

05;12

Скин-эффект в массивных проводниках электроимпульсных установок

II. Массивные проводники в электрических цепях

© Б.Э. Фридман

Институт проблем электрофизики РАН,
191186 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: fridman@mail.infostar.ru

(Поступило в Редакцию 21 февраля 2002 г.)

Установлены приближенные соотношения между током и падением напряжения на системе массивных проводников, зависящие от двух постоянных параметров: внешней индуктивности проводников L и скин-слоевого параметра S . Описаны и проиллюстрированы на осциллограммах характерные особенности напряжения на массивных проводниках. Разработаны методы измерения L и S , основанные на математической обработке осциллограмм тока и напряжения.

Введение

В [1] рассмотрено электромагнитное поле, возбуждаемое массивными проводниками с током, и при условии малой глубины скин-слоя получены асимптотические зависимости для векторов поля на поверхности проводников. Настоящая работа является продолжением [1] и рассматривает массивные проводники как элементы электрических цепей импульсных установок.

Массивные проводники являются необходимой частью устройств, генерирующих или использующих большие импульсные токи в единицы и десятки мегаампер [2]. Такие проводники работают в условиях малой глубины скин-слоя и зависимость между падением напряжения и электрическим током в проводниках, как правило, не может быть адекватно представлена с помощью набора эквивалентных индуктивностей и сопротивлений.

Известны работы, в которых рассматривались условия работы электрических цепей с массивными проводниками. Обычно для определения тока и напряжения на массивных проводниках в импульсных режимах используют преобразование Лапласа или Фурье по времени t и приближенно вычисляют операторное переходное сопротивление проводников. При этом рассматриваются конкретные геометрические формы проводников, которые, как правило, допускают математическое описание магнитного поля в металле как одномерного поля. Результат исследования в случае заданных вариантов электрических цепей определяется аналитическими методами с использованием интегралов обратного преобразования Лапласа (Фурье), что приводит к приближенным, иногда довольно громоздким формулам для тока и напряжения [3,4].

Несмотря на опубликованные ранее работы, задача вывода общих закономерностей между током и напряжением на массивных проводниках является актуальной. Эта задача может быть разрешена для произвольной геометрической формы проводников в характерном для

источников и приемников больших импульсных токов случае резко выраженного поверхностного эффекта. Найденные в [1] приближенные асимптотические соотношения между векторами электромагнитного поля на поверхности проводников допускают обобщение в виде формулы с не зависящими от тока и времени параметрами, которые наподобие элементарного закона Ома определяют связь между током и падением напряжения на массивных проводниках. Целью настоящей работы являются обоснование таких параметров, описание их использования, а также разработка осциллографических методов их измерения.

В настоящей работе используются обозначения, определенные в [1].

Скин-параметр массивных проводников

При резком поверхностном эффекте падение напряжения на участке электрической цепи с массивными проводниками может быть условно разделено на две части

$$U = U_L + U_S,$$

где

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

— составляющая напряжения, определяемая ЭДС самоиндукции внешнего поля;

$$U_S = \int_{\Lambda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

— составляющая, связанная с проникновением поля в металл (здесь интеграл вычисляется по линии Λ на поверхности проводника Γ , совпадающей с какой-либо линией вектора линейной плотности тока δ).

Зависимость U_S от общего тока $I(t)$ определяется из [1] (формулы (24) и (4))

$$U_S(t) = S \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta + R_S I(t) + \dots, \quad (1)$$

где

$$S = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi\gamma}} \int_{\Lambda} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

— не зависящий от тока $I(t)$ и времени t параметр, который мы предлагаем называть „скиновый параметр массивных проводников“;

$$R_S = \int_{\Lambda} \left[\frac{(k_2 - k_1)(b_1^2 - b_2^2)}{2\gamma b} + \frac{b_1 f_1 - b_2 f_2}{b} \right] dl$$

— коэффициент поправки второго приближения, обладающий свойствами активного сопротивления и зависящий от неоднородности внешнего поля и главных кривизн поверхности Γ на траектории линии тока Λ .

Как правило, величина R_S мала для массивных проводников реальных установок мегаамперных токов.

Внутреннее сопротивление переменному току массивных проводников связано со скиновым параметром соотношением

$$Z_S(\omega) = \beta S + R_S + \dots = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega}{2}} S + R_S + \dots$$

Для параллельных, протяженных проводников скиновый параметр S может быть вычислен с использованием метода, предложенного в [3] для определения внутреннего сопротивления переменному току массивных проводников,

$$S = \frac{1}{\sqrt{\gamma\mu_0}} \frac{\partial L}{\partial n},$$

где $\partial L/\partial n$ — изменение внешней индуктивности параллельных проводников при смещении точек контура проводников по нормали на одинаковое расстояние.

Массивные проводники в электрических цепях импульсных установок

Рассматриваем массивные проводники, у которых поправка R_S , соответствующая второму приближению в асимптотическом разложении U_S , мала. При $I(0) = 0$, что всегда имеет место в импульсных установках,

$$U_S = S \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta = S \int_0^t \frac{I'(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta, \quad (2)$$

где $I'(t) = dI/dt$.

Рассматривая последнее соотношение как интегральное уравнение Абеля [5], получим

$$I'(t) = \frac{1}{\pi S} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{U(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta$$

или

$$I(t) = \frac{1}{\pi S} \int_0^t \frac{U(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta. \quad (3)$$

Напряжение U_S практически невозможно измерить. Поэтому приходится иметь дело с падением напряжения U на системе массивных проводников, обладающих внешней индуктивностью L ,

$$U = LI' + S \int_0^t \frac{I'(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta. \quad (4)$$

Ток $I(t)$ при известных $U(t)$, L и S определяется как решение интегрального уравнения Вольтера (5), которое получено интегрированием (4),

$$I(t) = \mathcal{I}(t) - \lambda \int_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(\Theta) d\Theta, \quad \lambda = \frac{S}{L}.$$

Решение уравнения (5) может быть найдено методом последовательных приближений или с помощью интегрального преобразования Фурье или Лапласа. В последнем случае образ Лапласа тока

$$\bar{I}(p) = \frac{\bar{U}(p)}{L(p + \lambda\sqrt{p})}$$

допускает определение тока $I(t)$ в квадратурах [6]

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(\Theta) K(t-\Theta) d\Theta, \quad (6)$$

где

$$\bar{U}(p) = \int_0^{\infty} U(t) \exp(-pt) dt$$

— образ Лапласа напряжения $U(t)$,

$$K(x) = \exp(\lambda^2 x) [1 - \text{Erf}(\lambda\sqrt{x})],$$

$$\text{Erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-z^2) dz$$

— интеграл вероятностей.

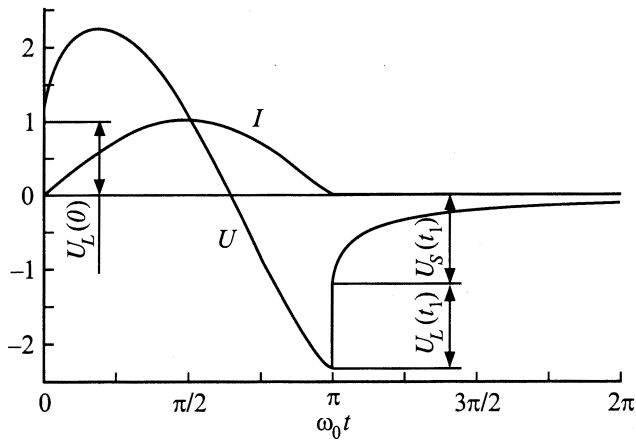


Рис. 1. Напряжение U на системе массивных проводников при прохождении по ним импульса тока I в виде одной полуволны синусоиды. Графики рассчитаны при параметрах $I_m = 1$, $\omega_0 = 1$, $L = 1$, $S = 1$.

Формулы (2) и (3) или (4), (6) можно рассматривать как своеобразный закон Ома для массивных проводников. Эти формулы можно использовать для определения токов и напряжений в сложных, разветвленных цепях; их можно применить в записи уравнений Кирхгофа для многоэлементных контуров импульсных установок. Методы расчета разветвленных электрических цепей с массивными проводниками выходят за рамки настоящей работы, и разработка таких методов может составить предмет отдельной статьи.

Напряжение на системе массивных проводников U имеет характерные особенности, которые показаны на рис. 1, где напряжение рассчитано для импульса тока в виде одной полуволны синусоиды,

$$I(t) = \begin{cases} I_m \sin(\omega_0 t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 = \pi/\omega_0, \\ 0 & \text{при } t \geq t_1 = \pi/\omega_0. \end{cases}$$

График $U(t)$ на рис. 1 показывает, что имеет место ступенчатое изменение напряжения в начале на величину $U_L(0) = LI'(0)$ и в момент окончания импульса тока на величину $U_L(t_1) = LI'(t_1)$. Эти ступеньки напряжения определяются падением напряжения на внешней индуктивности системы проводников L . После окончания импульса тока на проводниках остается напряжение

$$U_S(t_1) = S \int_0^{t_1} \frac{I'(\Theta)}{\sqrt{t_1 - \Theta}} d\Theta,$$

которое затем асимптотически убывает $U_S|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Это объясняется тем, что при $t > t_1$ суммарный ток в проводнике $I = 0$, но в слоях металла около поверхности может протекать ток в противоположных направлениях. В электрических цепях с малой индуктивностью L эффект появления отличного от нуля остаточного напряжения можно заметить на осциллограммах (рис. 2).

Измерение скин-параметра массивных проводников

Скин-параметр S , как и омическое сопротивление, может быть определен косвенными методами по результатам измерения тока I и падения напряжения U на системе массивных проводников. В принципе для определения S можно измерить сопротивление переменному току массивных проводников

$$Z(\omega) = j\omega L + \sqrt{j\omega} \cdot S,$$

а величину внешней индуктивности L измерить отдельно на высокой частоте (1 или 10 МГц) изготавливаемыми промышленностью приборами. Однако в установках мегаамперных токов практически невозможно обеспечить подключение необходимых для этого приборов таким образом, чтобы линии тока при изменениях и при работе устройства совпадали. Поэтому достоверные измерения S и L , как правило, возможны только при функционировании источников и приемников импульсных токов с помощью осциллографирования тока I и напряжения U . Для исключения влияния нелинейных эффектов при протекании больших импульсных токов рекомендуется такие измерения выполнять при пониженной энергии импульса (обычно 5–20% от нормальной энергии).

На рис. 2 представлены осциллограммы тока I и напряжения U на массивных проводниках (шинах) стенда для электродинамического сжатия [7]. В этом опыте шины были замкнуты накоротко медным стержнем диаметром 25 мм, который был установлен на место нагрузки. На осциллограмме напряжения U можно заметить остаточное напряжение, присутствующее на проводниках после окончания импульса тока I , что является характерным признаком того, что скин-параметр S составляет существенную часть полного импеданса проводников.

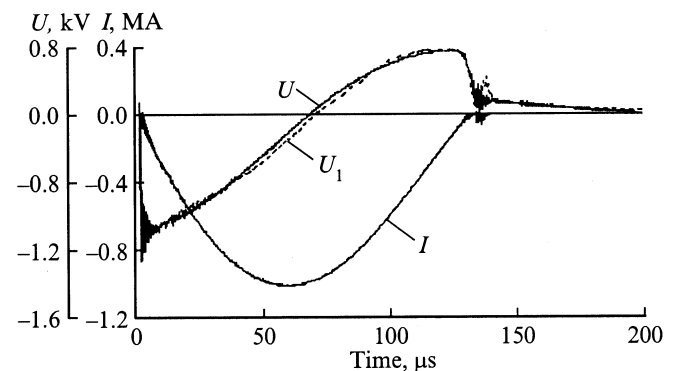


Рис. 2. Осциллограммы тока I и напряжения U на массивных проводниках (шинах) стенда для электродинамического сжатия [7]. U_1 — напряжение, рассчитанное по формуле (7) при параметрах $L = 28$ нГн, $R = 0$, $S = 1.93 \Omega \cdot \text{с}^{1/2}$, которые были вычислены методом наименьших квадратов по осциллограммам тока I и напряжения U . Разряд 12 модулей накопителя энергии E7-25 общей емкостью 25.9 мФ при начальном напряжении на конденсаторах 2.05 кВ.

Напряжение на системе проводников U можно представить в следующем виде:

$$U(t) = LI'(t) + RI(t) + S \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta. \quad (7)$$

В этой формуле функции $U(t)$ и $I'(t)$ не являются непрерывными. Поэтому для вычисления постоянных коэффициентов L , R и S более подходит формула (8), полученная интегрированием (7),

$$V(t) = LF_1(t) + RF_2(t) + SF_3(t), \quad (8)$$

где

$$V(t) = \int_0^t U(\Theta) d\Theta, \quad F_1(t) = I(t)$$

— ток,

$$F_2(t) = \int_0^t I(\Theta) d\Theta$$

— заряд,

$$F_3(t) = \int_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta.$$

Функции, входящие в (8), вычисляются по осциллограммам тока $I(t)$ и напряжения $U(t)$. Как правило, каждая осциллограмма содержит не менее 512 отсчетов измеряемого сигнала, а интервал времени между отсчетами достаточно мал по сравнению с характерным временем изменения сигнала. Поэтому применение простейших методов численного интегрирования, например метода Симпсона (метода трапеций), обеспечивает достаточную точность при вычислении $V(t)$ и $F_2(t)$. Для вычисления интеграла типа свертки $F_3(t)$, у которого интегрируемая функция имеет особенность при $t = \Theta$, предлагается формула численного интегрирования, которая выведена в Приложении,

$$F_3(i\Delta t) = F_{3,i} \approx \sqrt{\Delta t} \left(\frac{4i-1}{2\sqrt{i}} I_i - \sum_{i'=1}^i \frac{I_i - I_{i'}}{\sqrt{i-i'}} \right); \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots,$$

где $I_i = I(i\Delta t)$ — отсчеты на осциллограмме тока $I(t)$.

Оценка R может быть получена из (8) при $t \rightarrow \infty$. В случае если источником энергии является конденсаторная батарея емкостью C , то сопротивление может быть рассчитано по формуле

$$R = \frac{V(t)}{F_2(t)} \Big|_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{C[U_C(0) - U_C(\infty)]} \int_0^\infty U(t) dt, \quad (10)$$

где $U_C(0)$ и $U_C(\infty)$ — напряжение на конденсаторах до и после импульсного процесса.

Параметры L и S могут быть определены по величинам ступенчатого изменения напряжения U в момент начала и окончания тока $I(t)$. Однако точность таких измерений будет невысокая, так как ступенчатое изменение напряжения в реальных условиях сопровождается высокочастотными колебаниями в электрических цепях установок и в измерительных устройствах, что не позволяет достоверно установить величину этих ступеней.

Лучший результат получается, если для вычисления параметров L и S используются полностью или почти полностью массивы измеренных значений тока $I(t)$ и напряжения $U(t)$, составляющих осциллограммы. Такую возможность обеспечивает метод наименьших квадратов, при котором коэффициенты L , R , S определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка¹

$$a_{i1}L + a_{i2}R + a_{i3}S = d_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где

$$a_{ii'} = \int_{t_0}^{t_f} F_i(t) F_{i'}(t) dt, \quad d_i = \int_{t_0}^{t_f} V(t) F_i(t) dt \quad (i, i' = 1, 2, 3);$$

t_0 и t_f — время, соответствующее началу и окончанию участков осциллограмм, которые используются для вычисления неизвестных коэффициентов.

Целесообразно для t_0 выбирать время завершения высокочастотных колебаний в начале импульсного процесса а для t_f — момент времени окончания записи осциллограммы.

На рис. 2 представлены осциллограммы тока I и напряжения U , полученные при разряде емкостного накопителя энергии на шины стенда для электродинамического сжатия [7]. По этим осциллограммам были определены методом наименьших квадратов (11) значения параметров L , R , S . Численные значения этих параметров приведены в подписи к рис. 2. На рис. 2 также показана функция U_1 , вычисленная по формуле (7) при найденных величинах параметров L , R , S .

Заключение

В настоящей работе предложен новый, не зависящий от времени параметр массивных проводников импульсных установок, работающих в условиях резкого поверхностного эффекта, который назван „скиновый параметр“. Этот параметр определяет наподобие сопротивления в элементарном законе Ома соотношение между изменяющимися во времени током и напряжением на массивных проводниках, позволяющее вычислять ток и напряжения во временной области, без использования интегральных преобразований Фурье или Лапласа и приближенных методов обращения указанных преобразований.

¹ Если полагать, что $R = 0$, или использовать равенство (10) для вычисления R , то метод наименьших квадратов приводит к системе линейных уравнений второго порядка для вычисления L и S .

Напряжение на массивных проводниках имеет характерную особенность, заключающуюся в том, что после завершения импульса тока это напряжение присутствует на проводниках и асимптотически убывает со временем. Эта особенность определяет преимущество методов расчета переходных процессов во временной области с использованием скин-параметра, когда естественно учитывается бесконечно большое время существования напряжения на массивных проводниках.

Скин-параметр и внешняя индуктивность системы проводников могут быть измерены косвенным методом, посредством математической обработки осциллограмм тока и напряжения, полученных при функционировании импульсных установок.

Приложение

Вычисление светки $F_3(t) = \int_0^t \frac{I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta$

Особенность в подынтегральном выражении устраняется с помощью следующего преобразования:

$$\begin{aligned} F_3(t) &= I(t) \int_0^t \frac{d\Theta}{\sqrt{t-\Theta}} - \int_0^t \frac{I(t) - I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta \\ &= 2\sqrt{t}I(t) - J(t). \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Интеграл

$$J(t) = \int_0^t \frac{I(t) - I(\Theta)}{\sqrt{t-\Theta}} d\Theta$$

не имеет особенностей и он может быть вычислен методом Симпсона

$$\begin{aligned} J(i\Delta t) = J_i &= \sqrt{\Delta t} \left(\frac{I_i - I_0}{2\sqrt{i}} - \sum_{i'=1}^{i-1} \frac{I_i - I_{i'}}{\sqrt{i - i'}} \right); \\ i &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Подставляя последнее равенство в (П1) и учитывая, что $I_0 = I(0) = 0$, получим формулу (9) для вычисления функции F_3 .

Список литературы

- [1] Фридман Б.Э. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 44–51.
- [2] Фридман Б.Э., Рутберг Ф.Г. // ПТЭ. 2001. № 2. С. 196–203.
- [3] Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. М.: Энергоатомиздат, 1992. 413 с.
- [4] Михайлов В.М. Импульсные электромагнитные поля. Харьков: Вища школа, 1979. 138 с.
- [5] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. С. 249.
- [6] Бейтмен Г., Эрдейи Ф. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
- [7] Фридман Б.Э., Рутберг Ф.Г. // Изв. РАН. Энергетика. 1998. № 2. С. 23–29.