

01;07

Метод интегрального уравнения в теории слабонаправляющих неоднородных оптических волноводов

© Л.И. Сотская, А.Б. Сотский

Институт прикладной оптики НАН Белоруссии,
212793 Могилев, Белоруссия
e-mail: ipo@physics.belpak.mogilev.by

(Поступило в Редакцию 15 мая 2002 г.)

Рассмотрены формулировка и реализация метода интегрального уравнения при расчете характеристик собственных и несобственных мод трехмерных слабонаправляющих неоднородных оптических волноводов. Исследовано поведение дисперсионных кривых мод диффузионных канальных волноводов в окрестности критических условий при наличии поглощения в средах и получены оценки точности восстановления профиля диэлектрической проницаемости канального волновода по дальнему полю излучения основной моды.

Введение

Волноводы оптического диапазона в большинстве случаев являются слабонаправляющими, т.е. характеризуются близкими по величине значениями диэлектрической проницаемости в своей внутренней области и окружающей среде [1,2]. Ключевым в теории таких волноводов является скалярное уравнение [3]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - V^2 b \psi = -V^2 f(\xi, \eta) \psi, \quad (1)$$

где под ψ понимается поперечная компонента электрического поля волноводной моды.

При записи (1) использовано представление диэлектрической проницаемости вида $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_s + \Delta\varepsilon_0 f(\xi, \eta)$, где ε_s и $\Delta\varepsilon_0$ — соответственно комплексная и вещественная константы; $f(\xi, \eta)$ — комплексная функция, удовлетворяющая условию $f(\xi, \eta) \rightarrow 0$ при $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty$, $\xi = xM^{-1}$, $\eta = yM^{-1}$; M — масштабный фактор, характеризующий поперечный размер волновода. В (1) фигурируют также параметры $V = k_0 M \sqrt{\Delta\varepsilon_0}$, где $k_0 = 2\pi\lambda_0^{-1}$ — волновое число вакуума, и $b = \gamma\Delta\varepsilon_0^{-1}$, где $\gamma = h^2 k_0^{-2} - \varepsilon_s$, h — постоянная распространения моды.

Для решения уравнения (1), представляющего собой при надлежащих граничных условиях на бесконечности задачу на собственные функции и собственные значения, предложен ряд численных и аналитических методов [3,4]. Наиболее полно в настоящее время изучены моды волноводов, обладающих круговой симметрией [3]. При исследовании других волноводов широкое распространение получили вариационные и сеточные методы [4]. Однако эти методы неприменимы к исследованию несобственных мод,¹ а в случае собственных мод не эффективны при условиях, близких к критическим, и при расчете полей мод на больших расстояниях от волновода. В принципе анализ соответствующих ситуаций,

необходимый, например, для определения условий одномодового режима, оптимизации оптических датчиков и решения обратных задач интегральной и волоконной оптики, может быть выполнен методом интегрального уравнения по площади [3,6,7]. Но к настоящему времени этот метод был реализован лишь для собственных мод однородных волноводов, характеризующихся ступенчатыми вещественными функциями $f(\xi, \eta)$ [3,6,7]. Настоящая работа посвящена разработке метода интегрального уравнения применительно к исследованию различных типов мод неоднородных волноводов, описываемых комплексными функциями $f(\xi, \eta)$.

Метод интегрального уравнения

Допустим, что функция $f(\xi, \eta)$ является аналитической в прямоугольной области G с границами $\xi = \pm\alpha$, $\eta = \pm\beta$ и принимает пренебрежимо малые значения вне этой области. Полагая на этом основании $f(\xi, \eta) \equiv 0$ вне G , далее мы будем иметь дело с прямоугольными диэлектрическими волноводами, имеющими неоднородное заполнение. Рассмотрим вначале описание собственных мод данных волноводов. Поля таких мод являются квадратично интегрируемыми функциями [2,5], допускающими представление в виде интеграла Фурье

$$\psi(\xi, \eta) = \int_{\Gamma_1} \exp(-ik\xi) \hat{\psi}(k, \eta) dk, \quad (2)$$

где контур интегрирования Γ_1 совпадает с вещественной осью комплексной плоскости переменной k .

Подстановка (2) в (1) приводит к неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\hat{\psi}(k, \eta)$, решение которого с учетом требования $\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} \hat{\psi}(k, \eta) = 0$ позволяет получить

¹ При классификации мод мы пользуемся терминологией работы [5].

соотношение

$$\psi(\xi, \eta) = V^2(4\pi)^{-1} \int_{\Gamma_1} dk (i\lambda)^{-1} \iint_G f(\xi', \eta') \psi(\xi', \eta') \times \exp[ik(\xi' - \xi) - i\lambda|\eta' - \eta|] d\xi' d\eta'. \quad (3)$$

Здесь $l = 1$, $\lambda = \sqrt{-V^2b - k^2}$,

$$\operatorname{Re} \lambda < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} b < 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} \lambda > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} b > 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} \lambda < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} b = 0. \quad (6)$$

Разрезы для функции $\lambda(k)$ показаны на рис. 1 волнистыми линиями. Они начинаются в точках ветвления $k = \pm k_b$ ($k_b = \lambda(0)$) и располагаются вдоль линий $\operatorname{Im} k = (\operatorname{Re} k)^{-1} V^2 \operatorname{Im} b$, которые при условиях (4), (5) и (6) имеют номера соответственно 1, 2 и 3 (линия 3 совпадает с мнимой осью). Согласно (4)–(6), на вещественной оси $\operatorname{Im} \lambda < 0$, что обеспечивает сходимость внешнего интеграла в (3).

Выражение (3) представляет собой интегральное уравнение для функции $\psi(\xi, \eta)$ внутри G и прямую расчетную формулу для поля моды вне волновода по внутреннему полю. Заметим, что если в (3) изменить порядок интегрирования и воспользоваться представлением функции Макдональда

$$K_0(V\sqrt{b}R) = -0.5i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-1} \times \exp[ik(\xi' - \xi) - i\lambda|\eta' - \eta|] dk \quad (7)$$

(здесь $R = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$), то можно прийти к известному интегральному уравнению, приведенному, например, в [6]. Однако для исследования неоднородных волноводов формулировка (3) оказывается предпочтительней, поскольку она не требует интегрирования сингулярной функции (7). Еще одно преимущество данной формулировки состоит в отсутствии проблемы выбора нужной ветви функции Макдональда при описании несобственных мод волновода. Но в этом случае уравнение (3) требует некоторой модификации. Действительно, для несобственных мод условия (4) и (5) должны быть заменены на [5]

$$\operatorname{Re} \lambda < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} b > 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \lambda > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} b < 0. \quad (9)$$

Тогда в областях, заключенных между кривыми 2 (рис. 1) в случае (8) и кривыми 1 в случае (9), будет выполняться неравенство $\operatorname{Im} \lambda > 0$. В результате при сохранении в качестве контура интегрирования в (2) и (3) вещественной оси мы приходим к расходящемуся интегралу по переменной k . Это естественно, поскольку несобственные моды имеют возрастающие при удалении

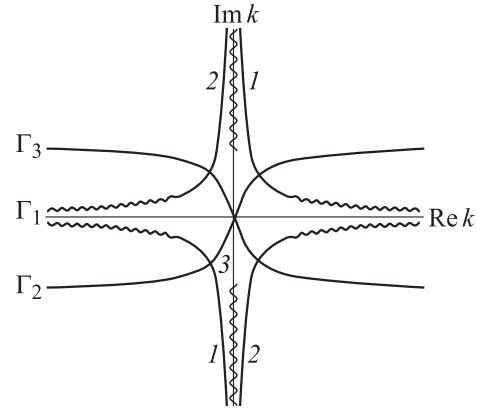


Рис. 1. Расположение контуров интегрирования Γ_l на комплексной плоскости.

от волновода поля, не представимые обычным интегралом Фурье [5]. Чтобы обойти возникшую трудность, в (2) и (3) следует использовать интегралы, взятые вдоль контуров Γ_2 и Γ_3 , не совпадающих с вещественной осью.

Ситуации (9) отвечает контур Γ_2 , параллельный вещественной оси при $|k| \rightarrow \infty$ и огибающий точки ветвления так, как показано на рис. 1. На данном контуре $\operatorname{Im} \lambda < 0$ при $|k| \rightarrow \infty$, что обеспечивает существование правой части уравнения (3). При временной зависимости поля $\exp(i\omega t)$ сформулированное таким образом уравнение описывает вытекающие моды, поскольку его решения удовлетворяют уравнению (1) и имеют вид волн, распространяющихся от волновода. Чтобы убедиться в этом, предположим, что уравнение (3) выполнено. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - V^2 b \psi = \int_{\Gamma_2} F(k, \eta) \exp(-ik\xi) dk,$$

$$F(k, \eta) = -\frac{V^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \eta) \psi(x, \eta) \exp(ikx) dx.$$

Здесь $F(k, \eta)$ является целой функцией k , причем $F(k, \eta) = O(k^{-1})$, при $|\operatorname{Re} k| \rightarrow \infty$ [8]. В результате контур Γ_2 в приведенном выражении допускает деформацию к вещественной оси, что в соответствии с теоремой Фурье [8] означает тождественное выполнение (1). Для оценки поведения функции $\psi(\xi, \eta)$ вне волновода учтем, что при $|k_b \rho| \rightarrow \infty$ выражение (3) при $l = 1, 2, 3$ может быть представлено в виде [9]

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{V^2 \exp(-ik_b \rho)}{\sqrt{8\pi i k_b \rho}} \iint_G f(\xi', \eta') \psi(\xi', \eta') \times \exp \left[i \left(\frac{\xi' \xi}{\rho} + \frac{\eta' \eta}{\rho} \right) \right] d\xi' d\eta'. \quad (10)$$

Отмеченное выше поведение полей мод является следствием (10), а также вытекающих из (9) нера-

венств $\text{Re } k_b > 0$, $\text{Im } k_b > 0$. Заметим, что при условиях (4)–(6) $\text{Im } k_b < 0$. Это в согласии с (10) означает убывание полей собственных мод при удалении от волновода.

Неравенствам (8) отвечает контур Γ_3 на рис. 1. При $|k| \rightarrow \infty$ этот контур параллелен вещественной оси и на нем $\text{Im } \lambda < 0$. Доказательство адекватности соответствующего интегрального уравнения уравнению (1) аналогично представленному выше. В данном случае из (10) и вытекающих из (8) неравенств $\text{Re } k_b < 0$, $\text{Im } k_b > 0$ следует, что поля рассматриваемых несобственных мод распространяются из бесконечности к волноводу. Такие моды не имеют определенного физического смысла [5]. В то же время их рассмотрение оказывается полезным при выяснении критических условий для собственных мод (см. ниже).

Для численного решения сформулированных интегральных уравнений воспользуемся методом квадратур, основанным на замене интеграла по пространственным переменным в (3) конечной суммой [10]. С целью такой замены покроем сечение волновода прямоугольной сеткой эквидистантных линий с координатами

$$\xi_i = i\Delta\xi \quad (i = 0, \dots, \pm m; \Delta\xi = \alpha m^{-1}),$$

$$\eta_j = j\Delta\eta \quad (j = 0, \dots, \pm n; \Delta\eta = \beta n^{-1}).$$

В результате область G будет разбита на $2m \times 2n$ прямоугольников со сторонами $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$. Далее выполним линейную интерполяцию произведения $\Phi(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)\psi(\xi, \eta)$ в пределах каждого прямоугольника по правилу

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= \Phi_0 + \Phi'_\xi(\xi - \xi_0) + \Phi'_\eta(\eta - \eta_0), \\ \Phi_0 &= 0.25[\Phi(\xi_i, \eta_j) + \Phi(\xi_{i+1}, \eta_j) \\ &\quad + \Phi(\xi_i, \eta_{j+1}) + \Phi(\xi_{i+1}, \eta_{j+1})], \\ \Phi'_\xi &= (2\Delta\xi)^{-1}[\Phi(\xi_{i+1}, \eta_j) + \Phi(\xi_{i+1}, \eta_{j+1}) \\ &\quad - \Phi(\xi_i, \eta_j) - \Phi(\xi_i, \eta_{j+1})], \\ \Phi'_\eta &= 0.5(\Delta\eta)^{-1}[\Phi(\xi_i, \eta_{j+1}) + \Phi(\xi_{i+1}, \eta_{j+1}) \\ &\quad - \Phi(\xi_i, \eta_j) - \Phi(\xi_{i+1}, \eta_j)], \end{aligned} \quad (11)$$

где $\xi_0 = 0.5(\xi_{i+1} + \xi_i)$, $\eta_0 = 0.5(\eta_{j+1} + \eta_j)$.

С учетом (11) пространственные интегралы в (3) приобретут вид линейной комбинации значений функции $\psi(\xi, \eta)$ в узлах интерполяции. Таким образом, полагая величины ξ и η в (3) равными ξ_μ ($\mu = 0, \dots, \pm m$) и η_ν ($\nu = 0, \dots, \pm n$) и вводя комбинированные индексы $\kappa = (m - \mu + 1)(2n + 1) + \nu - n$, $\sigma = (m - i + 1)(2n + 1) + j - n$, мы придем к однородной алгебраической системе

$$\sum_{\sigma=1}^N M_{\kappa\sigma} X_\sigma = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, N). \quad (12)$$

Здесь $N = (2m + 1)(2n + 1)$, $X_\sigma = \psi(\xi_i, \eta_j)$, $i = m - \text{Int}(\sigma(2n + 1)^{-1})$ (операция $\text{Int}(\dots)$ означает выде-

ление целой части числа), $j = \sigma + n - (2n + 1) \times (m + 1 - i)$. Величины $M_{\kappa\sigma}$ представляются суммой трех интегралов:

$$\int_{\Gamma_1} \lambda^{-1} D_1 D_2 dk, \quad \int_{\Gamma_1} \lambda^{-1} S_1 D_2 dk, \quad \int_{\Gamma_1} \lambda^{-1} D_1 S_2 dk, \quad (13)$$

где

$$D_1 = (ik)^{-1} (E_1^{(1)} - E_1^{(0)}),$$

$$S_1 = -U(i - \mu)k^{-2} [(A_1 - 1)E_1^{(1)} - (A_1 + 1)E_1^{(0)}],$$

$$D_2 = -(i\lambda)^{-1} (E_2^{(1)} - E_2^{(0)}),$$

$$S_2 = U(\nu - j - 1)\lambda^{-2} [(A_2 - 1)E_2^{(1)} + (A_2 + 1)E_2^{(0)}],$$

$$A_1 = 0.5ik\Delta\xi, \quad A_2 = -0.5i\lambda\Delta\eta,$$

$$E_1^{(l)} = \exp[2A_1(I + l)], \quad E_2^{(l)} = \exp[2A_2(J + l)],$$

$$I = (i - \mu)U(i - \mu) + (\mu - i - 1)[1 - U(i - \mu)],$$

$$J = (\nu - j - 1)U(\nu - j - 1) + (j - \nu)[1 - U(\nu - j - 1)],$$

$U(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $U(x) = 0$ при $x < 0$.

Нетрудно видеть, что подынтегральные функции в (13) непрерывны, и при $|k| \rightarrow \infty$ их абсолютные значения имеют порядок $|k|^{-2}$. При этом интегралы (13) сходятся равномерно и их численный расчет не вызывает затруднений.

Ключевым моментом в решении системы (12) является отыскание комплексных значений спектрального параметра b , обращающихся в нуль определитель матрицы M ($\det M$). В этой связи отметим, что переход от условий (4) к (8) и от (5) к (9) происходит за счет деформации контуров интегрирования в (3) без пересечения точек ветвления функции $\lambda(k)$ (рис. 1). Отсюда следует, что при $V \neq 0$ $\det M$ является аналитической функцией комплексной переменной b всюду, за исключением особой точки $b = 0$ (при $V^2 b = 0$ происходит слияние двух точек ветвления функции $\lambda(k)$, вследствие чего интегралы (13) становятся расходящимися). В результате для решения трансцендентного уравнения $\det M = 0$ оказывается эффективным метод контурного интегрирования [11].

Как свидетельствуют расчеты, при условии $\det M = 0$ ранг матрицы M равен $N - 1$. Это позволяет выразить все компоненты вектора X через одну из них, т.е. рассчитать пространственное распределение поля моды. Заметим еще, что погрешность решения уравнения (3) методом квадратур имеет тот же порядок, что и погрешность замены пространственного интеграла в (3) конечной суммой [10]. Последняя погрешность при интерполяции (11) является малой порядка $[\max(\Delta\xi, \Delta\eta)]^2$. Это обстоятельство может быть использовано для сокращения объема вычислений (см. ниже).

Расчет канальных волноводов в окрестности критических условий

Благодаря тому что уравнение (3) сформулировано относительно поля моды во внутренней области волновода, в рассматриваемом подходе отсутствуют характерные для вариационных и сеточных методов проблемы включения в расчетную схему значений поля на значительном удалении от волновода. Это определяет эффективность метода интегрального уравнения при исследовании мод в окрестности критических условий. Исследования такого рода для прозрачных однородных волноводов кругового и эллиптического сечений выполнены в работах [6,7]. В то же время актуальным является учет неоднородности сред и наличия в них поглощения. Слабоизученным является также переход собственных мод в несобственные. В настоящем разделе соответствующие вопросы освещены на примерах исследования неоднородных оптических волноводов канального типа.

Канальные волноводы, внедренные в приповерхностную область диэлектриков, используются во многих устройствах интегральной оптики [1]. Для таких волноводов характерен большой (по сравнению с $\Delta\epsilon_0$) скачок диэлектрической проницаемости на их поверхности [1]. В результате в рамках скалярного приближения моды данных волноводов описываются нечетными (относительно оси $\eta = 0$) собственными функциями уравнения (1) при условии $f(\xi, -\eta) = f(\xi, \eta)$ [12,13].

Рассмотрим диффузионные канальные волноводы с

$$f(\xi, \eta) = 0.5(1 + i\delta) \exp(-\eta^2) \times [\operatorname{erf}(\xi + 0.5\phi) - \operatorname{erf}(\xi - 0.5\phi)], \quad (14)$$

где δ и ϕ — вещественные параметры, характеризующие поглощение в средах и относительную ширину полоски диффузанта [1].

В качестве границ области G выберем $\beta = 2.5$ и α , удовлетворяющее уравнению

$$[\operatorname{erf}(\alpha + 0.5\phi) - \operatorname{erf}(\alpha - 0.5\phi)] [2 \operatorname{erf}(0.5\phi)]^{-1} = \exp(-\beta^2).$$

При таком выборе свойства прямоугольного волновода с неоднородным заполнением практически неотличимы от свойств волновода, описываемого функцией (14) во всем пространстве. Благодаря четности функции (14) система (12) может быть сформулирована только относительно значений $\psi(\xi_j, \eta_j)$ в четвертой координатной четверти. В этом случае размерность системы (12) определяется значением $N = (m + 1)(n + 1)$. Представленные ниже расчетные данные получены в результате решения данной системы при $m = n$.

При получении аналитических оценок зависимости критических значений V (V_c) от параметра ϕ представляет интерес рассмотрение предельного случая функции (14), реализующегося при $\phi \rightarrow 0$ [14]. В силу

асимптотического разложения

$$0.5[\operatorname{erf}(\xi + 0.5\phi) - \operatorname{erf}(\xi - 0.5\phi)] = \Phi(\sqrt{\pi})^{-1} \exp(-\xi^2) + O(\phi^3), \quad (15)$$

при $\phi \rightarrow 0$ мы приходим к уравнению (1) с функцией

$$f(\xi, \eta) = (1 + i\delta) \exp(-\rho^2). \quad (16)$$

Результаты решения уравнения $\det M = 0$ при условиях (16) и $\alpha = \beta = 2.5$ представлены в табл. 1 и на рис. 2. Табл. 1 иллюстрирует зависимость корней уравнения $\det M = 0$ от параметра дискретизации волноводной области m при $\delta = -0.001$ и значениях V , близких к критическому для основной моды волновода. При этом $V = 2.55$ отвечает несобственной моде (случай (8)), а $V = 2.65$ — собственной. Согласно табл. 1, сходимость результатов в окрестности критических условий является довольно медленной. В такой ситуации целесообразно учесть отмеченный выше факт квадратичной зависимости вычислительной погрешности от шага дискретизации волноводной области, выражающийся соотношением

$$b(m) = b_0 + Cm^{-2} + O(m^{-3}), \quad (17)$$

где $b(m)$ — нуль $\det M$, соответствующий параметру дискретизации m ; $b_0 = b(\infty)$; C — некоторая постоянная.

Пренебрегая в (17) малой $O(m^{-3})$, имеем

$$b_0 = b(m_1) + m_2^2 [b(m_2) - b(m_1)] (m_2^2 - m_1^2)^{-1}. \quad (18)$$

Значения b_0 , рассчитанные на основании (18) при $m_1 = m$, $m_2 = m + 8$, приведены в табл. 1. Видно, что выражение (18) позволяет получить устойчивую оценку b_0 при сравнительно небольших значениях m . Еще

Таблица 1. Зависимость расчетных b от параметра дискретизации волноводной области m

V	m	$\operatorname{Re} b \cdot 10^3$	$\operatorname{Re} b_0 \cdot 10^3$	$\operatorname{Im} b \cdot 10^3$	$\operatorname{Im} b_0 \cdot 10^3$
2.550	8	-3.337	-2.047	3.278	1.576
	16	-2.370	-2.019	2.001	1.591
	24	-2.175	-2.016	1.773	1.592
	32	-2.105	-2.016	1.694	1.593
	40	-2.073	-2.016	1.658	1.593
	48	-2.055	-	1.638	-
2.650	8	1.565	4.457	-0.1003	-0.1363
	16	3.734	4.583	-0.1273	-0.1358
	24	4.206	4.595	-0.1320	-0.1358
	32	4.376	4.597	-0.1337	-0.1358
	40	4.456	4.597	-0.1344	-0.1358
	48	4.499	-	-0.1348	-
3.486	8	91.96	103.9	-0.3018	-0.3327
	16	100.9	104.2	-0.3250	-0.3334
	24	102.8	104.2	-0.3297	-0.3336
	32	103.4	104.2	-0.3314	-0.3336
	40	103.7	104.2	-0.3322	-0.3336
	48	103.9	-	-0.3326	-

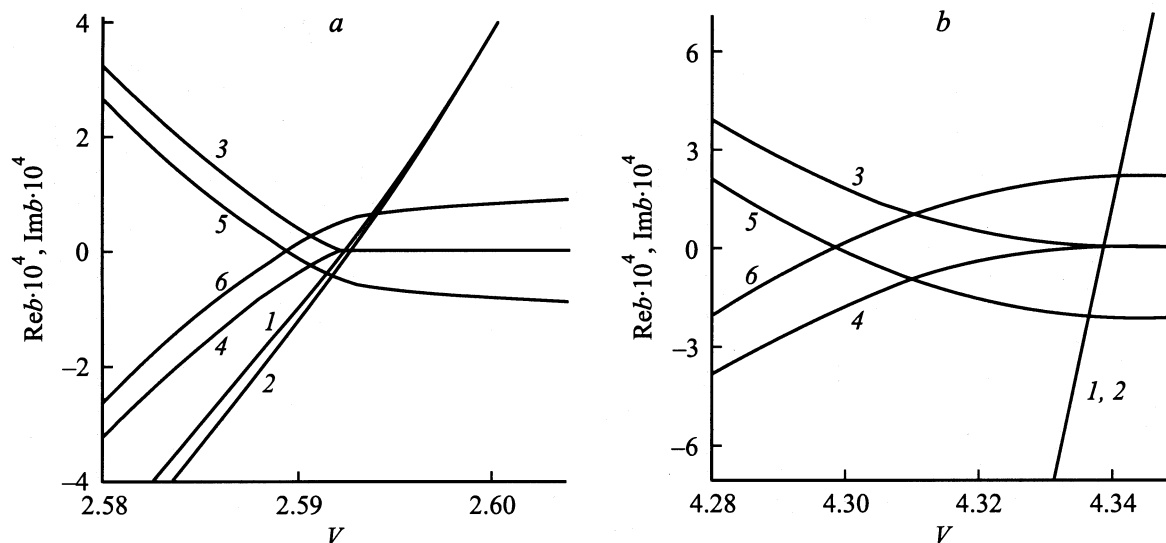


Рис. 2. Зависимости $b(V)$ в окрестности критических условий для основной (а) и первой высшей (б) мод канального волновода. 1 ($\delta = 0$), 2 ($\delta = \pm 10^{-3}$) — $\text{Re } b(V)$; 3, 4 ($\delta = 0$), 5 ($\delta = -10^{-3}$), 6 ($\delta = 10^{-3}$) — $\text{Im } b(V)$.

более эффект от использования (18) выражен при существенном отклонении V от критического значения. В табл. 1 об этом свидетельствуют данные, относящиеся к функции (14), которые получены при $\phi = 2$, $\delta = -0.001$, $V = 3.486$ (детально соответствующий волновод исследован в следующем разделе).

Чтобы протестировать полученные данные, заметим, что моды радиально-симметричного волновода, описываемого функциями (16) при $\rho < \beta$ и $f(\xi, \eta) \equiv 0$ при $\rho > \beta$, допускают независимый расчет методом Рунге–Кутты [3]. Его реализация привела к значениям $b = b_1 = -2.044 \cdot 10^{-3} + i1.622 \cdot 10^{-3}$ при $V = 2.55$ и $b = b_2 = 4.561 \cdot 10^{-3} - i1.357 \cdot 10^{-4}$ при $V = 2.65$, которые близки к табличным b_0 . Некоторое расхождение результатов обоих методов объясняется только различием использованных областей, где $f(\xi, \eta) \equiv 0$, поскольку решение уравнения $\det M = 0$ при условии $f(\xi, \eta) \equiv 0$ и при $\rho > \beta$ привело к значениям b_0 , совпавшим в приведенных десятичных разрядах с b_1 и b_2 (при соответствующих V и $m_1 \geq 32$).

О поведении зависимостей $b(V)$ в окрестности критических условий для основной ψ_{11} и первой высшей ψ_{21} мод канального волновода (μ и ν в обозначении моды $\psi_{\mu\nu}$ равны количеству максимумов функции $|\psi(\xi, \eta)|$ вдоль осей 0ξ и 0η , расположенных при $\eta > 0$) позволяет судить рис. 2. Представленные на нем кривые рассчитаны с использованием соотношения (18) при $m_1 \geq 24$, $m_2 = m_1 + 8$.

Рассмотрим вначале зависимости $b(V)$, соответствующие $\delta \neq 0$. Их вид позволяет заключить, что вещественная и мнимая части b не обращаются в нуль одновременно. Поэтому, поскольку $\det M$ является аналитической функцией b и V при $b \neq 0$, $V \neq 0$, решение уравнения $\det M = 0$ приводит к непрерывной зависимости $b(V)$, означающей, в частности, непрерывный

переход собственной моды в несобственную. Как следует из (4), (5), (8), (9), этот переход происходит при $V = V_c$, где V_c является корнем уравнения $\text{Im } b(V_c) = 0$. Из рис. 2 видно, что в окрестности $V = V_c$ собственная ($V > V_c$) и несобственная ($V < V_c$) моды являются быстрыми ($\text{Re } b < 0$). Данное утверждение справедливо как при $\delta > 0$, так и при $\delta < 0$, поскольку изменение знака δ приводит лишь к изменению знака $\text{Im } b$, оставляя неизменным значение $\text{Re } b$ (рис. 2). Формально это объясняется тем, что решения уравнений (1) и (3), отвечающие противоположным знакам δ в (14) и (16), являются комплексно-сопряженными функциями. В то же время эти решения имеют различный физический смысл. Если в случае $\delta < 0$ собственная мода при переходе V из диапазона $V > V_c$ в диапазон $V < V_c$ становится нефизичной (случай (8)), то при $\delta > 0$ она трансформируется в допускающую экспериментальное наблюдение вытекающую моду. Последняя ситуация может иметь место как при рассмотрении поглощающих сред, если потери в окружающей среде превышают потери в волноводном канале, так и при наличии в волноводе усиления.

Предельный случай $\delta = 0$ является особым, поскольку в нем $b = 0$ при $V = V_c$ [6]. Как уже отмечалось, при $b = 0$ матричные элементы системы (12) становятся сингулярными, поэтому строгий расчет соответствующих V_c требует разработки специального алгоритма [6]. Проще, однако, получить оценку V_c , выполнив экстраполяцию зависимости $\text{Re } b(V)$, допускающую расчет в диапазонах $V < V_c$ и $V > V_c$, соответствующих $|\text{Re } b| \geq d > 0$. Корректность такой экстраполяции видна из рис. 2, где использовано $d = 10^{-5}$. Здесь зависимость $\text{Re } b(V)$ при $V < V_c$ относится к двум несобственным модам, описываемым комплексно-сопряженными функциями $\psi(\xi, \eta)$.

Таблица 2. Критические V для основной и первой высшей мод канального волновода

ϕ	δ	$V_c^{(11)}$	$\bar{V}_c^{(11)}$	$V_c^{(21)}$	$\bar{V}_c^{(21)}$
0.5	0	4.905	4.881	8.169	8.169
0.5	$\pm 10^{-3}$	4.901	4.875	8.092	8.094
1	0	3.520	3.451	5.776	5.777
1	$\pm 10^{-3}$	3.516	3.447	5.722	5.723
1.5	0	2.941	2.819	4.714	4.717
1.5	$\pm 10^{-3}$	2.937	2.815	4.671	4.673

Из проведенного рассмотрения следует, что функции $V_c(\delta)$ являются четными и достигают своих максимумов при $\delta = 0$. В частности, согласно рис. 2, $V_c(\pm 0.001) = 2.589$, $V_c(0) = 2.592$ для моды ψ_{11} и $V_c(\pm 0.001) = 4.299$, $V_c(0) = 4.339$ для моды ψ_{21} . Отмеченная закономерность сохраняется и в случае модели (14). Об этом свидетельствует табл. 2, в которой приведены критические значения V , соответствующие различным ϕ и δ . Здесь через $V_c^{(\mu\nu)}$ обозначено V_c для моды $\psi_{\mu\nu}$ волновода с функцией $f(\xi, \eta)$ вида (14), найденное из зависимости $b(V)$ по описанной выше схеме,

$$\bar{V}_c^{(\mu\nu)} = V_c^{(0)} \sqrt{\phi^{-1} \sqrt{\pi}}, \quad (19)$$

где $V_c^{(0)}$ — указанное выше значение V_c для моды $\psi_{\mu\nu}$ волновода с $f(\xi, \eta)$ вида (16).

Выражение (19) представляет собой асимптотическое приближение для $V_c^{(\mu\nu)}$, вытекающее из соотношений (1), (14), (15), (16). Согласно табл. 2, оно вполне пригодно для оценки условий одномодового режима при $\phi \leq 1.5$.

Восстановление профиля канального волновода

Решение обратной задачи о восстановлении функций профиля диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon(x, y) = \epsilon(x, y) - \epsilon_0$ неоднородных оптических волноводов играет важную роль при отработке технологии получения волноводов с заданными характеристиками [1,15,16]. Среди известных методов восстановления $\Delta\epsilon(x, y)$ своей универсальностью отличаются методы, в которых измеряется пространственное распределение интенсивности основной волноводной моды. В них восстанавливается поперечная компонента электрического поля моды $\psi(x, y)$, подстановка которой в (1) дает прямую расчетную формулу для $\Delta\epsilon(x, y)$ [15,16]. В [17] при исследовании планарных волноводов с $\epsilon(x, y) = \epsilon(y)$ предложен способ реализации этой процедуры, основанный на измерении углового распределения интенсивности излучения моды в дальней зоне при последующем нахождении $\epsilon(y)$ с использованием техники аналитического продолжения. В настоящем разделе рассмотрено применение метода

интегрального уравнения к оценке эффективности аналогичного подхода в случае трехмерных волноводов.

Пусть основная мода оптического волновода, расположенного в области $z < 0$, излучается из торца волновода, совмещенного с плоскостью $z = 0$, в полупространство $z > 0$, заполненное однородной средой с волновым числом k_a . Интенсивность излучения детектируется матрицей фотоприемников, расположенной в плоскости $z = L$. Допустим, что в сечении волновода имеется две оси симметрии: $x = 0$ и $y = 0$ (в случае канального волновода, расположенного в области $y > 0$, ось симметрии $y = 0$ обеспечивается зеркальной поверхностью, приводимой в контакт с поверхностью волновода [17]). Тогда, если мода поляризована вдоль оси Ox , в рамках скалярного приближения для компонент электрического поля имеем [15,16]

$$E_x \Big|_{z=+0} = D\psi(x, y), \quad E_y \equiv 0, \quad (20)$$

где D — некоторая постоянная.

В случае прозрачных сред измеряемая интенсивность S излучения моды описывается при условии (20) и $L \rightarrow \infty$ выражениями [15,16]

$$S(k, \varphi) = \left(\sqrt{1 - k^2}\right)^3 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) [\hat{\psi}(k, \varphi)]^2, \quad (21)$$

$$\hat{\psi}(k, \varphi) = \sqrt{s} \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) \times \exp[ikk_a(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] dx dy. \quad (22)$$

Здесь $\hat{\psi}(k, \varphi)$ и $\psi(x, y)$ — вещественные функции, нормированные так, что при $\max[S(k, \varphi)] = 1$; $k = \sin \theta$; θ и φ — углы сферической системы координат, связанные с декартовыми координатами точки наблюдения x_0, y_0 соотношениями $x_0 = r_0 \cos \varphi$, $y_0 = r_0 \sin \varphi$, $r_0 = kL(\sqrt{1 - k^2})^{-1}$; коэффициент s определяется четностью моды $\psi(x, y) = s\psi(x, -y)$.

Некоторая модификация результатов работы [17] с учетом соотношений (1), (21), (22) приводит к формулам восстановления

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon(x, y) &= \gamma + (k_a k_0^{-1})^2 R_2 R_1^{-1}, \\ R_1 &= \sum_{l=0}^p u_l \sum_{i=0}^r C_i(\varphi_l) I_{il}, \quad R_2 = \sum_{l=0}^p u_l \sum_{i=0}^r C_i(\varphi_l) I_{i+1l}, \\ I_{il} &= \int_0^\infty \exp[-\alpha(\varphi_l) k^2] k^{2i-0.5(s+3)} H(k, \varphi_l) \\ &\times [k^2 + (k_0 k_a^{-1})^2 \gamma]^{-1} dk, \\ H(k, \varphi) &= \cos(kk_a x \cos \varphi) [(1 - s) \sin(kk_a y \sin \varphi) \\ &+ (1 + s) \cos(kk_a y \sin \varphi)], \end{aligned} \quad (23)$$

где $u_0 = u_p = 0.5$, $u_l = 1$ ($l = 1, 2, \dots, p-1$), а величины $C_i(\varphi_l)$, $\alpha(\varphi_l)$ и γ находятся путем минимизации

градиентным методом суммы

$$U = \sum_{l=0}^p \sum_{j=0}^q W_{lj} [\hat{\psi}(k_j, \varphi_l) - \hat{\psi}_r(k_j, \varphi_l)]^2.$$

Здесь $W_{lj} = 1$ при $S(k_j, \varphi_l) \geq \bar{S}$, $W_{lj} = 0$ при $S(k_j, \varphi_l) < \bar{S}$; $\varphi_l = 0.5\pi lp^{-1}$; $k_j = jaq^{-1}$; константы \bar{S} , a , p , q определяются динамическим диапазоном измерения интенсивности, размерами матрицы фотоприемников и объемом экспериментальной выборки; $\hat{\psi}(k_j, \varphi_l)$ выражаются через экспериментальные значения $S(k_j, \varphi_l)$ на основании (21);

$$\hat{\psi}_r(k, \varphi) = \exp[-\alpha(\varphi)k^2] [k^2 + (k_0k_a^{-1})^2\gamma]^{-1} \times \sum_{i=1}^r C_i(\varphi)k^{2i-0.5(s+3)},$$

где параметр r характеризует порядок редукции бесконечного произведения в представлении фурье-образа поля моды через его комплексные нули [17].

Следует отметить, что выражение (23) является точным (в рамках скалярного приближения) только при условиях $q > r + 1 + 0.5(1 - s)$, $r \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ [17]. Практически же значения r , p , q и L конечны, что порождает систематические ошибки восстановления. Оценка данных ошибок может быть получена с использованием метода интегрального уравнения, если рассчитать функцию $S(k, \varphi)$ при конечном L для волновода с известным распределением $\Delta\epsilon(x, y)$ и затем сравнить восстановленную функцию (23) с исходной.

Учитывая соотношения (1), (20), а также то, что функция $E_x(x, y, z)$ в области $z > 0$ подчиняется уравнению Гельмгольца и удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, находим

$$S(k, \varphi) = (k_0M)^4(\Delta\epsilon_0L)^2k_a^{-3} \times \text{Im} \left\{ \left[\iint_G f(\xi, \eta)\psi(\xi, \eta)A(M\xi - x_0, M\eta - y_0, L)d\xi d\eta \right]^* \right. \\ \times \iint_G f(\xi, \eta)\psi(\xi, \eta) \left[\exp(-ik_ar_1)\xi^{-2}r_1^{-3} \right. \\ \times \left(1 - ik_ar_1 + (M\xi - x_0)^2r_1^{-2}(3 + 3ik_ar_1 - k_a^2r_1^2) \right) \\ \left. \left. - (2\xi)^{-1} \int_0^\infty \exp(-\xi\tau) (B(\tau) + B(-\tau))d\tau \right] d\xi d\eta \right\}, \quad (24)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение,

$$A(x, y, z) = (2\xi)^{-1} \int_0^\infty \exp(-\tau\xi) [K(x, y, z + i\tau) + K(x, y, z - i\tau)]d\tau,$$

$$\xi = \sqrt{k_a^2 + k_0^2\gamma}, \quad r_1 = \sqrt{(M\xi - x_0)^2 + (M\eta - y_0)^2 + L^2},$$

$$K(x, y, z) = zr_0^{-3} \exp(-ik_ar_0)(1 + ik_ar_0),$$

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$B(\tau) = \exp(-ik_ar_2)r_2^{-3} \left\{ 1 + ik_ar_2 - (L + i\tau)^2r_2^{-2}(3 + 3ik_ar_2 - k_a^2r_2^2) + (\xi r_2)^{-2} \left[3 + 3ik_ar_2 - k_a^2r_2^2 - ((M\xi - x_0)^2 + (L + i\tau)^2)r_2^{-2}(15 + 15ik_ar_2 - 6k_a^2r_2^2 - ik_a^3r_2^3) + (M\xi - x_0)^2(L + i\tau)^2r_2^{-4}(105 + 105ik_ar_2 - 45k_a^2r_2^2 - 10ik_a^3r_2^3 + k_a^4r_2^4) \right] \right\},$$

$$r_2 = \sqrt{(M\xi - x_0)^2 + (M\eta - y_0)^2 + (L + i\tau)^2}.$$

Выражение (24) является точным и включает интегрирование функции $\psi(\xi, \eta)$ только по области G , для которой сформулировано уравнение (3). При $L \rightarrow \infty$ данное выражение переходит в (21), где

$$\hat{\psi}(k, \varphi) = \Delta\epsilon_0M^2\sqrt{s} [\gamma + (k_0k_a^{-1})^2k^2]^{-1} \times \iint_G f(\xi, \eta)\psi(\xi, \eta) \exp[ikk_aM(\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)]d\xi d\eta. \quad (25)$$

Эквивалентность представлений (22) и (25) следует из уравнения (1).

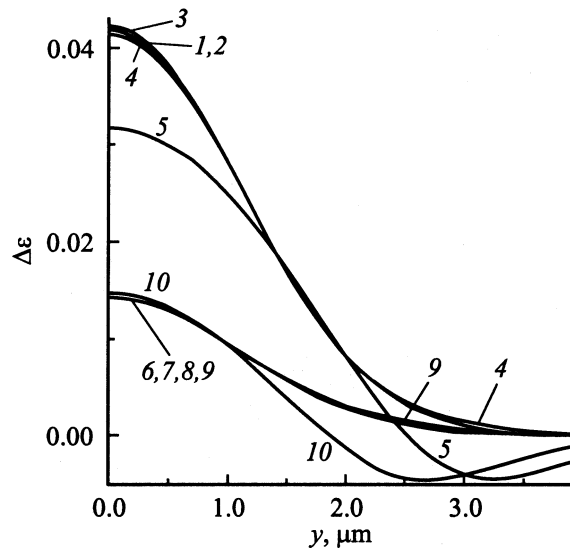


Рис. 3. Восстановление функции $\Delta\epsilon(x, y)$ канального волновода: 1-5 — $x = 0$, 6-10 — $x = 2.2 \mu\text{m}$; 1, 6 — точные функции; 2, 7 — восстановление при $L = \infty$; 3, 8 — при $L = 5 \text{ cm}$; 4, 9 — при $L = 1 \text{ cm}$; 5, 10 — при $L = 0.5 \text{ cm}$.

Результаты восстановления функции $\Delta\varepsilon(x, y)$ одно-модового (на длине волны $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$) канального волновода с $f(\xi, \eta)$ вида (14) и параметрами $\phi = 2$, $M = 1.57 \mu\text{m}$, $\Delta\varepsilon_0 = 0.05$, $\delta = 0$ представлены на рис. 3. Они получены после вычисления значений $S(k_j, \varphi_l)$ на основании выражений (24) при $L \neq \infty$ и (21), (25) при $L = \infty$. Интегралы по области G рассчитаны с использованием значений функции $\psi(\xi, \eta)$ в узлах интерполяции, найденных в результате решения системы (12) при $m = n = 48$ (в данном случае $\text{Im } b = 0$, а зависимость $\text{Re } b(m)$ совпадает с приведенной в табл. 1). В вычислениях использованы $r = 3$, $a = 0.5$, $p = 20$, $q = 25$, $\bar{S} = 10^{-6}$. Согласно рис. 3, корректное восстановление $\Delta\varepsilon(x, y)$ наблюдается при $L \geq 1 \text{ cm}$. В пределе же $L = \infty$ восстановленная функция практически неотличима от точной, что говорит, в частности, о прецизионном описании методом интегрального уравнения полей мод.

Заключение

Проведенное рассмотрение свидетельствует об эффективности метода интегрального уравнения при расчете характеристик собственных и несобственных мод неоднородных оптических волноводов. Наряду с представленными приложениями к исследованию критических условий и оценке погрешностей решения обратных задач данный метод может быть использован при анализе поляризационных эффектов, а также эффектов вытекания излучения, вызванных анизотропией сред, асимптотическое описание которых базируется на уравнении (1) [2,12,13,18,19].

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф99-125).

Список литературы

- [1] *Hutcheson L.D.* Integrated Optical Circuits and Components. New York: Marcel Dekker Inc., 1987. 397 p.
- [2] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.
- [3] *Клев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г.* // РиЭ. 1993. Т. 38. № 5. С. 769–788.
- [4] *Chiang K.S.* // Opt. and Quant. Electron. 1994. Vol. 26. N 3. P. S113–S134.
- [5] *Шевченко В.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 2. С. 257–261.
- [6] *Рожнев А.Г., Маненков А.Б.* // РиЭ. 1997. Т. 42. № 7. С. 785–792.
- [7] *Manenkov A.B., Rozhnev A.G.* // Opt. and Quant. Electron. 1998. Vol. 30. N. 2. P. 61–70.
- [8] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. Л.: ОГИЗ, 1948. 479 с.
- [9] *Sotsky A.B., Sotskaya L.I.* // Opt. and Quant. Electron. 1999. Vol. 31. N 9. P. 733–749.

- [10] *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. Т. II. М.: Наука, 1977. 399 с.
- [11] *Романенко А.А., Сотский А.Б.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 88–95.
- [12] *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д.* // РиЭ. 1979. Т. 24. № 7. С. 1245–1263.
- [13] *Сотский А.Б., Примаков И.У., Сотская Л.И.* // ЖПС. 2000. Т. 67. № 3. С. 382–387.
- [14] *Сотская Л.И., Сотский А.Б.* Отп. и спектр. 1992. Т. 72. № 2. С. 513–518.
- [15] *Freude W., Sharma A.* // J. Lightwave Technol. 1985. Vol. 3. N 3. P. 628–634.
- [16] *Hosain S.J., Meunier J.P., Bourillot E. et al.* // Fiber and Integr. Opt. 1995. Vol. 14. N 1. P. 89–107.
- [17] *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* // Отп. и спектр. 2002. Т. 92. № 1. С. 141–148.
- [18] *Сотская Л.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 9. С. 89–92.
- [19] *Sotsky A.B., Sotskaya L.I.* // Proc. SPIE. 2001. Vol. 4358. P. 212–222.