01;06;11

# Исследование электрофизических характеристик двумерных трехкомпонентных периодических моделей

© Б.Я. Балагуров, В.А. Кашин

Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

(Поступило в Редакцию 19 февраля 2002 г.)

Аналитическими и численными методами исследованы различные электрофизические характеристики двух двумерных трехкомпонентных двоякопериодических систем. Для ряда значений входящих в задачу параметров вычислены и затабулированы в графическом виде эффективная проводимость, парциальные моменты напряженности электрического поля второго порядка и эффективный коэффициент Холла обеих моделей.

## Введение

В настоящее время в изучении электрофизических свойств двухкомпонентных сред (в частности, композитов) достигнут определенный прогресс, особенно значительный в случае двумерных регулярных структур. Так, аналитическое решение задачи о проводимости ряда двумерных двоякопериодических моделей (с диэлектрическими или идеально проводящими включениями) дано в работах [1–3]. В наиболее интересном случае, когда обе компоненты имеют конечную ненулевую проводимость, замкнутое решение задачи получено для модели со структурой шахматной доски [1]. Более реалистическая модель — двумерная система с регулярным расположением круговых включений рассматривалась еще в работе Рэлея [4], где найдено несколько первых членов вириального разложения для эффективной проводимости. Решение задачи о проводимости (и других эффективных характеристик) модели Рэлея, справедливое при произвольных концентрациях, дано в [5,6]. Наконец, в работе [7] предложен общий метод вычисления различных электрофизических характеристик двумерных двухкомпонентных систем с регулярной структурой.

Иная ситуация в исследовании многокомпонентных сред, гораздо более разнообразных по своим характеристикам, чем двухкомпонентные. И хотя изучение многокомпонентных систем представляет как общефизический, так и прикладной интерес, теория их свойств находится в зачаточном состоянии. Естественно начинать исследование таких объектов с более простых для анализа трехкомпонентных периодических моделей. Определенный шаг в этом направлении сделан в работе [8], где предпринята попытка рассмотрения проводимости двумерной двухподрешеточной системы (рис. 1), являющейся обобщением модели Рэлея, — изотропной матрицы с расположенными в шахматном порядке круговыми включениями двух типов, имеющих разные радиусы и различные проводимости. Однако примененный в [8] приближенный метод пригоден только в случае малых концентраций включений. Решение задачи о проводимости и других эффективных характеристиках двухподрешеточной модели, справедливое при произвольных концентрациях, дано в [9] методом работы [5].

В настоящей работе проведен численный анализ общих формул, полученных в [9], во всем интервале изменения концентрации при фиксированном отношении радиусов включений и для ряда значений параметров $\sigma_i/\sigma_1$ ($i = 2, 3$; $\sigma_i$ — проводимость включений, $\sigma_1$ — проводимость матрицы). Вычислены и затабулированы в графическом виде эффективная проводимость модели, парциальные среднеквадратичные характеристики напряженности электрического поля, а также функции, входящие в выражение для эффективного коэффициента Холла в слабом магнитном поле.

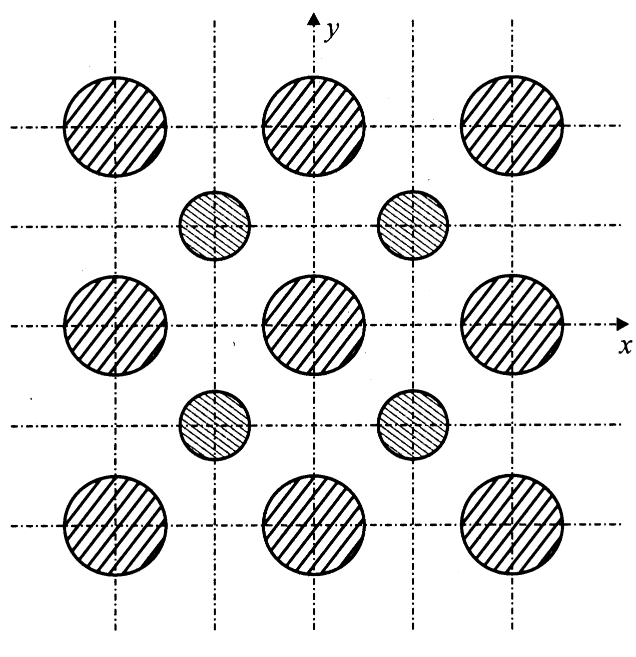


Рис. 1.

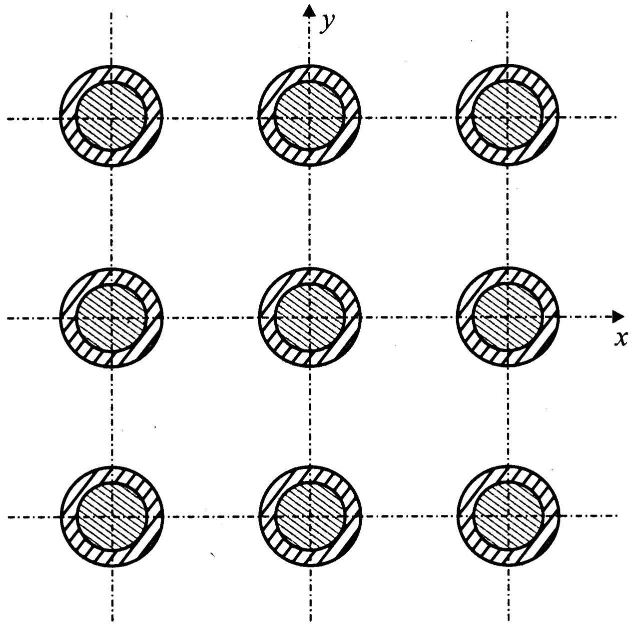


**Рис. 2.**

Рассмотрена еще одна трехкомпонентная модель, представляющая собой изотропную двумерную матрицу с двухслойными включениями круговой формы, образующими квадратную решетку (рис. 2). Сердцевина и оболочка включения образованы концентрическими окружностями и имеют различную проводимость. Эта система является обобщением модели Рэлея [4] на случай, когда включение покрыто, например, окисной пленкой. Для рассмотренной модели дано аналитическое решение задачи о проводимости и других эффективных величинах. Проведен численный анализ полученных формул и затабулированы те же, что и для двухподрешеточной модели, электрофизические характеристики при ряде фиксированных значений входящих в задачу параметров.

## Двухподрешеточная модель

1) Электрическое поле в среде. Рассматриваемая модель представляет собой двумерную изотропную матрицу проводимости $\sigma_1$ с включениями круговой формы двух типов, расположенных в шахматном порядке (рис. 1). Включения первого типа (проводимости $\sigma_2$ и радиуса $R$) образуют квадратную решетку с периодом $2a$. Включения второго типа (проводимости $\sigma_3$ и радиуса $\rho$) образуют такую же решетку, сдвинутую на половину периода по осям $x$ и $y$.

Направим среднюю напряженность электрического поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ вдоль оси $x$. В этом случае для комплексного потенциала матрицы имеем [9]

$$\Phi_1(z) = \beta \Big\{ z + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \zeta^{(2n)}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \zeta^{(2n)}(z - z_0) \Big\}. \quad (1)$$

Здесь $z = x + iy$, $z_0 = (1 + i)a$, $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [10], $\zeta^{(2n)}(z)$ — производная порядка $2n$ от $\zeta(z)$. Постоянные $\beta$, $B_2$ и $D_{2n}$ при выбранном направлении $\langle \mathbf{E} \rangle$ вещественны. Коэффициенты $B_{2n}$ и $D_{2n}$ удовлетворяют бесконечной системе алгебраических уравнений. Если ввести вместо $B_{2n}$ и $D_{2n}$ „переменные“ $\xi_n$ и $\eta_n$ согласно

$$B_{2n} = \frac{R^{2n+2}\delta_{21}}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!}}\, \xi_n, \quad (2)$$

$$D_{2n} = \frac{\rho^{2n+2}\delta_{31}}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!}}\, \eta_n, \quad (3)$$

где

$$\delta_{ij} = \frac{1 - h_{ij}}{1 + h_{ij}}, \quad h_{ij} = \frac{\sigma_i}{\sigma_j},$$

то упомянутая система уравнений примет вид [9]

$$\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} (M_{nm}\xi_m + P_{nm}\eta_m) = \delta_{n0}, \quad (5)$$

$$\eta_n + \sum_{m=0}^{\infty} (Q_{nm}\xi_m + N_{nm}\eta_m) = \delta_{n0}. \quad (6)$$

Здесь $\delta_{n0}$ — символ Кронекера. В (5) и (6)

$$M_{nm} = G_{nm} R^{2(n+m+1)} c_{n+m+1} \delta_{21}, \quad (7)$$

$$P_{nm} = G_{nm} R^{2n} \rho^{2m+2} d_{n+m+1} \delta_{31}, \quad (8)$$

$$Q_{nm} = G_{nm} \rho^{2n} R^{2m+2} d_{n+m+1} \delta_{21}, \quad (9)$$

$$N_{nm} = G_{nm} \rho^{2(n+m+1)} c_{n+m+1} \delta_{31}, \quad (10)$$

$$G_{nm} = \frac{(2n+2m)!}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!(2m)!(2m+1)!}}. \quad (11)$$

В (7) и (10) $c_k$ — коэффициенты в разложении дзета-функции в окрестности точки $z = 0$ [10]

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{2k-1} z^{2k-1}, \quad (12)$$

где

$$c_2 = \frac{g_2}{20}, \quad g_2 = \frac{1}{a^4} \Big[K(1/\sqrt{2})\Big]^4, \quad (13)$$

$$c_4 = \frac{1}{3} c_2^2, \quad c_6 = \frac{2}{3 \cdot 13} c_2^3, \quad c_8 = \frac{5}{3 \cdot 13 \cdot 17} c_2^4, \quad \ldots .$$

В (13) $K(1/\sqrt{2}) = 1.85407\ldots$ — полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ с модулем $k = 1/\sqrt{2}$. Соответственно $d_k$ — коэфициент в разложении дзета-функции в окрестности точки $z = z_0$ [10]

$$\zeta(z) = \zeta(z_0) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{2k-1} (z - z_0)^{2k-1}, \quad (14)$$

где

$$d_2 = -\frac{g_2}{4}, \qquad d_4 = \frac{1}{5}\,d_2^2,$$

$$d_6 = \frac{2}{75}\,d_2^3, \qquad d_8 = \frac{1}{325}\,d_2^4, \ \ldots . \tag{15}$$

В (14) $z_0 = (1+i)a$, $\xi(z_0) = \pi(1-i)/(4a)$. Величины $c_{2k}$ могут быть последовательно найдены из рекуррентного соотношения [10]

$$c_{2k} = \frac{3}{(4k+1)(2k-3)} \sum_{m=1}^{k-1} c_{2m}c_{2k-2m}, \quad k \geq 2. \tag{16}$$

В свою очередь $d_{2k}$ выражается через $c_{2k}$ следующим образом [9]

$$d_{2k} = [(-4)^k - 1]c_{2k}. \tag{17}$$

Коэффициенты $c_n$ и $d_n$ с нечетными индексами для рассматриваемой квадратной решетки (так называемый лемнискатический случай [10]) равны нулю. Поэтому матрицы $M_{nm}$, $P_{nm}$, $Q_{nm}$ и $N_{nm}$ из (7)–(10) отличны от нуля только в том случае, когда индексы $n$ и $m$ имеют различную четность.

2. Эффективные характеристики. Безразмерная эффективная проводимость $f = \sigma_e/\sigma_1$ выражается через величины $\xi_0$ и $\eta_0$ следующим образом [9]:

$$f = \frac{1 - \xi_0 p_2 \delta_{21} - \eta_0 p_3 \delta_{31}}{1 + \xi_0 p_2 \delta_{21} + \eta_0 p_3 \delta_{31}}, \tag{18}$$

где $p_2 = \pi R^2/(2a)^2$ и $p_3 = \pi\rho^2/(2a)^2$ — концентрация соответственно второй и третьей компонент.

С эффективной проводимостью $\sigma_e$ непосредственно связаны парциальные среднеквадратичные характеристики напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (см., например, [9])

$$\psi_i \equiv \langle \mathbf{e}^2 \rangle^{(i)} = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i}; \quad \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})/|\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle|. \tag{19}$$

Здесь $\langle \ldots \rangle^{(i)}$ — интеграл по объему (площади в двумерном случае) $i$-й компоненты ($i = 1, 2, 3$), деленный на объем (площадь) образца $V$. Для рассматриваемой двухподрешеточной модели имеем [9]

$$\psi_i = \frac{4}{(1+h_{i1})^2} \cdot \frac{p_i J_i}{\Delta^2}; \quad i = 2, 3; \tag{20}$$

$$J_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2, \quad J_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2, \tag{21}$$

где

$$\Delta = 1 + \xi_0 p_2 \delta_{21} + \eta_0 p_3 \delta_{31}. \tag{22}$$

Согласно [9], величины $\psi_i$ для $N$-компонентной среды связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{N} h_{i1}\psi_i = f \tag{23}$$

с $f$ из (18). Отсюда для трехкомпонентной системы находим

$$\psi_1 = f - h_{21}\psi_2 - h_{31}\psi_3, \tag{24}$$

так что для рассматриваемой модели нет необходимости вычислять $\psi_1$ прямым расчетом с помощью (19).

Эффективный коэффициент Холла $R_e$ в слабом магнитном поле $\mathbf{H}$ выражается через недиагональную (холловскую) составляющую $\sigma_{ae}$ тензора $\hat{\sigma}_e$ следующим образом:

$$R_e = \frac{1}{H} \cdot \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_e^2}. \tag{25}$$

Согласно [9], для $N$-компонентной среды в линейном по $\mathbf{H}$ приближении имеем

$$\sigma_{ae} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ai}\varphi_{ai}, \tag{26}$$

$$\varphi_{ai} = \frac{\langle E_x^{(x)} E_y^{(y)} - E_y^{(x)} E_x^{(y)} \rangle^{(i)}}{\langle E_x^{(x)} \rangle \langle E_y^{(y)} \rangle}, \tag{27}$$

где $\langle \ldots \rangle^{(i)}$ — то же, что и в (19); $\mathbf{E}^{(\nu)} = \mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля при $\mathbf{H} = 0$; индекс $\nu$ означает, что $\langle \mathbf{E}^{(\nu)} \rangle$ направлено вдоль оси $\nu$.

В случае $N$-компонентной системы для функций $\varphi_{ai}$ имеет место „правило сумм“ [9]

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ai} = 1. \tag{28}$$

Для трехкомпонентной среды, исключая $\varphi_{a1}$ с помощью (28), из (26) находим

$$\sigma_{ae} = \sigma_{a1} + (\sigma_{a2} - \sigma_{a1})\varphi_{a2} + (\sigma_{a3} - \sigma_a)\varphi_{a3}. \tag{29}$$

В двумерном случае имеется еще одно соотношение, связывающее величины $\varphi_{ai}$ с эффективной проводимостью $\sigma_e$ [9],

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \varphi_{ai} = \sigma_e^2. \tag{30}$$

Для трехкомпонентной системы из (30) после исключения $\varphi_{a1}$ с помощью (28) получаем

$$1 - (1 - h_{21}^2)\varphi_{a2} - (1 - h_{31}^2)\varphi_{a3} = f^2. \tag{31}$$

Соотношение (31) позволяет в двумерном случае ограничиться вычислением только одной из функций $\varphi_{ai}$, например $\varphi_{a2}$. С другой стороны, по степени выполнимости равенства (31) можно судить о правильности вычислений при численном анализе системы уравнений (5), (6).

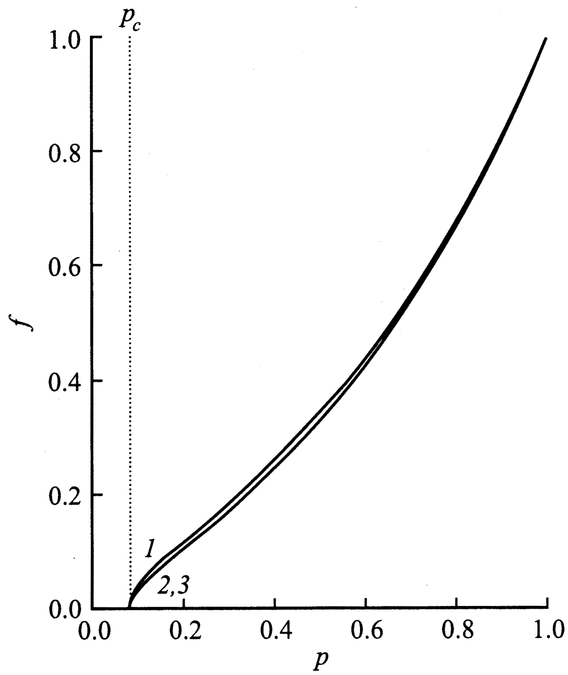


**Рис. 3.**

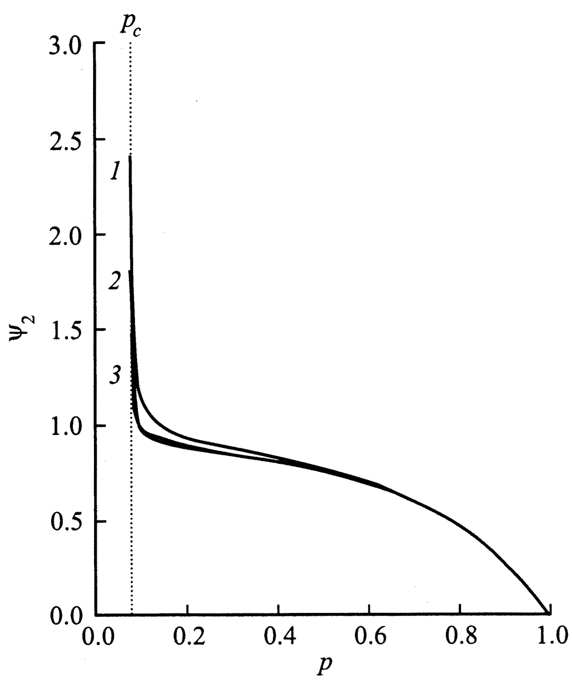


**Рис. 4.**

Определение функций $\varphi_{a2}$ и $\varphi_{a3}$ с помощью формулы (27) для рассматриваемой модели дает [9]

$$\varphi_{ai} = \frac{4}{(1+h_{i1})^2}\,\frac{p_i I_i}{\Delta^2}; \quad i = 2, 3, \tag{32}$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \xi_n^2, \quad I_3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \eta_n^2 \tag{33}$$

с $\Delta$ из (22). В работе [9] показано, что выражения (18), (32) и (33) обращают соотношение (31) в тождество.

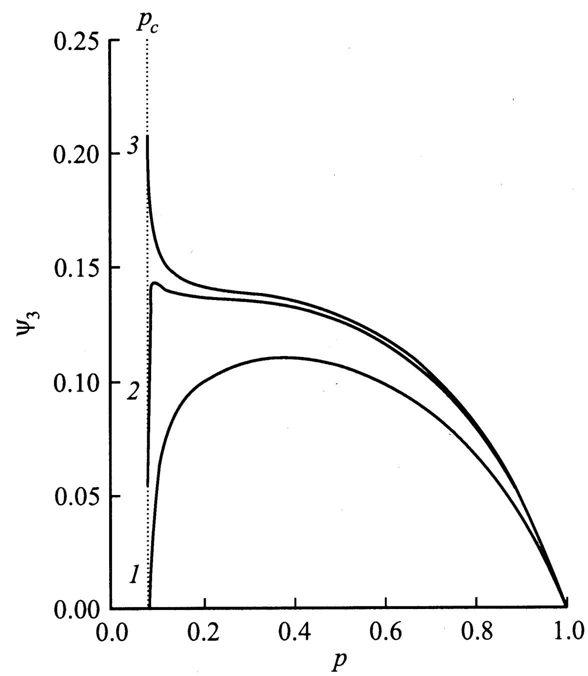


**Рис. 5.**

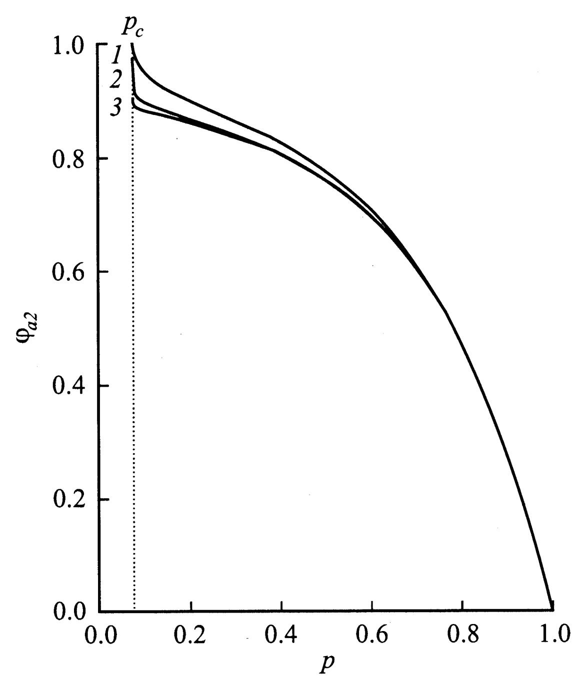


**Рис. 6.**

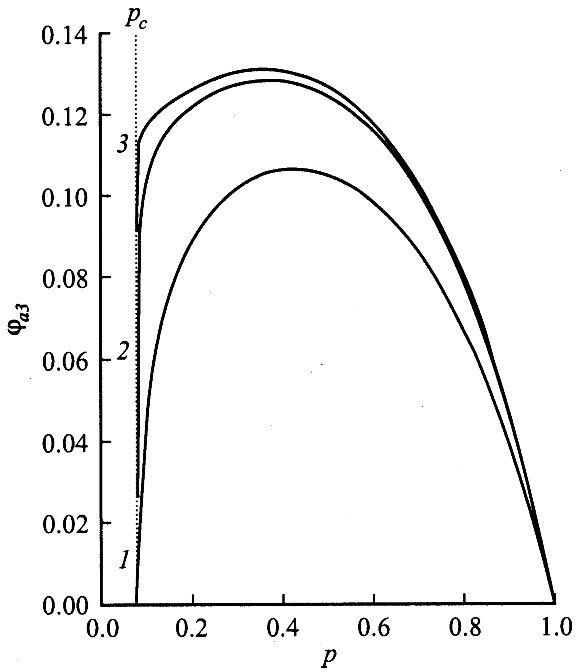


**Рис. 7.**

В настоящей работе эффективные характеристики двухподрешеточной модели вычислены при $\sigma_2 = 0$ и трех значениях параметра $h_{31} = \sigma_3/\sigma_1$: *1* — $10^{-1}$, *2* — $10^{-2}$, *3* — $10^{-3}$. При этом радиус $R$ принимал значения в интервале от 0 до $a$, а величина $\rho$ менялась по закону $\rho = (\sqrt{2} - 1)R$. Для определения коэффициентов $\xi_n$ и $\eta_n$ из бесконечной системы (5), (6) выделялась конечная подсистема из 80 уравнений. Результаты вычисления эффективных величин $f$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\varphi_{a2}$ и $\varphi_{a3}$ как функций концентрации первой компоненты $p$ представлены на рис. 3–7.

## Двухслойная модель

1) Электрическое поле в среде. Рассматриваемая модель представляет собой двумерную изотропную матрицу проводимости $\sigma_i$ с двухслойными включениями круговой формы, образующими квадратную решетку с периодом $2a$ (рис. 2). Сердцевина включения имеет радиус $\rho$ и проводимость $\sigma_3$, а оболочка (проводимости $\sigma_2$) ограничена концентрической окружностью радиуса $R$ $(R > \rho)$.

Направим среднюю напряженность электрического поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ вдоль оси $x$. В этом случае для комплексных потенциалов матрицы, оболочки и сердцевины имеем соответственно

$$\Phi_1(z) = \beta \Big\{ z + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \xi^{(2n)}(z) \Big\}, \qquad (34)$$

$$\rho < |z| < R: \ \Phi_2(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ C_{2n+1} z^{2n+1} + \frac{D_{2n+1}}{z^{2n+1}} \Big\}, \quad (35)$$

$$|z| < \rho: \quad \Phi_3(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} z^{2n+1}. \qquad (36)$$

Здесь $\xi^{(2n)}(z)$, как и в (1), — производная порядка $2n$ от дзета-функции Вейерштрасса $\xi(z)$. Коэффициенты $\beta$, $B_{2n}$, $C_{2n+1}$, $D_{2n+1}$ и $A_{2n+1}$ вещественны.

Электрические потенциалы $\varphi_2(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\Phi_2(z)$ и $\varphi_3(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\Phi_3(z)$ должны удовлетворять стандартным условиям на границе между сердцевиной и оболочкой

$$r = \rho: \quad \varphi_2 = \varphi_3,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = h_{32} \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \quad h_{32} = \frac{\sigma_3}{\sigma_2}. \qquad (37)$$

Из (37) находим выражения для коэффициентов $C_{2n+1}$ и $D_{2n+1}$ через $A_{2n+1}$

$$C_{2n+1} = \frac{1}{2}(1 + h_{32}) A_{2n+1},$$

$$D_{2n+1} = \frac{1}{2}(1 - h_{32}) \rho^{4n+2} A_{2n+1}. \qquad (38)$$

В свою очередь потенциалы $\varphi_1(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\Phi_1(z)$ и $\varphi_2(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\Phi_2(z)$ должны

$$r = R: \quad \varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = h_{21} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad h_{21} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \qquad (39)$$

При соответствующей процедуре для функции $\xi(z)$ используется разложение (12). В результате для коэффициентов $B_{2n}$ получаем бесконечную систему алгебраических уравнений

$$B_{2n} + w_n \frac{1 - h_{21}}{1 + h_{21}} \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \frac{(2n + 2m)!}{(2n)!(2n + 1)!} c_{n+m+1} R^{4n+2}$$

$$= \frac{1 - h_{21}}{1 + h_{21}} R^2 w_0 \delta_{n0}, \qquad (40)$$

где

$$w_n = \left[ 1 + \frac{\delta_{32}}{\delta_{21}} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{4n+2} \right] \Big/ \left[ 1 + \delta_{32}\delta_{21} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{4n+2} \right]. \quad (41)$$

Величины $\delta_{ij}$ определены в (4). Коэффициенты $A_{2n+1}$ выражаются через $B_{2n}$ следующим образом:

$$A_{2n+1} = B_{2n} \frac{4}{(1 + h_{21})(1 + h_{32})} \cdot \frac{(2n)!}{R^{4n+2}} \cdot$$

$$\times \left[ \delta_{21} + \delta_{32} \left( \frac{\rho}{R} \right)^{4n+2} \right]^{-1}. \qquad (42)$$

Заметим, что уравнения (40) могут быть получены и из общих формул работы [7]. Для двухслойного кругового включения матрица мультипольных поляризуемостей [7] имеет вид

$$\Lambda_{nm} = \Lambda_n \delta_{nm}, \tag{43}$$

где

$$\Lambda_m = R^{2n} \frac{\delta_{21} + \delta_{32}(\rho/R)^{2n}}{1 + \delta_{21}\delta_{32}(\rho/R)^{2n}}. \tag{44}$$

В (43) $\delta_{nm}$ — символ Кронекера. Подстановка (43), (44) в формулы (19), (28) и (33) из [7] приводит для коэффициентов $B_{2n}$ к системе уравнений (40).

Введем вместо $B_{2n}$ „переменные“ $\xi_n$ согласно

$$B_{2n} = \frac{R^{2n+2}\delta_{21}}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!}}\, \xi_n. \tag{45}$$

Тогда уравнение (40) примет вид

$$w_n^{-1}\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} S_{nm}\xi_m = \delta_{n0}, \tag{46}$$

где

$$S_{nm} = G_{nm} c_{n+m+1} R^{2(n+m+1)} \delta_{21} \tag{47}$$

с $G_{nm}$ из (11). Матрица $\hat{S}$ симметрична $S_{nm} = S_{mn}$. Коэффициенты $c_{n+m+1}$ при четном индексе $(n+m+1 = 2k)$ определены в (13) и (16), а при нечетном индексе равны нулю. Поэтому матрица $S_{nm}$ отлична от нуля только в том случае, когда индексы $n$ и $m$ имеют различную четность.

Направим теперь $\langle \mathbf{E} \rangle$ вдоль оси $y$; величины, относящиеся к этому случаю, будем отмечать черточкой сверху. Для комплексных потенциалов матрицы, оболочки и сердцевины имеем соответственно

$$\overline{\Phi}_1(z) = -i\overline{\beta}\Big\{z - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{2n}\xi^{(2n)}(z)\Big\}, \tag{48}$$

$$\rho < |z| < R: \quad \overline{\Phi}_2(z) = -i\overline{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\overline{C}_{2n+1}z^{2n+1} - \frac{\overline{D}_{2n+1}}{z^{2n+1}}\Big\}, \tag{49}$$

$$|z| < \rho: \quad \overline{\Phi}_3(z) = -i\overline{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{A}_{2n+1}z^{2n+1}. \tag{50}$$

Величины $\overline{\beta}$, $\overline{B}_{2n}$, $\overline{C}_{2n+1}$, $\overline{D}_{2n+1}$ и $\overline{A}_{2n+1}$ вещественны.

Из граничных условий при $r = \rho$ и $r = R$ следует соотношение между $\overline{C}_{2n+1}$, $\overline{D}_{2n+1}$ и $\overline{A}_{2n+1}$ вида (38), между $\overline{A}_{2n+1}$ и $\overline{B}_{2n}$ — вида (42), а также система уравнений для коэффициентов $\overline{B}_{2n}$. Если аналогично (45) ввести „переменные“ $\overline{\xi}_n$ согласно

$$\overline{B}_{2n} = \frac{R^{2n+2}\delta_{21}}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!}}\,\overline{\xi}_n, \tag{51}$$

то система уравнений для $\overline{\xi}_n$ примет вид

$$w_n^{-1}\overline{\xi} - \sum_{m=0}^{\infty} S_{nm}\overline{\xi}_m = \delta_{n0} \tag{52}$$

с матрицей $S_{nm}$ из (47) и $w_n$ из (41).

Для величин $\xi_n$ может быть установлен ряд полезных соотношений („правил сумм“). Умножим (46) на $\overline{\xi}_n$, (52) — на $\xi_n$, сложим и просуммируем по всем $n$. В результате с учетом равенства (62) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w_n^{-1}\xi_n^2 = \xi_0. \tag{53}$$

Рассмотрим теперь систему той же структуры, но с другими проводимостями компонент $\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_3$; величины, относящиеся к этой системе, будем отмечать значками „тильда“ сверху. В этом случае вместо (46) будем иметь

$$\widetilde{w}_n^{-1}\widetilde{\xi}_n + \sum_{m=0}^{\infty}\widetilde{S}_{nm}\widetilde{\xi}_m = \delta_{n0}. \tag{54}$$

Умножим (46) на $\widetilde{\xi}_n$, (54) — на $\xi_n$, вычтем друг из друга и просуммируем по всем $n$. В результате с учетом симметрии матрицы $S_{mn}$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(w_n^{-1} - \widetilde{w}_n^{-1})\xi_n\widetilde{\xi}_n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(S_{nm} - \widetilde{S}_{nm})\xi_n\widetilde{\xi}_m = \widetilde{\xi}_0 - \xi_0. \tag{55}$$

Положим в (55) $\kappa_1 = \sigma_1$, $\kappa_3 = \sigma_3$ и перейдем к пределу $\kappa_2 \to \sigma_2$. В этом случае из (55) следует равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n^2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}w_n^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\xi_n\xi_m\frac{\partial}{\partial\sigma_2}S_{nm} = -\frac{\partial\xi_0}{\partial\sigma_2}. \tag{56}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_2}S_{nm} = \frac{1}{\delta_{21}}\frac{\partial\delta_{21}}{\partial\sigma_2}S_{nm}, \tag{57}$$

то, подставляя (57) в (56) и исключая $\sum_m S_{nm}\xi_m$ с помощью уравнения (46), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n^2 w_n^{-2}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(w_n\delta_{21}) = \frac{\partial}{\partial\sigma_2}(\xi_0\delta_{21}). \tag{58}$$

Аналогичным образом, положив в (55) $\kappa_1 = \sigma_1$, $\kappa_2 = \sigma_2$ и перейдя к пределу $\kappa_3 \to \sigma_3$, найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n^2\frac{\partial}{\partial\sigma_3}w_n^{-1} = -\frac{\partial\xi_0}{\partial\sigma_3}. \tag{59}$$

2) Эффективные характеристики. Вычисляя, как и в [5], падение напряжения на элементарной

ячейке и полный ток, для безразмерной эффективности проводимости $f = \sigma_e/\sigma_1$ получим

$$f = \left(\alpha - \frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\right)\cdot\left(\alpha + \frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\right)^{-1};$$

$$\alpha = \xi_0^{-1}, \tag{60}$$

так что для определения функции $f$ достаточно найти величину $\xi_0$ (т. е. коэффициент $B_0$).

При малой концентрации включений ($R \ll a$) система уравнений (46) может быть решена итерациями — разложением по степеням величины $w_n S_{nm}$

$$\xi_n = w_0\Big\{\delta_{n0} - w_n\Big[S_{n0} - \sum_{m=0}^{\infty} S_{nm} w_m S_{m0} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} S_{nl} w_l S_{lm} w_m S_{m0} - \ldots\Big]\Big\}. \tag{61}$$

Сравнение с аналогичным разложением для $\overline{\xi}_n$, следующим из (52), показывает, что

$$\overline{\xi}_n = (-1)^n \xi_n. \tag{62}$$

Из (61) следует вириальное разложение (по степеням $R/a$) для величин $\xi_n$, в том числе и для $\xi_0$. Удобнее, однако, найти соответствующее разложение для $\alpha = 1/\xi_0$. Из (46) при $n = 0$ имеем

$$\xi_0 = w_0\Big\{1 - \sum_{m\neq 0} S_{0m}\xi_m\Big\}. \tag{63}$$

Если же $n \neq 0$, то

$$\xi_n = -w_n S_{n0}\xi_0 - w_n \sum_{m\neq 0} S_{nm}\xi_m. \tag{64}$$

Решая уравнение (64) итерациями, получим

$$n \neq 0:\quad \xi_n = -\,\xi_0 w_n\Big\{S_{n0} - \sum_{m\neq 0} S_{nm} w_m S_{m0} + \sum_{l\neq 0}\sum_{m\neq 0} S_{nl} w_l S_{lm} w_m S_{m0} - \ldots\Big\}. \tag{65}$$

Подстановка (65) в (63) дает

$$\alpha = \xi_0^{-1} = w_0^{-1}\Big\{1 - w_0 \sum_{k\neq 0} S_{0k} w_k S_{k0} - w_0 \sum_{k\neq 0}\sum_{l\neq 0}\sum_{m\neq 0} S_{0k} w_k S_{kl} w_l S_{lm} w_m S_{m0} - \ldots\Big\}. \tag{66}$$

Используя явное выражение для матрицы $\hat{S}$ (см. (47)), из (66) можно найти величину $\alpha$ в виде разложения по степеням $R/a$. Так, с точностью до членов $\sim (R/a)^{24}$ включительно имеем

$$\alpha = w_0^{-1}\Big\{1 - \frac{1}{3}\,w_0 w_1 (gR^4)^2\delta_{21}^2 - \frac{1}{63}\,w_0 w_3 (gR^4)^4 \delta_{21}^2 - \frac{5}{9}\Big(w_0 w_1^2 w_2 \delta_{21}^2 + \frac{4}{5\cdot 11\cdot 13^2}\,w_0 w_5\Big)(gR^4)^6\delta_{21}^2 - \ldots\Big\}, \tag{67}$$

где $g = g_2/20$, $g_2$ определено в (13).

Для рассматриваемой модели должно выполняться соотношение взаимности (см., например, [9]), которое связывает безразмерные эффективные проводимости исходной системы и так называемой взаимной системы, отличающейся от исходной заменой $h_{ij} \to h_{ji}$,

$$f(h_{21}, h_{31})\, f(h_{12}, h_{13}) = 1. \tag{68}$$

Заметим, что переход к взаимной системе $h_{ij} \to h_{ji}$ эквивалентен замене $\delta_{ij} \to \delta_{ij}$. При этом $w_{n\to w_n}$, $S_{nm} \to S_{nm}$, а величина $\xi_0$ остается неизменной. Так что, как следует из (60), $f \to 1/f$ и соотношение взаимности (68) выполняется автоматически.

Для функций $\psi_2$ и $\psi_3$, определенных согласно (19), получаем

$$\psi_2 = \frac{\pi}{(4a)^2}\cdot\frac{(1+h_{32})^2}{\left(1 + B_0\,\frac{\pi}{4a^2}\right)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)R^{4n+2}(A_{2n+1})^2 \times\left[1 + \delta_{32}^2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{4n+2}\right]\cdot\left[1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{4n+2}\right]. \tag{69}$$

$$\psi_3 = \frac{\pi}{(2a)^2}\cdot\frac{1}{\left(1 + B_0\,\frac{\pi}{4a^2}\right)^2} \times\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\rho^{4n+2}(A_{2n+1})^2. \tag{70}$$

Величина $\psi_1$ может быть определена из соотношения (24).

Из (60) для производной $\partial\sigma_e/\partial\sigma_2$ находим

$$\frac{\partial\sigma_e}{\partial\sigma_2} = -\frac{2\sigma_1}{\left(1 + \xi_0\,\frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\right)^2}\,\frac{\pi R^2}{4a^2}\,\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(\xi_0\sigma_{21}). \tag{71}$$

С другой стороны, подстановка (42) и (45) в (69) дает

$$\psi_2 = -\frac{2\sigma_1}{\left(1 + \xi_0\,\frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\right)^2}\,\frac{\pi R^2}{4a^2} \times\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n^2 w_n^{-2}\,\frac{\partial}{\partial\sigma_2}(w_n\delta_{21}). \tag{72}$$

Сравнение (72) (с учетом тождества (58)) с (71) приводит в согласии с (19) к равенству

$$\psi_2 = \frac{\partial\sigma_e}{\partial\sigma_2}. \tag{73}$$

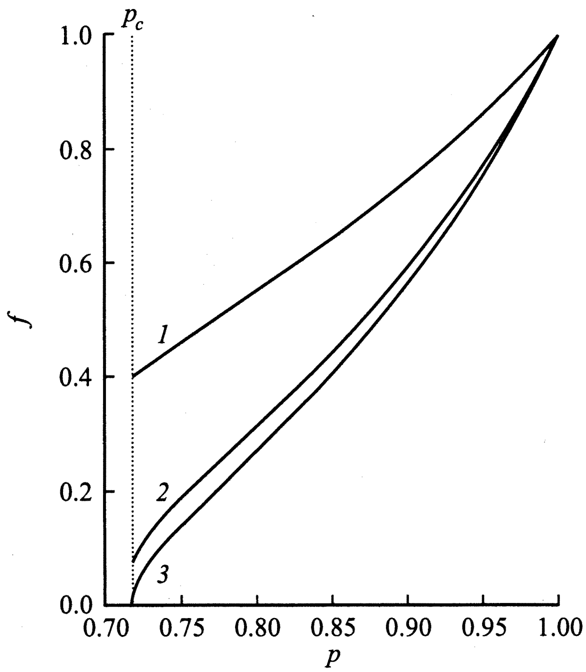


**Рис. 8.**

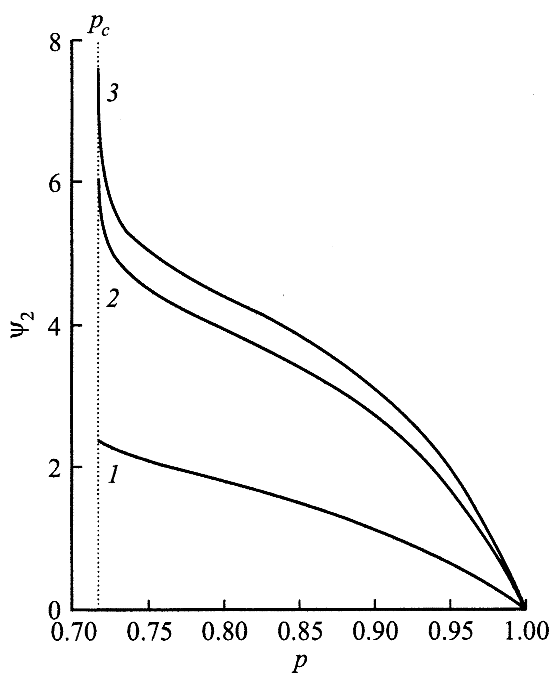


**Рис. 9.**

Аналогичным образом из (60) и (70) находим соответственно

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_3} = -\frac{2\sigma_1}{\left(1+\xi_0 \frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\right)^2}\,\frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\,\frac{\partial \xi_0}{\partial \sigma_3}, \tag{74}$$

$$\psi_3 = \frac{2\sigma_1}{\left(1+\xi_0 \frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\right)^2} \cdot \frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 \,\frac{\partial}{\partial \sigma_3}\, w_n^{-1}. \tag{75}$$

Сравнение (75) (с учетом соотношения (59)) с (74) приводит к равенству

$$\psi_3 = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_3}, \tag{76}$$

что также согласуется с (19).

Коэффициент Холла дается выражениями (25)–(29). Находя из (35), (36) и (49), (50) напряженности $\mathbf{E}^{(x)}$ и $\mathbf{E}^{(y)}$ и вычисляя входящие в формулы для $\varphi_{a2}$ и $\varphi_{a3}$

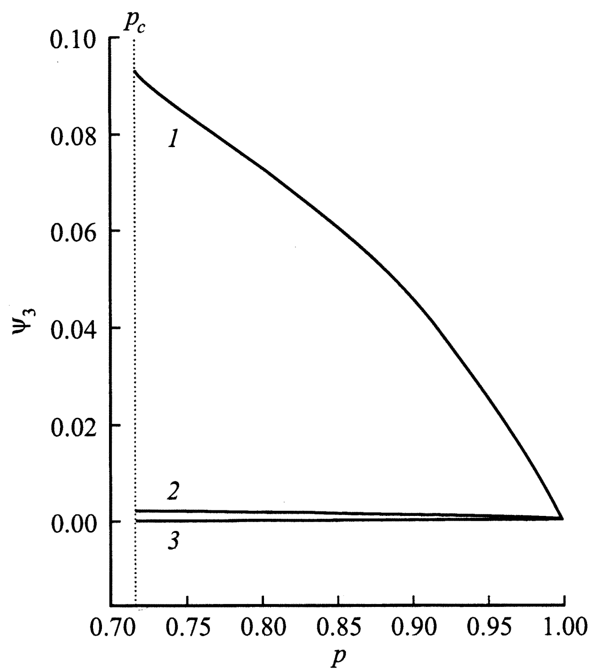


**Рис. 10.**

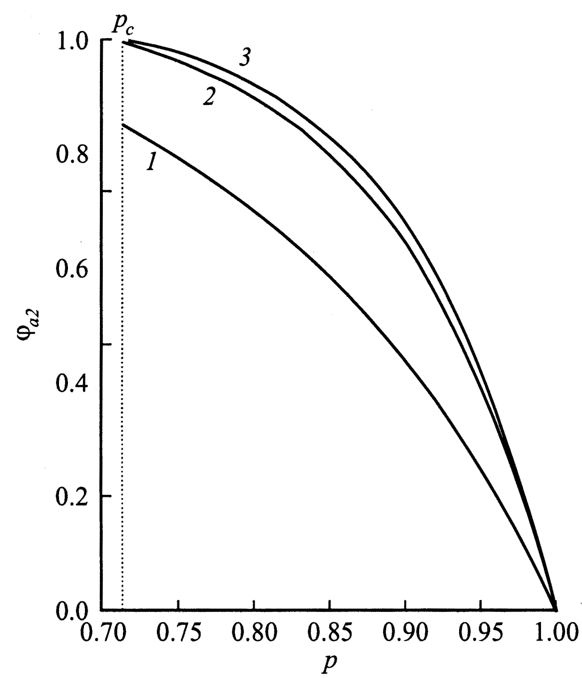


**Рис. 11.**

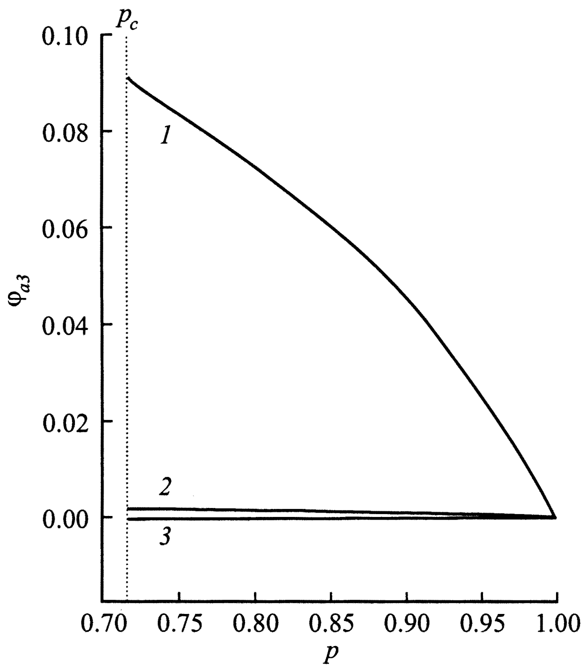


**Рис. 12.**

интегралы (см. (27)), получим

$$\varphi_{a2} = \frac{\pi}{(4a)^2} \cdot \frac{(1+h_{32})^2}{\left(1+B_0\,\frac{\pi}{4a^2}\right)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) R^{4n+2}$$

$$\times (A_{2n+1})^2 \left[1 - \delta_{32}^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{4n+2}\right] \left[1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{4n+2}\right], \qquad (77)$$

$$\varphi_{a3} = \frac{\pi}{(2a)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+B_0\,\frac{\pi}{4a^2}\right)^2}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \rho^{4n+2} (A_{2n+1})^2. \qquad (78)$$

Используя выражения (77), (78) и равенства (42), (45), нетрудно показать, что

$$(1-h_{21}^2)\varphi_{a2} + (1-h_{31}^2)\varphi_{a3}$$

$$= \frac{\pi R^2}{a^2} \frac{\delta_{21}}{\left(1+\xi_0\,\frac{\pi R^2}{4a^2}\,\delta_{21}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w_n^{-1} \xi_n^2. \qquad (79)$$

Подставив (53) в (79), можно убедиться, что правая часть (79) равна $1 - f^2$, так что выражениями (77), (78) соотношение (31) тождественно удовлетворяется.

Численный анализ системы (46) проводился для подсистемы из 40 уравнений при $\sigma_3 = \sigma_1$, фиксированном отношении радиусов сердцевины и оболочки $\rho/R = 0.8$ и для трех значений параметра $h_{21} = \sigma_2/\sigma_1$: *1* — $10^{-1}$, *2* — $10^{-2}$, *3* — $10^{-3}$. Результаты вычисления величин $f$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\varphi_{a2}$ и $\varphi_{a3}$ как функций концентрации первой компоненты $p$ приведены на рис. 8–12.

## Список литературы


[1] *Емец Ю.П.* Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. Киев: Наукова думка, 1986. 192 с.
[2] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. Вып. 4 (10). С. 1561–1572.
[3] *Балагуров Б.Я.* // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 6. С. 1146–1151.
[4] *Lord Rayleigh* // Phil. Mag. 1982. Vol. 34. N 211. P. 481–502.
[5] *Балагуров Б.Я., Кашин В.А.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. Вып. 5. С. 978–989.
[6] *Балагуров Б.Я., Кашин В.А.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 106–111.
[7] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. Вып. 3(9). С. 668–677.
[8] *Емец Ю.П.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 3(9). С. 1121–1136.
[9] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. Вып. 1. С. 142–153.
[10] Справочник по специальным функциям / Под ред. А. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.