

01;09

## Преобразование полей плоских волн при скачке параметров слоя магнитоэлектрической свободной среды

© О.Н. Рыбин, Н.И. Слипченко, Л.Н. Шульга

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
61166 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 12 марта 2002 г.)

Рассмотрено преобразование плоских электромагнитных волн синхронным скачкообразным изменением во времени диэлектрической и магнитной проницаемостей в слое анизотропной свободной магнитоэлектрической среды. На толщину слоя, как и на значения скачков проницаемостей, не накладывается никаких ограничений. Данная задача решается аналитически, методом интегральных уравнений. Получены точные выражения для компоненты электрического поля во всем пространстве после скачка параметров в слое. Проведен физический анализ полученных выражений.

### Введение

Аналитическому исследованию распространения и излучения электромагнитных волн в средах со скачкообразным изменением во времени диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей посвящен целый ряд работ [1–4], значение которых трудно переоценить для развития современной радиофизики. Однако данные исследования проводились либо для скачков параметров в безграничных средах [1,2], либо для скачков параметров в полуограниченных областях [3,4]. Таким образом, логическим продолжением такого рода исследований должно быть введение еще одной границы, тем более что одномерной моделью диэлектрического волновода как раз и является диэлектрический слой [5]. Последний момент является „усиливающим“ фактором для необходимости проведения теоретических исследований преобразования волн и в магнитоэлектрическом слое при скачкообразном изменении во времени его параметров с точки зрения развития современных оптоэлектронных линий передачи.

В настоящей работе исследуется преобразование плоских электромагнитных волн (плоской монохроматической волны и гауссова импульса) в магнитоэлектрическом слое, образованном скачкообразным изменением в момент времени  $t = 0$  диэлектрической и магнитной проницаемости от значений соответственно  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  в области слоя  $x \in [0, d]$  изотропного и непроводящего магнитоэлектрического свободного пространства до значений  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  соответственно. Предполагается, что значения диэлектрической и магнитной проницаемостей в областях пространства  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  все время остаются постоянными и равными соответственно  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ .

Пусть до момента времени  $t = 0$  в однородной и изотропной непроводящей среде без границ существовала  $TM$  волна с электрической компонентой  $E_0(t, x)$ . Такое задание первичного поля позволяет легко свести данную, вообще говоря, трехмерную задачу к одномерной [6], что, однако, не мешает выявить общие зако-

номерности преобразования плоских электромагнитных волн в изотропных и непроводящих средах с резко изменяющимися параметрами в слое произвольных размеров и локализации.

Поведение электромагнитного поля в области  $x \in [0; d]$  для данной задачи ( $t > 0$ ) может быть описано интегральным уравнением Вольтерра второго рода [7], которое в данном случае примет вид

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^{+\infty} dt' \int_0^d dx' K(t, t', x, x') E(t', x'), \quad (1)$$

где  $K(t, t', x, x')$  — ядро интегрального уравнения (1) разностного типа

$$K(t, t', x, x') = [1 - m^2] \delta(t - t') \delta(x - x') - \frac{1 - a^2 m^2}{2a^2} m^2 \frac{\partial}{\partial t} \delta(v_0(t - t') - |x - x'|), \quad (2)$$

где  $m = \sqrt{\mu_0/\mu_1}$ ,  $a = \sqrt{\epsilon_0/\epsilon_1}$ ,  $v_0 = c/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ,  $c$  — скорость света в вакууме;  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака,  $\Theta(t)$  — единичная функция Хевисайда.

Решение уравнения (1) в области  $x \in [0; d]$  может быть получено методом резольвенты [8] посредством интеграла

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^{+\infty} dt' \int_0^d dx' R(t, t', x, x') F(t', x'), \quad t > 0, \quad (3)$$

где резольвента  $R(t, t', x, x')$  является решением интегрального уравнения

$$R(t, t', x, x') = K(t, t', x, x') + \int_0^{+\infty} dt'' \int_0^d dx'' K(t, t'', x, x'') R(t'', t', x'', x') F(t', x'). \quad (4)$$

Построение резольвенты  $R(t, t', x, x')$ , удовлетворяющей интегральному уравнению (4), является сложной задачей, состоящей из двух этапов: на первом этапе строится резольвента, в которой не учитывается влияние границ, а на втором — часть резольвенты, определяющая вклад поля, обусловленного возникновением в момент времени  $t = 0$  границ слоя  $x = 0$  и  $x = d$ , т. е.

$$R(t, t', x, x') = [R_1(t, t', x, x') + R_2^{MN}(t, t', x, x')] \Theta(x') \Theta(d - x'). \quad (5)$$

Выражение для резольвенты безграничной задачи уже получено в работе [4] и имеет вид

$$R(t, t', x, x') = \left[ 1 - \frac{1}{m^2} \right] \delta(t - t') \delta(x - x') - \frac{1 - a^2 m^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial t} \delta(v_1(t - t') - |x - x'|), \quad (6)$$

где  $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ .

Выражение для второй части резольвенты  $R_2^{M,N}(t, t', x, x')$  строится по принципу, изложенному в работе [7] на случай скачка в слое только лишь диэлектрической проницаемости (рис. 1). На этом рисунке схематически показана область пространства, соответствующая возникшему в нулевой момент времени слою. Причем вся эта область разбивается на зоны, которые на рис. 1 занумерованы двумя индексами. Первый индекс указывает на количество переотражений мировых линий обратных волн, существующих до соответствующего момента времени в области слоя ( $t > 0$ ), а второй указывает на количество соответственно переотражений мировых линий прямых волн.

Таким образом, согласно принципу переотражения, использованного в работе [7], можно получить выражение для второй части резольвенты  $R_2^{M,N}(t, t', x, x')$  в виде

$$R_2^{M,N}(t, t', x, x') = -\frac{1 - a^2 m^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{l=1}^M \left( \frac{1 - a^2 m^2}{1 + a^2 m^2} \right)^l \times \delta(v_1(t - t') - x + (-1)^l(x' - d/2) - (l - 1/2)d) + \sum_{s=1}^N \left( \frac{1 - a^2 m^2}{1 + a^2 m^2} \right)^s \delta(v_1(t - t') + x + (-1)^{s+1}(x' - d/2) - (s + 1/2)d) \right\}. \quad (7)$$

По смыслу (рис. 1) очевидно, что в (7) на целые переменные  $M$  и  $N$  накладывается условие в виде неравенства

$$|M - N| \leq 1. \quad (8)$$

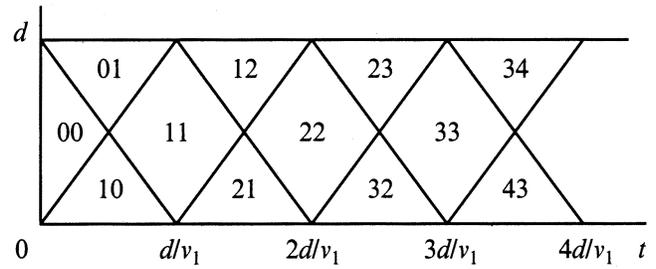


Рис. 1. Алгоритм расчета.

Кроме того, из рис. 1 нетрудно получить, что всевозможные наборы значений целых переменных  $M$  и  $N$  с точки зрения выражения (8) соответствуют вполне определенным пространственно-временным областям слоя. Последний результат можно описать посредством системы неравенств

$$M, N = N - 1, N \Rightarrow \begin{cases} x > v_1(t - (N - 1)d/v_1), \\ x > -v_1(t - (N - 1)d/v_1) + d; \end{cases}$$

$$M, N = M, M - 1 \Rightarrow \begin{cases} x < v_1(t - (N - 1)d/v_1), \\ x < -v_1(t - (N - 1)d/v_1) + d; \end{cases}$$

$$M, N = M, M$$

$$= N, N \Rightarrow \begin{cases} x < v_1(t - (N - 1)d/v_1), \\ x < -v_1(t - Nd/v_1) + d, \\ x > -v_1(t - (N - 1)d/v_1) + d, \\ x > v_1(t - Nd/v_1). \end{cases} \quad (9)$$

## Поле в области возмущенного слоя

Пусть первичное поле обусловлено плоской монохроматической волной единичной амплитуды

$$E_0(t, x) = e^{i(\omega_0 t - kx)}, \quad (10)$$

где  $k = \omega_0/v_0$  — волновое число,  $\omega_0$  — частота первичной волны.

Подставляя (5)–(7) и (10) в (3), получим выражение ( $t > 0$ ), описывающее поведение электрической компоненты поля в возникшем в нулевой момент времени слое  $x \in [0; d]$ , соответствующее произвольным значениям целочисленных переменных  $M$  и  $N$  пространственно-временной области слоя

$$E^{M,N}(t, x) = E_1(t, x) + E_2^{M,N}(t, x). \quad (11)$$

Здесь

$$E_1(t, x) = \Theta(-t + x/v_1) A_0^+ e^{i(am\omega t - kx)} + \Theta(-1 + (d - x)/v_1) A_0^- e^{-i(am\omega t + kx)} + \Theta(t - x/v_1) B_0^+ e^{i(\omega t - kx/am)} + \Theta(t + (x - d)/v_1) B_0^- e^{i(\omega t + kx/am)},$$

где

$$A_0^\pm = \pm \frac{1 \pm am}{2m^2} am, \quad B_0^\pm = \frac{1 \pm am}{2m^2},$$

а также

$$\begin{aligned} E_2^{M,N}(t, x) = & \sum_{l=1}^M \left\{ \Theta(-t + (x + 2ld)/v_1) \right. \\ & \times \Theta(t - (x + (2l - 1)d)/v_1) A_l^+ e^{i(am\omega t - k(x - 2ld))} \\ & \left. + \Theta(t - (x + 2ld)/v_1) B_l^+ e^{i(\omega t - k(x - 2ld)/am)} \right\} \\ & + \sum_{s=1}^N \left\{ \Theta(-t - (x + (2s + 1)d)/v_1) \right. \\ & \times \Theta(t + (x - 2sd)/v_1) A_s^- e^{-i(am\omega t + k(x - 2sd))} \\ & \left. + \Theta(t + (x - (2s + 1)d)/v_1) B_s^- e^{i(\omega t + k(x - (2s + 1)d)/am)} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$A_j^\pm = A_0^\pm \left( \frac{1 - am}{1 + am} \right)^j, \quad B_j^\pm = B_0^\pm \left( \frac{1 - am}{1 + am} \right)^j.$$

В соответствии с проведенными обозначениями амплитуд  $A_j^\pm$  и  $B_j^\pm$  условимся здесь и далее в работе называть волны посредством соответствующих обозначений последних, входящих в слагаемые, описывающие эти волны в формулах.

Состав слагаемых, входящих в (11), позволяет выявить общую картину преобразования первичной монохроматической волны  $E_0(t, x)$  в слое  $x \in [0, d]$  при скачке диэлектрической и магнитной проницаемостей в области последнего. Так, первичная волна в момент скачка проницаемостей расщепляется на прямую  $A_0^+$  и обратную  $A_0^-$  монохроматические волны, распространяющиеся в противоположных направлениях и имеющие новые значения частот (равные  $am\omega$ ) и амплитуд в сравнении с соответствующими параметрами первичной волны. Вследствие образовавшихся в момент времени  $t = 0$  двух плоскопараллельных границ раздела трех областей пространства волны  $A_0^+$  и  $A_0^-$  каждая, частично отражаясь от границ  $x = 0$  и  $x = d$  соответственно, инициируют обратную и прямую монохроматические волны  $A_1^-$  и  $A_1^+$  соответственно. Процесс переотражения последних от границ раздела сред приводит к образованию прямой и обратной монохроматических волн  $A_2^+$  и  $A_2^-$  соответственно и т.д. Также в момент скачкообразного возникновения слоя в последнем образуется прямая монохроматическая волна  $B_0^+$ , которая является прошедшей первичной с новым значением волнового числа, равного  $k/am$ . Эта волна, частично отражаясь от границы  $x = d$ , порождает обратную монохроматическую волну  $B_0^-$ . Взаимодействие последней с границей  $x = 0$  является началом процесса образования пар прямых и обратных волн  $B_s^+$  и  $B_s^-$  соответственно ( $s = 1, \dots, N$ ).

Представляет интерес получение выражения для электрической компоненты поля в установившемся режиме. Соответствующее выражение для поля может быть получено из выражения (11) путем получения предельного перехода в последнем при неограниченно большом значении индекса  $M$  (или  $N$ ) для зоны  $M, M$  (или  $N, N$ ). Соответствующий предел правой части (11) может быть легко получен с учетом того, что пространственно-временные области существования волн  $A_j^\pm$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) ограничены плоскопараллельными границами, движущимися в одном направлении и с одинаковыми скоростями (что следует непосредственно из видов и структур аргументов соответствующих функций Хевисайда, стоящих множителем при амплитудах  $A_j^\pm$  в формуле (11)). Вышеупомянутые движущиеся плоскости асимптотически уходят на бесконечность, тем самым „высвобождая“ конечную область пространства от составляющих поля прямой и обратной волн  $A_j^\pm$ . Кроме того, также уходящие на бесконечность односторонние границы полей волн  $B_j^\pm$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) асимптотически „составляют“ в слое поля двух волн, выражения для амплитуд которых нетрудно получить, если воспользоваться формулой для суммы бесконечного ряда геометрической прогрессии [9] (что позволяет выполнить неравенство  $(1 - am)/(1 + am) < 1$ ). Учитывая все вышесказанное, приходим к выражению для преобразованной компоненты электрического поля в слое в установившемся режиме

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} E^{M,M}(t, x) = & A^+ e^{i(\omega t - kx/am)} \\ & + A^- e^{i(\omega t + k(x - d)/am)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$A^\pm = \frac{1 \pm am}{2m^2} \frac{1}{1 + am - (1 - am)e^{\pm 2ikd/am}}.$$

Таким образом, скачок проницаемостей в слое магнитоэлектрического пространства преобразует поле плоской монохроматической волны в поле, которое в установившемся режиме представляет собой поле прямой и обратной монохроматических волн с новыми значениями волновых чисел и амплитуд.

Получим теперь выражение для преобразованной компоненты электрического поля в области  $x \in [0, d]$  при аналогичном скачкообразном образовании слоя на случай первичного поля в виде гауссова электромагнитного импульса

$$E_0(t, x) = e^{-(\omega_0 t - kx)^2}, \quad k = \omega_0/v_0. \quad (13)$$

Подставляя (5)–(7) и (13) в (3) и вычисляя соответствующие интегралы от гауссиана с использованием формулы дифференцирования интеграла, зависящего от параметра [10], можно получить, что

$$E^{M,N}(t, x) = E_1(t, x) + E_2^{M,N}(t, x), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
 E_1(t, x) = & \Theta(-t + x/v_1)A_0^+ e^{-(am\omega t - kx)^2} \\
 & + \Theta(-t + (d - x)/v_1)A_0^- e^{-(am\omega t + kx)^2} \\
 & + \Theta(t - x/v_1)B_0^+ e^{-(\omega t - kx/am)^2} \\
 & + \Theta(t + (x - d)/v_1)B_0^- e^{-(\omega t + kx/am)^2}, \\
 E_2^{M,N}(t, x) = & \sum_{l=1}^M \left\{ \Theta(-t + (x + 2ld)/v_1) \right. \\
 & \times \Theta(t - (x + (2l - 1)d)/v_1)A_l^+ e^{-(am\omega t - k(x - 2ld))^2} \\
 & \left. + \Theta(t - (x + 2ld)/v_1)B_l^+ e^{-(\omega t - k(x - 2ld)/am)^2} \right\} \\
 & + \sum_{s=1}^N \left\{ \Theta(-t - (x + (2s + 1)d)/v_1) \right. \\
 & \times \Theta(t + (x - 2sd)/v_1)A_s^+ e^{-(am\omega t + k(x - 2sd))^2} \\
 & \left. + \Theta(t + (x - (2s + 1)d)/v_1)B_s^+ e^{-(\omega t + k(x - (2s + 1)d)/am)^2} \right\},
 \end{aligned}$$

а выражения для амплитудных коэффициентов полностью совпадают с соответствующими выражениями для амплитудных коэффициентов в формуле (11).

Сравнение выражений (11) и (14) показывает полное сходство их структур, что позволяет сделать заключение о полной идентичности физики процесса преобразования плоской монохроматической электромагнитной волны и гауссового электромагнитного импульса на скачке свойств среды в слое свободного магнитоэлектрического пространства.

Используя подход, позволивший получить выражение (12), получим выражение, описывающее поведение электрической компоненты поля (14) в установившемся режиме,

$$\begin{aligned}
 E^{M,M}(t, x) \cong & \sum_{l=0}^{M \gg 1} \left\{ B_l^+ e^{-(\omega t - k(x - 2ld)/am)^2} \right. \\
 & \left. + B_l^- e^{-(\omega t + k(x - (2l + 1)d)/am)^2} \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Сохраняя структуру поля (12) для каждой из подобластей  $MM$ , выражение для поля (15) тем не менее не может быть полностью приведено к виду (12) вследствие невозможности применения к сумме в (15) формулы для суммы бесконечного ряда геометрической прогрессии.

## Поле в невозмущенных областях пространства

Представляет также интерес получение выражений для полей вне возмущенного слоя  $x \in [0, d]$ . Исходя из общей структуры выражений для полей (11) и (14)

можно заключить, что каждая из составляющих этих полей взаимодействует с одной из двух границ раздела трех областей пространства. Поэтому для получения выражений для полей в областях пространства  $x \leq 0$  и  $x \geq 0$  ( $t > 0$ ) необходимо рассмотрение взаимодействия с этими границами каждой плоской составляющей полей, описываемых выражениями (11) и (14). Для этой цели найдем вначале решение задачи дифракции нестационарной плоской волны общего вида

$$E_0(t, x) = E_0(t - (x - \beta)/v_1), \quad v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad (16)$$

которая распространяется в среде  $I$  со скоростью  $v_1$  перпендикулярно границе раздела  $x = \beta$  сред  $I$  и  $2$  (скорость распространения плоской волны в среде  $2$  равна  $v_2 = c/\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ ). Предполагается, что обе среды являются однородными, изотропными и непроводящими, с диэлектрическими и магнитными проницаемостями, соответственно равными  $\varepsilon_j$  и  $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ). Математическая постановка данной задачи дифракции имеет следующий вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(t, x) = 0, \quad x > \beta;$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(t, x) = 0, \quad x < \beta;$$

$$E(t, x)|_{x=\beta+0} = E(t, x)|_{x=\beta-0},$$

$$\frac{\partial E(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=\beta+0} = \frac{\partial E(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=\beta-0}. \quad (17)$$

Используя прямое преобразование Фурье, запишем функцию первичной волны в виде

$$\begin{aligned}
 E_0(t - (x - \beta)/v_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_0(\omega) e^{i\omega(t - (x - \beta)/v_1)} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_0(\omega) e^{i(\omega t - k_1(x - \gamma_1))}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где  $k_1 = \omega/v_1$ ,  $\gamma_1 = \beta/v_1$ .

Используя условие излучения [11], запишем выражения для прошедшей  $E_{\text{tr}}(t, x)$  и отраженной  $E_{\text{ref}}(t, x)$  волн в виде (18)

$$E_{\text{tr}}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{\text{tr}}(\omega) e^{i(\omega t - k_2(x - \gamma_2))}, \quad (19)$$

$$E_{\text{ref}}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{\text{ref}}(\omega) e^{i(\omega t - k_1(x - \gamma_1))}, \quad (20)$$

где  $k_2 = \omega/v_2$ ,  $\gamma_2 = \beta/v_2$ .

Согласно принципу суперпозиции [11], решение задачи (17) имеет вид

$$E(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \times \begin{cases} E_0(\omega)e^{-ik_1(x-\gamma_1)} + E_{\text{ref}}(\omega)e^{ik_1(x-\gamma_1)}, & x > \beta, \\ E_{\text{tr}}(\omega)e^{-ik_2(x-\gamma_2)}, & x < \beta. \end{cases} \quad (21)$$

Для отыскания вида фурье-образов  $E_{\text{tr}}(\omega)$  и  $E_{\text{ref}}(\omega)$  подставим выражение (21) в граничные условия системы дифференциальных уравнений (17). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений второго порядка относительно фурье-образов, решение которых даст

$$E_{\text{tr}}(\omega) = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_1\mu_1/\varepsilon_2\mu_2}} E_{\text{tr}}(\omega) = R,$$

$$E_{\text{ref}}(\omega) = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_1\mu_1/\varepsilon_2\mu_2}}{1 + \sqrt{\varepsilon_1\mu_1/\varepsilon_2\mu_2}} E_{\text{tr}}(\omega) = T,$$

где  $R$  — коэффициент отражения фурье-образа плоской волны от границы раздела  $x = \beta$  сред 1 и 2,  $T$  — коэффициент прохождения фурье-образа плоской волны через границу раздела сред  $x = \beta$ .

Для получения компонент электрического поля  $E_{\text{tr}}(t, x)$  и  $E_{\text{ref}}(t, x)$  рассмотрим теперь функцию компоненты электрического поля как функцию трех переменных

$$E(t - (x - \beta)/v_j) = E(t, x, v_j); \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

Далее, используя прямое преобразование Фурье и учитывая, что коэффициенты  $R$  и  $T$  не зависят от переменной интегрирования  $\omega$ , получим

$$E_{\text{tr}}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega T E_0(\omega) e^{i(\omega t - k_2(x - \gamma_2))}$$

$$= T \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_0(\omega) e^{i\omega(t - (x - \beta)/v_2)} = T E(t, x, v_2). \quad (24)$$

$$E_{\text{ref}}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega R E_0(\omega) e^{i(\omega t + k_1(x - \gamma_1))}$$

$$= R \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_0(\omega) e^{i\omega(t - (x - \beta)/(-v_1))} = R E(t, x, -v_1). \quad (25)$$

Таким образом, для отыскания выражений для компонент электрического поля в невозмущенных частях пространства достаточно убедиться в возможности применения формул (24), (25) к отдельным компонентам выражений (11) и (14). Правомочность такого подхода может быть полностью оправдана возможностью представления в виде (16) как плоской монохроматической волны, так и гауссова импульса. Поэтому применим к выражениям для полей (11) и (14) формулы (24), (25).

Чтобы получить выражения для отраженной от возмущенного слоя первичной волны в области  $x < 0$  (назовем ее  $l$ ) к функциям первичных волн в (10) и (13), надо применить формулу (25), а для получения выражения для первичной волны, прошедшей в область  $x > d$  (назовем ее  $Q_0^+$ ), к выражениям для волн  $B_0^+$  в (11) и (14) надо применить формулу (24). Также формулу (24) будем применять к выражениям для волн  $A_s^-$  и  $B_s^-$  ( $s = 0, \dots, N$ ), чтобы получить выражения для этих волн, прошедших в область  $x < 0$  (назовем их  $P_s^-$  и  $Q_s^-$  соответственно). Применим эту формулу также к выражениям для волн  $A_l^+$  и  $B_l^+$  ( $l = 1, \dots, M$ ) с целью получить выражения для этих волн, прошедших в область  $x > d$  (назовем эти волны  $P_l^+$  и  $Q_l^+$  соответственно).

Перед тем как записать выражения для полей в невозмущенных областях пространства, заметим, что при определении выражения для отраженной от границы  $x = 0$  первичной волны в формуле (25) параметрам с индексом 1 соответствуют параметры невозмущенных областей, а параметрам с индексом 2 — параметры слоя. А в случае определения всех остальных волн соответствия между числовыми значениями индексов в формулах (24), (25) и числовыми значениями возмущенных и невозмущенных областей производятся с точностью до наоборот.

С учетом сказанного в двух предыдущих абзацах запишем выражения для компоненты электрического поля в невозмущенных областях магнитоэлектрического пространства

$$E^N(t, x) = \Theta(t + x/v_0) I F(\omega t + kx)$$

$$+ \Theta(-t + (d - x)/v_0) P_0^- F(-am(\omega t + kx))$$

$$+ \Theta(t + (x - d)/v_0) Q_0^- F(\omega t + k(x - d))$$

$$+ \sum_{s=1}^N \{ \Theta(-t + ((2s + 1)d - x)/v_0)$$

$$\times \Theta(t + (x - 2sd)/v_0) F(-am(\omega t + k(x - 2sd)))$$

$$+ \Theta(t + (x - (2s + 1)d)/v_0)$$

$$\times F(\omega t + k(x - (2s + 1)d)) \}, \quad x < 0, \quad (26.1)$$

$$\begin{aligned}
E^N(t, x) = & \Theta(-t + x/v_0)P_0^+ F(iam(\omega t - kx)) \\
& + \Theta(t - x/v_0)Q_0^+ F(\omega t - kx) \\
& + \sum_{l=1}^M \left\{ \Theta(-t + (x + 2l)/v_0) \right. \\
& \times \Theta(t - (x + (2l+1))/v_0) P_l^+ F(am(\omega t - k(x - 2ld))) \\
& + \Theta(t - (x + 2ld)/v_0) \\
& \left. \times Q_l^+ F(\omega t - k(x - 2ld)) \right\}, \quad x < d, \quad (26.2)
\end{aligned}$$

$$F(z) = \begin{cases} e^{iz}, & E_0(t, x) = e^i(\omega t - kx), \\ e^{-z^2}, & E_0(t, x) = e^{-(\omega t - kx)^2}, \end{cases} \quad (26.3)$$

где

$$I = \frac{1 - am}{1 + am}, \quad P_j^+ = a^2 \left( \frac{1 - am}{1 + am} \right)^j,$$

$$P_j^- = -a^2 \left( \frac{1 - am}{1 + am} \right)^{j+1},$$

$$Q_j^+ = \frac{a}{m} \left( \frac{1 - am}{1 + am} \right)^j, \quad Q_j^- = \frac{a}{m} \left( \frac{1 - am}{1 + am} \right)^{j+1}.$$

Естественным является интерес к получению поздневременных приближений для выражений (26), т.е. выражений для полей (26) в установившемся режиме. Переход от (26.1), (26.2) к их поздневременным приближениям в случае первичной волны в виде плоской монохроматической волны осуществляется с помощью рассуждений, имевших место при переходе от выражения (11) к выражению (12). Отметим лишь, что в данном случае волны  $P_s^-$ ,  $s = 1, \dots, N$  и волны  $P_l^+$ ,  $l = 1, \dots, M$  асимптотически уходят на бесконечность и, таким образом, в конечной области пространства в установившемся режиме электрическая компонента поля будет описываться выражениями

$$E(t, x) = \begin{cases} \lim_{M \rightarrow +\infty} E^N(t, x) \\ = (I + W^-) e^{i(\omega t + kx)}, & x < 0, \\ \lim_{M \rightarrow +\infty} E^N(t, x) \\ = W^+ e^{i(\omega t - kx)}, & x > d, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$W^\pm = \frac{a}{m} \frac{1 \pm am}{1 + am - (1 - am)e^{\pm 2ikd}}.$$

Сопоставляя выражения (12) и (27), нетрудно заметить, что последний результат можно было получить непосредственно из (12), применяя к нему формулы (24), (25).

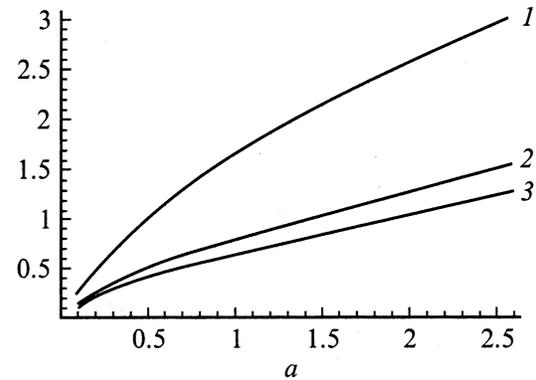
В случае первичной волны в виде гауссова импульса выражения (26.1) и (26.2) в поздневременном приближе-

нии имеют вид

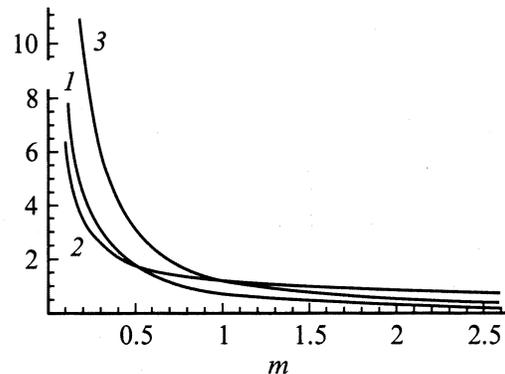
$$E(t, x) = \begin{cases} E^N(t, x) \stackrel{N \gg 1}{\cong} I e^{-(\omega t + kx)^2} \\ + \sum_{s=0}^N Q_s^- e^{-(\omega t + k(x - (2s+1)d))^2}, & x < 0, \\ E^M(t, x) \stackrel{M \gg 1}{\cong} \sum_{l=0}^M Q_l^+ e^{-(\omega t - k(x - 2ld))^2}, & x > d. \end{cases} \quad (28)$$

Как и в случае первичной волны, в виде плоской монохроматической волны последний результат мог бы быть получен непосредственным применением формул (24) и (25) к выражению (15).

Исходя из простоты выражений (27) представляет интерес рассмотрение модуля амплитуды прямой волны в области пространства  $x > d$  на предмет его сравнения со значением амплитуды первичной волны. Результаты соответствующих численных исследований для случая первичной монохроматической волны приведены на рис. 2, 3. Из графиков, представленных на этих рисунках, видно, что при определенных значени-



**Рис. 2.** График зависимости модуля амплитуды первичной волны, прошедшей в область пространства  $x > d$ , от величины относительного изменения диэлектрической проницаемости  $a$  для различных значений величины относительного изменения магнитной проницаемости  $m$ : 1 — 0.7, 2 — 1.2, 3 — 1.4 при  $kd = 10^6$ .



**Рис. 3.** То же, что на рис. 2, в зависимости от относительного изменения  $m$ . Относительное изменение диэлектрической проницаемости  $a$ : 1 — 0.6, 2 — 1.1, 3 — 1.3 при  $kd = 10^6$ .

ях относительных изменений проницаемостей, толщины возмущенного слоя и частоты первичной волны имеет место усиление амплитуды прошедшей первичной волны по модулю.

## Заключение

В данной работе рассмотрено преобразование плоской монохроматической электромагнитной волны и гауссова электромагнитного импульса на скачке диэлектрической и магнитной проницаемостей в слое произвольной толщины магнитодиэлектрической изотропной свободной среды. Показано, что в момент скачка проницаемостей в области слоя образуются две волны, одна из которых распространяется в направлении первичной волны, а вторая — в противоположном направлении. Образовавшиеся волны, а также первичная волна, взаимодействуя с двумя плоскими границами раздела трех областей пространства, образуют во всем пространстве наборы пар прямых и обратных волн двух типов: первые обусловлены скачком параметров в слое, а вторые инициированы прохождением через границы образовавшегося слоя последних и первичной волн. Области существования каждой из образовавшихся волн ограничены одной или двумя плоскопараллельными границами, движущимися в двух противоположных направлениях. Скорость распространения этих границ зависит от материальных параметров областей пространства, в которых они распространяются. Показано, что асимптотически после ухода всех движущихся параллельных плоскостей на бесконечность в конечной области пространства отсутствуют волны, инициированные скачком проницаемостей в слое. Численные исследования зависимости амплитуды первичной плоской монохроматической волны, прошедшей через нестационарный слой, также показали, что рассматриваемая модель возмущения свободного магнитодиэлектрического пространства может служить для усиления первичной монохроматической волны.

## Список литературы

- [1] *Афанасьев С.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 5. С. 605–607.
- [2] *Слипченко Н.И., Шульга Л.Н., Рыбин О.Н.* // Радиоэлектроника и информатика. 2000. Т. 12. № 3. С. 22–26.
- [3] *Morgenthaler.* // IRE Trans., Microwave Theory and Techniques. 1958. Vol. MTT-6. P. 167.
- [4] *Слипченко Н.И., Шульга Л.Н., Рыбин О.Н.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 123–127.
- [5] *Никольский Б.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 543 с.
- [6] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
- [7] *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО Тест-Радио, 1991. 280 с.
- [8] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
- [9] *Яремчук Ф.П., Рудченко П.А.* Алгебра и элементарные функции. Справочник. Киев: Наукова думка, 1987. 648 с.
- [10] *Фихтенгольц Г.М.* Курс интегрального и дифференциального исчисления. Т. II. М.; Л.: ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.
- [11] *Зоммерфельд А.* Оптика: Пер. с нем. М.: ИЛ, 1953.