05;07

Распространение нелинейных продольных волн в твердом теле с учетом взаимодействия полей деформации и концентрации дефектов

© Ф. Мирзоев

Институт проблем и информационных технологий РАН,
140700 Шатура, Московская область, Россия
e-mail: mirzo@laser.nictl.msk.su

(Поступило в Редакцию 11 сентября 2001 г. В окончательной редакции 8 февраля 2002 г.)

Развита модель распространения нелинейных продольных волн в облучаемом лазерном импульсами твердом теле с квадратичной нелинейностью упругого континуума с учетом взаимодействия полей деформации и концентрации точечных дефектов. Проанализировано влияние процессов генерации и рекомбинации лазерно-индуцированных дефектов на распространение волны упругой деформации. Обнаружено существование упругой нелинейной ударной волны малой интенсивности в системе и изучена ее структура. Получена оценка ширины и скорости движения фронта волны. Определены вклады в линейный модуль упругости, а также в дисперсионные параметры решетки, обусловленные взаимодействием полей деформации и дефектов.

Введение

Одним из наиболее ярких проявлений нелинейного поведения твердого тела при интенсивных импульсных воздействиях (в частности, при импульсных лазерно-лучевых воздействиях) являются возникновение и распространение нелинейных волн деформации (в частности, солитонов) различной природы. Исследование этого явления представляет заметный интерес и ему посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные работы [1–7]. При рассмотрении эволюции упругих нелинейных волн в кристалле обычно в качестве нелинейности рассматривается отклонение упругих свойств решетки от закона Гука [1]. В облучаемых твердых телах существенную роль могут играть различные структурные нарушения кристаллической решетки — точечные дефекты, генерирующие в процессе внешних воздействий и создающие заметную деформацию среды. Деформация среды обусловлена различием ковалентных радиусов атомов матрицы и дефектов. Дефектно-деформационное взаимодействие может происходить как через изменения энергетических параметров подсистемы дефектов (энергия образования дефектов, энергия их миграции), так и путем возникновения диффузионного тока (деформационно-индуцированного дрейфа). Нелинейности, связанные с этими взаимодействиями, при определенных условиях могут оказаться существенными для распространения упругих нелинейных возмущений в твердых телах и приводить к возникновению качественно новых физических эффектов. Так, обусловленные дефектами нелинейности могут приводить к перенормировке решеточных параметров (как линейных, так и нелинейных модулей упругости). Наличие в среде точечных дефектов с конечной скоростью рекомбинации может вызывать появление диссипативных слагаемых, отсутствующих в обычных уравнениях для упругих нелинейных волн. На динамику волн заметное влияние может оказывать дисперсия, обусловленная конечностью периода кристаллической решетки [8] или толщины образца [9], а также дисперсия, связанная с неравновесными дефектами. Распространение волны упругой деформации в таких системах может происходить в виде ударных волн. В этом случае влияние генерационно-рекомбинационных процессов оказывается аналогичным рассеянию энергии упругих колебаний в среде из вязкоупругого материала с последействием и релаксацией. О прямом экспериментальном наблюдении формирования ударного фронта акустической волны в диэлектриках при воздействии на них лазерных импульсов длительностью $0.15\,\mu$s и энергией до 5 J сообщается в [10]. Исследование динамики волн с учетом их взаимодействия с дефектами структуры представляет несомненный теоретический и практический интерес, в частности при анализе механизмов аномального массопереноса, обнаруженного при лазерной и ионной имплантации металлических материалов [11], при изучении процессов механической активации компонентов в твердофазных химических реакциях. Распространение упругих волн в конденсированной среде несет информацию об искажениях их формы и скорости, потерях энергии, дефектной структуре и т. д., что необходимо для диагностики различных параметров и структуры твердых тел.

В настоящей работе исследована возможность существования ударных волн при распространении нелинейной волны продольной деформации в среде с квадратичной нелинейностью упругого континуума с учетом генерации точечных дефектов (вакансии, межузлии) под влиянием импульсных лазерных воздействий. Показано, что учет генерационно-рекомбинационных процессов в подсистеме дефектов приводит к диссипативным эффектам и, как следствие, к появлению упругих ударных волн малой интенсивности. Определена перенормировка линейных модулей упругости и параметра дисперсии, связанная с дефектно-деформационным взаимодействием.

Основные уравнения

Рассмотрим изотропное твердое тело, в котором под воздействием лазерного облучения образуются точечные дефекты. Пусть $n_j(x,t)$ — объемная концентрация дефектов ($j = v$ — для вакансий, $j = i$ — для межузлий). При прохождении продольных волновых возмущений деформации в областях растяжения и сжатия изменяется энергия активации образования дефектов. Если $\varepsilon - \mathrm{div}\mathbf{u}$ — деформация среды ($\mathbf{u}$ — вектор смешения среды), φ — деформационный потенциал, то перенормированную энергию образования точечных дефектов можно представить в виде $E = E_0 - \varphi\mathrm{div}\mathbf{u}$ (E_0 — энергия образования дефекта в недеформированном кристалле). Модуляция энергии образования приводит к соответствующей модуляции функции источника дефектов и, как следствие, к пространственному перераспределению дефектов [12]. Кроме того, дефекты могут мигрировать по кристаллу, рекомбинировать на различных центрах, роль которых могут играть дислокации, примеси внедрения и т. д. В рамках перечисленных допущений нелинейное динамическое уравнение, описывающее распространение продольной волны деформации в кристалле с учетом генерации дефектов (в одномерном случае), можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_N}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^4} + \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{K\Omega_j}{\rho}\frac{\partial n_j}{\partial x}. \qquad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ — смещение среды, $c_s = ((3K+4\mu)/3\rho)^{1/2}$ — скорость продольных волн в кристалле; K и μ — модули всестороннего сжатия и сдвига (линейные модули упругости); ρ — плотность среды; α_1 и α_2 — дисперсионные параметры [13]; Ω_j — дилатационный параметр, характеризующий изменение объема кристалла, при образовании в нем одного точечного дефекта (для $j = v - \Omega_j < 0$, для $j = i - \Omega_j > 0$). Коэффициент нелинейности β_N [13]: $\beta_N = 3\rho c_s^2 + 2(A + 3B + C)$, где A, B, C — модули упругости третьего порядка. Для большинства твердых тел (металлов, многих полимеров) $\beta_N < 0$. Существуют также и металлы, в которых отклонение упругих свойств решетки от закона Гука незначительно. В этом случае коэффициент нелинейности $\beta_N > 0$. При записи уравнения (1) мы ограничились плавными возмущениями деформации и учли вклады в пространственную дисперсию модулей упругости в первом неисчезающем приближении.

Уравнение (1) в отсутствие упругих концентрационных напряжений, носящее название уравнения с двумя дисперсиями (α_1, α_2), было детально изучено в работах [2–5]. Обобщение этого уравнения на случай наличия в системе упругих концентрационных напряжений в рамках гамильтониана подхода проведено в работе [12].

Распределение точечных дефектов, определяющее правую часть уравнения (1) в свою очередь, зависит от деформаций и напряжений. Поэтому для полного описания распространения упругой волны необходимо уравнение (1) замкнуть уравнением для плотности дефектов. Если принять, что основными процессами, контролирующими поведение во времени дефектов, являются процессы генерации дефектов из узлов решетки и их рекомбинация на центрах различной природы, для слабых неоднородных возмущений плотности $n_{1j} = n_j - n_{j0}$, $n_{1j} \ll n_{j0}$, где $n_{j0} = q_0\tau_j$ — однородное стационарное распределение дефектов, можно записать следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial n_{1j}}{\partial t} = q_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} - \beta_j n_{1j}, \qquad (2)$$

где q_0 — темп генерации точечных дефектов в отсутствие деформации; первое слагаемое в правой части (2) учитывает деформационно-индуцированную генерацию ($\varepsilon = \partial u/\partial x$ — деформация среды); второе слагаемое — потери дефектов за счет рекомбинации ($\beta_j = 1/\tau_j = \rho_j D_j$ — скорость рекомбинации на стоках; ρ_j — плотность стоков, D_j — коэффициент диффузии дефекта типа j, τ_j — время релаксации); объемная взаимная рекомбинация разноименных дефектов не учитывается; при тепловом механизме генерации точечных дефектов $q_\varepsilon = q_0(K\Omega_j/kT)$.

Уравнения (1) и (2) образуют замкнутую систему. Она полностью описывает распространение одномерных возмущений деформации твердого тела, возникающих от нестационарных и неоднородных распределений подсистемы точечных дефектов, а также обратный эффект — изменение концентрационного поля дефектов в твердом теле, обусловленное возмущениями упругих деформаций.

Нелинейные стационарные волны

Для автомодельных решений вида $u = u(\xi)$, $n_{1j} = n_{1j}(\xi)$, где $\xi = x - vt$, описывающих нелинейные продольные волны деформации и концентрации дефектов, распространяющихся со скоростью $v = \mathrm{const}$ вдоль оси x, сформулированная выше система дифференциальных уравнений в частных производных (1) и (2) переходит в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(v^2 - c_s^2)\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \frac{\beta_N}{\rho}\frac{d^2 u}{d\xi^2}\frac{du}{d\xi} - (\alpha_1 v^2 - \alpha_2)\frac{d^4 u}{d\xi^4} = -\frac{k\Omega_j}{\rho}\frac{dn_{1j}}{d\xi}, \qquad (3)$$

$$-v\frac{dn_1 j}{d\xi} + \frac{n_{1j}}{\tau_j} = q_\varepsilon \frac{du}{d\xi}. \qquad (4)$$

В качестве граничных условий к уравнениям (3) и (4) примем следующие:

$$u\xi(-\infty)=\varepsilon_0,\quad u_\xi(+\infty)=0,\quad n_{1j}(\pm\infty)=0. \qquad (5)$$

Граничные условия (5) означают, что распространяющиеся в среде волновые возмущения переводят рассматриваемую систему из состояния с нулевой деформацией в состояние с постоянным значением деформации (ε_0). В дальнейшем ограничимся системой с одним типом дефектов и положим в (3)–(5) $n_{1j}(\xi)\equiv n_1(\xi)$, $\tau_j\equiv\tau$, $\Omega_j=\Omega$.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (4) с учетом граничных условий (5) имеет вид

$$n_1(\xi)=\int\limits_{\xi}^{+\infty}d\xi' q(\xi')\exp\left(\frac{\xi-\xi'}{\tau v}\right), \qquad (6)$$

где $q(\xi)=q_{\varepsilon v^{-1}}du/d\xi$.

Исключив конценрацию дефектов, с помощью (6) получаем уравнение, описывающее распространение нелинейной волны упругой деформации в виде

$$(v^2-c_s^2)\frac{d^2u}{d\xi^2}-\frac{\beta_N}{\rho}\frac{d^2u}{d\xi^2}\frac{du}{d\xi}-(\alpha_1v^2-\alpha_2)\frac{d^4u}{d\xi^4}$$
$$+\frac{K\Omega}{\rho}\frac{d}{d\xi}\int\limits_{\xi}^{+\infty}\exp\left(\frac{\xi-\xi'}{\tau v}\right)q(\xi')d\xi'=0. \qquad (7)$$

Уравнения типа (7) характерны для диссипативных сред с деформационной памятью (или с релаксацией) [1]. При $\alpha_1=\alpha_2=0$ (отсутствие дисперсии) и $q_\varepsilon=\beta=0$ (отсутствие генерации дефектов) оно имеет тот же вид, что и для продольной волны в свободном пространстве. На основе уравнения (7) возможен всесторонний анализ распространения стационарной волны деформации с учетом влияния как дисперсионных свойств среды, так и упругих свойств решетки и подсистемы дефектов. Точный анализ этого уравнения при произвольных значениях входящих в него параметров не представляется возможным. Ниже рассматривается его анализ при малых по сравнению с периодом волновых возмущений t_0, временах релаксации дефектов ($\tau\ll t_0$). В этом случае интегральный член в (7) можно заменить дифференциальным. Для этого функцию $q(\xi-z)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности ξ. Ограничиваясь в этом разложении первыми тремя слагаемыми, имеем

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_{\xi}^{+\infty}d\xi' q(\xi')\exp\left(\frac{\xi-\xi'}{\tau v}\right)$$
$$\approx q_\varepsilon\left(\tau\frac{d^2u}{d\xi^2}+\tau^2v\frac{d^3u}{d\xi^3}+\tau^3v^2\frac{d^4u}{d\xi^4}\right).$$

После постановки этого выражения в (7) приходим к следующему уравнению:

$$(v^2-\tilde{c}_s^2)\frac{d^2u}{d\xi^2}-\frac{\beta_N}{\rho}\frac{d^2u}{d\xi^2}\frac{du}{d\xi}+\frac{K\Omega q_\varepsilon\tau^2v}{\rho}\frac{d^3u}{d\xi^3}$$
$$-\left(\alpha_1v^2-\alpha_2-q_\varepsilon\tau^3v^2\frac{K\Omega}{\rho}\right)\frac{d^4u}{d\xi^4}=0, \qquad (8)$$

где $\tilde{c}_s=c_s(1-K\Omega q_\varepsilon\tau/\rho c_s^2)^{1/2}$ — скорость звука, перенормированная за счет дефектно-деформационного взаимодействия.

В уравнении (8) слагаемое с третьей производной от смещения (бюргерсовское слагаемое) ответственно за диссипацию энергии волны. Появление этого слагаемого, очевидно, связано с генерационно-рекомбинационными процессами в системе дефектов. Кроме того, конечность скорости рекомбинации дефектов (τ^{-1}) дает дополнительный дисперсионный вклад в нелинейное уравнение (8), что может сказаться на характеристиках нелинейных волн.

После однократного интегрирования по ξ и введения обозначения $\varepsilon=du/d\xi$ получаем уравнение, совпадающее с первым интегралом хорошо известного в литературе стационарного уравнения Кортевега-де-Вриза–Бюргерса [14],

$$g\frac{d^2\varepsilon}{d\xi^2}-\delta\frac{d\varepsilon}{d\xi}+(\beta_N/\rho)\varepsilon^2-\alpha\varepsilon=0,$$
$$\alpha=v^2-\tilde{c}_s^2,\quad g=\alpha_1v^2-\alpha_2-K\Omega q_\varepsilon\tau^3v^2\rho^{-1},$$
$$\delta=K\Omega q_\varepsilon\tau^2v\rho^{-1}. \qquad (9)$$

(константа интегрирования равна нулю в силу граничных условий $du/d\xi\big|_{\xi\to\pm\infty}=0$).

Уравнение (9) неоднократно рассматривалось в литературе. В частности, были изучены особенности затухания уединенных волн (солитонов) при малых потерях. При отсутствии дисперсии рассматривалось затухание ударных волн в упругих средах в рамках уравнения Бюргерса [1,14,15]. Уравнение (9) описывает также распространение нелинейных ионно-звуковых волн в плазме с затуханием Ландау [16]. С граничными условиями

$$\varepsilon(-\infty)=\varepsilon_0,\quad \varepsilon(+\infty)=0 \qquad (10)$$

уравнение (9) допускает решение в виде ударных волн малой интенсивности (решение типа „перепад“) [14].

Если дисперсия несущественна, из (9) имеем стационарное уравнение Бюргергса

$$\delta\frac{d\varepsilon}{d\xi}-(\beta_N/\rho)\varepsilon^2+\alpha\varepsilon=0,$$

имеющее решение в виде ударных волн с монотонным профилем

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(1-\text{th}\,\frac{x-vt}{b}\right),\quad b=\frac{2\rho\delta}{\beta_N\varepsilon_0}.$$

В общем случае характер решения уравнения (9) с учетом влияния дисперсии будем определять качественно, используя анализ работы [14]. Заметим, что явное аналитическое решение уравнения (9) при дополнительных ограничениях на его коэффициенты может быть получено, если следовать методике [5].

Зависимость скорости волны v от ее амплитуды ε_0 определяется формулой

$$v^2 = \tilde{c}_s^2 + \varepsilon_0 \beta_N \rho^{-1}. \quad (11)$$

Из анализа асимптотического поведения волны следует, что решение, удовлетворяющее граничным условиям (10), существует, если скорость волны $v > \tilde{c}_s$. Тогда, при $\beta_N > 0$, согласно (11), возбуждаемая волна будет волной растяжения ($\varepsilon_0 > 0$), а при $\beta_N < 0$ — волной сжатия ($\varepsilon_0 < 0$).

Структура волны

Характер структуры нелинейной волны можно установить, исследуя асимптотическое поведение решений уравнения (9) с граничными условиями (10). Здесь мы будем следовать качественному анализу, проведенному в работе [14].

Структура ударной волны зависит от соотношения между дисперсионным и диссипативным параметрами (g, δ) в уравнении (9). При достаточно малых значениях параметра δ ударная волна имеет осциллирующую структуру. Если же параметр диссипации превышает некоторое критическое значение $\delta > \delta_*$, то имеем ударную волну без осцилляций с монотонным профилем [14]. Критические значения параметра диссипаций δ_*, отвечающие монотонному и осцилляционному профилям волны, определяются формулой

$$\delta_* = \sqrt{4|\alpha g|}.$$

Используя (11), это равенство можно представить в виде $|\varepsilon_0| = \varepsilon_*$, где критическое значение амплитуды

$$\varepsilon_* = \frac{(K\Omega q_\varepsilon v \tau^2)^2}{|\beta_N|\,|\rho(\alpha_1 v^2 - \alpha_2) - K\Omega q_\varepsilon \tau^3 v^2|} \approx \left(\frac{K\Omega}{kT}\right)(q_0 \tau \Omega).$$

Таким образом, ударная волна имеет осцилляционную структуру при $|\varepsilon_0| > \varepsilon_*$ и монотонную при $|\varepsilon_0| < \varepsilon_*$. Критическое значение амплитуды ε_*, отделяющее ударные волны с осцилляционной структурой от монотонных ударных волн, определяется модулем упругости, температурой среды, интенсивностью генерации дефектов и временем их релаксации, а также дилатационным объемом дефектов. При характерных значениях параметров (для дефектов вакансионного типа) $K = 5 \cdot 10^{11}$ dyn/cm, $q_0 \tau = 10^9\,\mathrm{cm}^{-3}$, $\beta_N = 10^{12}$ dyn/cm, $\rho = 8\,\mathrm{g/cm}^3$, $|\Omega| = 10^{-23}\,\mathrm{cm}^3$ получаем $\varepsilon_* = 4 \cdot 10^{-2}$.

Пространственный масштаб изменения решения уравнения (9), очевидно, определяет ширину ударной волны (L), т. е. расстояние, на котором затухают осцилляции [14]. Оценка дает

$$L = \frac{(4|g|/\delta)\sqrt{\varepsilon_* + |\varepsilon_0|}}{\sqrt{\varepsilon_* + |\varepsilon_0|} - \sqrt{\varepsilon_*}}. \quad (12)$$

Период осцилляции (d) находится из решения линеаризованного в окрестности однородного решения $\varepsilon - \alpha\rho/\beta_N$ уравнения (9)

$$g\,\frac{d^2\varepsilon}{d\xi^2} - \delta\,\frac{d\varepsilon}{d\xi} + \alpha\varepsilon = 0.$$

В результате получаем

$$d = (4\pi|g|/\delta)\sqrt{\frac{\varepsilon_*}{|\varepsilon_0| - \varepsilon_*}}. \quad (13)$$

Согласно (13), период осцилляции с ростом амплитуды нелинейной волны ε_0 уменьшается и в пределе $|\varepsilon_0| \gg \varepsilon_*$ принимает значение, равное

$$d \approx 4\pi\sqrt{\rho g/|\beta_N \varepsilon_0|}.$$

Обсуждение результатов

Из условия существования осцилляционной ударной волны ($\varepsilon_* < |\varepsilon_0|$) и малости ее амплитуды $|\varepsilon_0| \ll 1$ получаем ограничение на ее скорость

$$\tilde{c}_s^2\bigl(1 + \varepsilon_*(|\beta_N|/\rho\tilde{c}_s^2)\bigr) < v^2 < \tilde{c}_s^2\bigl(1 + |\beta_N|/\rho\tilde{c}_s^2\bigr).$$

Так как монотонные ударные волны могут возникать в средах с достаточно большими значениями $\varepsilon_*(\varepsilon_* > |\varepsilon_0|)$, получаем следующие ограничения на скорости этих волн:

$$v^2 < \tilde{c}_s^2\bigl(1 + |\beta_N|/4\rho\tilde{c}_s^2\bigr).$$

В твердых телах с отрицательной дисперсией ($g > 0$) осциллирующая структура находится перед фронтом волны. В средах с положительной дисперсией ($g < 0$), наоборот, осциллирующий „хвост“ остается позади фронта.

Параметры L и d осциллирующих ударных волн, согласно формулам (12) и (13), определяются величиной дисперсионного параметра g. Поэтому для возникновения этих волн необходимо наличие дисперсии в системе. Монотонные же ударные волны в отличие от осцилляционных волн могут существовать и в системах без дисперсии.

Обсудим теперь вклад дефектов в дисперсионные свойства среды. Поправка за счет неравновесных дефектов к дисперсионным параметрам важна, если $K\Omega q_\varepsilon \tau^3 v^2 \rho^{-1} > \alpha_1 v^2 - \alpha_2$. Отсюда находим следующее ограничение на концентрацию дефектов:

$$q_0 \tau > \frac{\rho(\alpha_1 v^2 - \alpha_2)kT}{(v\tau K\Omega)^2}.$$

Это условие может выполняться для достаточно больших концентраций дефектов ($q_0\tau \geq 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$), характерных для мощных импульсных лазерных воздействий на большинство твердых тел. Однако если упругие линейные модули решетки и дилатационный объем дефектов и время их релаксации велики, то поправки за счет дефектов становятся существенными и при меньших их концентрациях.

Таким образом, в твердом теле, находящемся под воздействием внешних потоков энергии, приводящих к генерации неравновесных точечных дефектов, распространение волны деформации может происходить в форме ударных волн малой интенсивности. Ударные волны могут иметь как осцилляционный профиль, так и монотонный. Существование таких волн определяется диссипативными процессами генерации (рекомбинации) дефектов (интенсивность образования дефектов, время рекомбинации), дисперсией среды, а также упругими свойствами решетки и подсистемы дефектов.

Получено модельное уравнение, описывающее распространение нелинейной волны упругой деформации в упругой среде с учетом генерационно-рекомбинационных процессов. Оно является по своей структуре „конгломератом“ стационарных уравнений Кортевега-де-Вриза и Бюргерса. Приведены количественные оценки вкладов в упругие линейные модули и пространственную дисперсию, обусловленных конечностью скорости рекомбинации дефектов. Получены критические концентрации дефектов, когда их влияние на распространение волны деформации значительно.

В заключение заметим, что значительный интерес также представляет распространение волн деформации в среде со скоплениями точечных дефектов (вакансионных и межузельных кластеров и т. д.). Волна деформации, нелинейно взаимодействуя с такими дефектами, может создавать в области взаимодействия локальное повышение температуры, следовательно усиление рекомбинационных процессов. Последние в свою очередь сопровождаются локальным тепловыделением и деформацией среды. Дальнейшее изучение нелинейного взаимодействия полей деформации и температуры с дефектами структуры (как точечными, так и их кластерами) представляет интерес как с научной точки зрения, так и с точки зрения практических приложений. Распространяющаяся волна деформации несет на себе информацию о различных дефектах конденсированной среды, что необходимо для диагностики дефектной структуры твердых тел.

Автор благодарит Л.А. Шелепина и Е.В. Зеленова за полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

[1] *Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К.* Нелинейные волны деформаций. М.: Наука, 1981. 245 с.
[2] *Самсонов А.М., Дрейден Г.В., Порубов А.В., Семенова И.В.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 21. С. 61–68.
[3] *Дрейден Г.В., Островский Ю.И., Самсонов А.М.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 10. С. 2040–2047.
[4] *Samsonov A.M., Dreiden G.V., Porubov A.V., and Semenova I.V.* // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 57. N 10. P. 5778–5787.
[5] *Samsonov A.M.* // Appl. Analysis. 1995. Vol. P. 85–100.
[6] *Toda M.* Springer Series in Solid State Sciences. Vol. 20. Theory of Nonlinear Lattices. Berlin: Springer, 1981.
[7] *Лямшев Л.М.* // УФН. 1981. Т. 135. № 3. С. 637–665.
[8] *Косевич А.М.* Основы механики кристаллической решетки. М.: Наука, 1972. 280 с.
[9] *Мирзоев Ф., Шелепин Л.А.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 8. С. 23–26.
[10] *Карабутов А.А., Платоненко В.Т., Руденко О.В., Чупрына В.А.* // Вестник МГУ. Сер. Физ. 1984. Т. 25. № 3. С. 88–91.
[11] *Быковский Ю.А.* Ионная и лазерная имплантация металлических материалов. М.: Энергоатомиздат, 1991. 320 с.
[12] *Мирзоев Ф., Панченко В.Я., Шелепин Л.А.* // УФН. 1996. Т. 166. № 1. С. 3–32.
[13] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 350 с.
[14] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
[15] *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформаций в стержнях и пластинах. Горький, 1985. 107 с.
[16] *Пелиновский Е.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 8. С. 67–72.