] *Михайлов В.М.* Импульсные электромагнитные поля. Харьков: Вища школа, 1979. 138 с.