01

Особенности фазовой траектории "фрактального" осциллятора

© *Р.П. Мейланов, М.С. Янполов*

Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН, Махачкала
E-mail: lan rus@dgu.ru

Поступило в Редакцию 24 мая 2001 г.
В окончательной редакции 27 августа 2001 г.

На основе дифференциальных уравнений с дробными степенями $\alpha(1 < \alpha \leqslant 2)$ получено решение для "фрактального" осциллятора. Показано, что на базе решений "фрактального" осциллятора можно параметризовать широкий класс нелинейных процессов.

В последнее время особый интерес привлекают нелинейные динамические системы, где реализуются идеи детерминированного хаоса и фрактальной геометрии. Их привлекательность обусловлена тем, что закономерности таких систем становятся базовыми для установления сущности широкого круга явлений, охватывая не только физические, но и химические, геофизические, биологические, социально-экономические системы.

Проникновение идей фрактальной геометрии [1] в естествознание сформировало новую концепцию — концепцию фракталов [2,3]. Особый интерес в концепции фрактала представляет аналитический подход, основанный на использовании математического аппарата дробного интегродифференцирования [4,5], в рамках которого удается не только воспроизвести известные, но и получить принципиально новые результаты [6–10].

В настоящей работе дается обобщение задачи гармонического осциллятора на основе дифференциальных уравнений с дробным дифференцированием и показана возможность рассмотрения на их основе нелинейных колебательных процессов.

Математические методы исследования нелинейных колебательных процессов хорошо известны [11–15]. Различают аналитико-топологический подход, основанный на геометрической теории дифференциальных уравнений [11,12], и подход, основанный на анализе асимптотических решений нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих заданный параметр [13–15]. Несмотря на значительные усилия по развитию теории нелинейных колебательных процессов, наши знания в этой области далеки от своей полноты и необходимо развитие принципиально новых подходов. В качестве одного из таких подходов предлагается метод, основанный на применении математического аппарата дробного интегродифференцирования [4,5]. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x(t)+\omega^\alpha x(t)=0, \tag{1}$$

где $1<\alpha\leqslant 2$, ω — частота, t — время.

При $\alpha=2$ мы имеем случай гармонического осциллятора. Систему, описываемую уравнением (1), условно назовем "фрактальным" осциллятором.

Отметим, что уравнение вида (1) предлагается в работе [6]. Здесь мы не акцентируем внимание на выводе самого уравнения, а исследуем особенности его решений, заметив, лишь, что одной из интерпретаций дробной производной по времени является описание эволюции системы с частичной потерей памяти, что связано наличием необратимых процессов, которые и лежат в основе проявления нелинейных свойств системы.

Решение дифференциального уравнения (1) в общем случае имеет вид

$$x(t)=A(\omega t)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-(\omega t)^\alpha)+B(\omega t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\omega t)^\alpha), \tag{2}$$

здесь A и B — константы интегрирования; $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$ — специальная функция Миттаг–Леффлера [16]; $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

При $\alpha=2$ имеем $E_{2,1}(-z^2)=\cos(z)$, $E_{2,2}(-z^2)=\sin(z)/z$ и решение (2) принимает известный вид $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$. Для

$\alpha = 1.5$, например, решение (2) принимает вид ($z = \omega t$):

$$x(z) = A\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\pi/3)\left[2\exp(-z/2)\cos(\sqrt{3}\,z/2+\pi/3)+\exp(z)\right]+\\ &+2\sqrt{z/2}\,\sin(\pi/6)\,{}_1F_3(1;1/6,\,1/2,\,5/6;(z/3)^3)\end{aligned}\right\}$$

$$+B\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\pi/3)\left[2\exp(-z/2)\cos(\sqrt{3}\,z/2-\pi/3)-\exp(z)\right]+\\ &+4\sqrt{z/\pi}\,\sin(\pi/6)\,{}_1F_3(1;1/2,\,5/6,\,7/6;(z/3)^3)\end{aligned}\right\}.$$

Для построения фазовой траектории рассмотрим параметрическое уравнение фазовой траектории, задаваемое уравнениями:

$$x(t) = (\omega t)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-(\omega t)^{\alpha})$$

$$\frac{d^{\alpha-1}x(t)}{dt^{\alpha-1}} = -\omega^{\alpha-1}(\omega t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\omega t)^{\alpha}). \tag{3}$$

При $\alpha = 2$ фазовая траектория системы окружность. (В численных расчетах для простоты положено $\omega = 1$, $A = 1$). В остальных случаях, когда $\alpha = \mathrm{const}$ $(1 < \alpha < 2)$ фазовые траектории принимают вид, показанный на рис. $1, a, b$ (a — фазовая траектория a; b — зависимость $x(t)$; кривые с индексом 1 для $\alpha = 1.95$, с индексом 2 для $\alpha = 1.5$). Таким образом, все решения с постоянным значением $(1 < \alpha < 2)$ соответствуют затухающим процессам.

Для дальнейшего заметим, что на самом деле уравнение (1) — это бесчисленное множество (мощности континуума $1 < \alpha < 2$) дифференциальных уравнений. Важно то, что мы имеем и соответствующее множество решений (2). Рассмотрим вопрос о возможности использования решений (2) "фрактального" осциллятора как базисную систему функций для параметрического представления различных нелинейных колебаний. Пусть $F(t)$ — некоторая функция времени и рассмотрим выражение

$$F(t) = A(\omega t)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-(\omega t)^{\alpha}) + B(\omega t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\omega t)^{\alpha}) \tag{4}$$

как уравнение относительно α. Решая (4) для каждого значения t и ω, мы определим функцию $\alpha_F = \alpha_F(t, \omega, A, B)$. Полученная функция

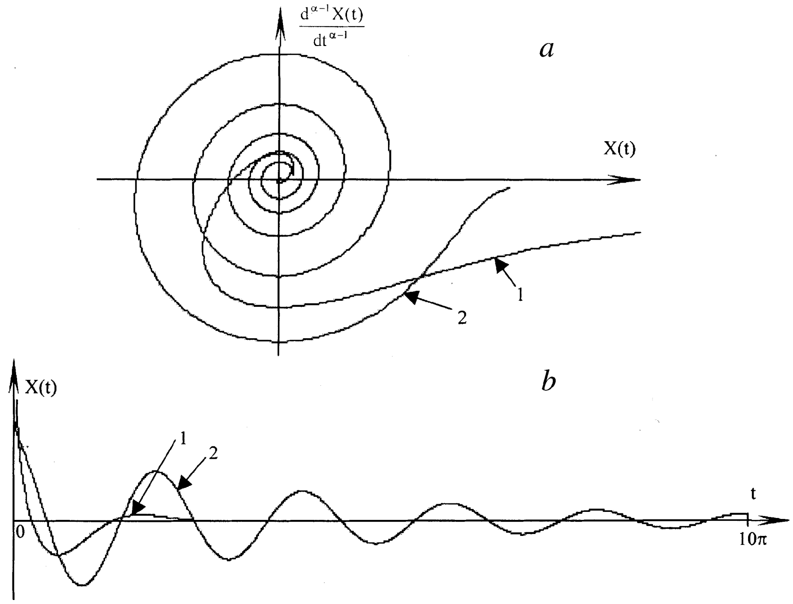

Рис. 1. Фазовая траектория (a, c) и зависимость $x(t)$ (b, d) "фрактального" осциллятора: a, b — $\alpha = 1.5$ (*1*), $\alpha = 1.95$ (*2*), $t \in (0.10\pi)$; c, d — $\alpha(t) = [(1 - \delta - \varepsilon)\cos(kt) + (\varepsilon - \delta + 3)]/2$, $k = 18$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0.95$, $t \in (0.6\pi)$.

при его существовании определяет, какие решения "фрактального" осциллятора из множества решений (2) "участвуют" при формировании функции $F(t)$. В результате мы получим своего рода "параметрическое" представление для функции $F(t)$:

$$F(t) = A(\omega t)^{\alpha_F - 2} E_{\alpha_F, \alpha_F - 1}(-(\omega t)^{\alpha_F}) + B(\omega t)^{\alpha_F - 1} E_{\alpha_F, \alpha_F}(-(\omega t)^{\alpha_F}). \quad (5)$$

При этом важно то, что вид полученной функции $\alpha_F = \alpha_F(t, \omega, A, B)$ может служить основой квалификации нелинейных процессов. Представление (5) можно назвать "мультфрактальным" представлением функции $F(t)$.

Для демонстрации возможностей такого представления мы поступим обратно. Зададим формально различные $\alpha = \alpha(t)$ и рассмотрим, какие

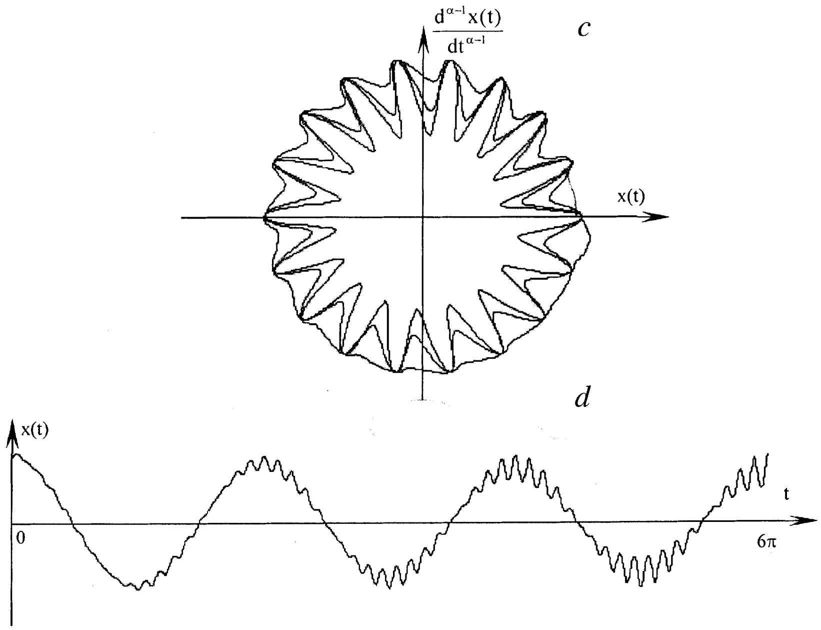

Рис. 1 (*продолжение*).

при этом образуются $F(t)$. Другими словами, для полученных зависимостей $F(t)$ существует функция $\alpha_F = \alpha_F(t, \omega, A, B)$. Единственное условие, ограничивающее класс рассматриваемых функций $\alpha = \alpha(t)$, это условие $1 < \alpha \leqslant 2$.

Рассмотрим, например, случай, когда α определяется зависимостью вида $\alpha(t) = [(1-\delta-\varepsilon)\cos(kt)+(\varepsilon-\delta+3)]/2$. Здесь δ и ε удовлетворят следующим условиям: δ, $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta+\varepsilon < 1$, k — произвольное число. При этом δ и ε определяют границы изменения $\alpha(t)$: $1+\varepsilon < \alpha(t) \leqslant 2-\delta$. На рис. $1, c, d$ приведены результаты расчета для случая $\kappa = 18$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0.95$ и $t \in (0.6\pi)$. Как показывает анализ, когда $\delta = 0$ и $\varepsilon \to 0.7$, в центре фазовой плоскости появляется точка многократного возврата фазовой траектории. В случае же $\varepsilon = 0.95$ и $0 < \delta < 0.05$, фазовая траектория становится не замкнутой.

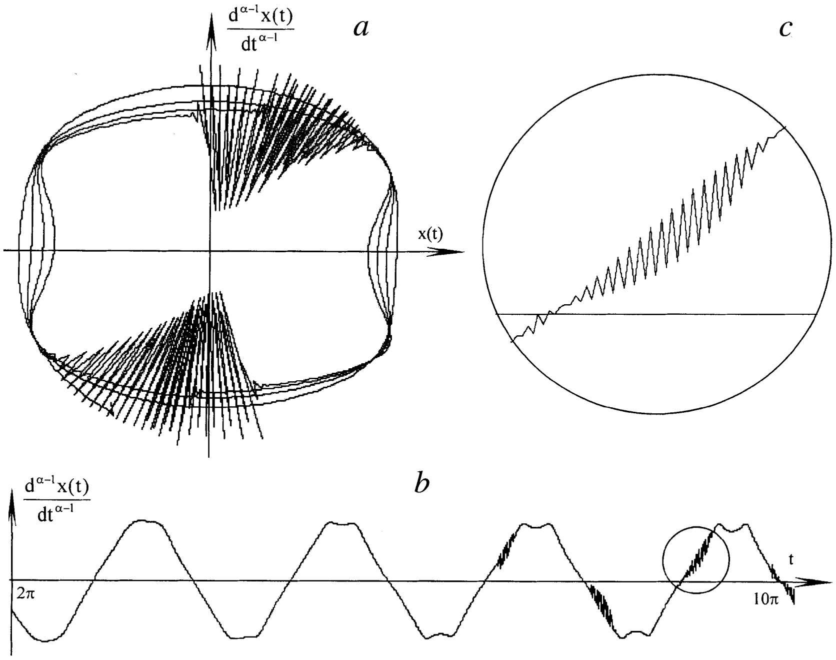

Рис. 2. Фазовая траектория (a, c) и зависимость $x(t)$ (b) "фрактального" осциллятора для случая $\alpha(t) = [(1-\delta-\varepsilon)\cos(k\cos(x(t))) + (\varepsilon-\delta+3)]/2$: $k = 7$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0.9$, $t \in (2\pi, 10\pi)$.

Рассматривая функцию $\alpha(t) = [(1-\delta-\varepsilon)\cos(k\cos(x(t))) + (\varepsilon-\delta+3)]/2$, получим в качестве соответствующей $F(t)$ функцию 2b). На рис. 2, a приводится фазовая траектория для этого случая. Как видно, мы имеем возможность параметрического представления сложного нелинейного сигнала $F(t)$ (рис. 2, b) на базе решений (2), когда выбор решений из множества (2) осуществляется по закону

$$\alpha(t) = \big[(1-\delta-\varepsilon)\cos(k\cos(x(t))) + (\varepsilon-\delta+3)\big]/2.$$

Таким образом, действительно решение дифференциального уравнения (1) в дробных производных в частном случае содержит результаты задачи линейного осциллятора и дает новые результаты, описывающие нелинейные процессы. В отличие от ранее известных методов, когда особенности фазовой траектории определяются значениями параметров, входящих в заданное нелинейное дифференциальное уравнение, в предлагаемом нами методе аналогом такого параметра является показатель дробной степени дифференцирования. Полученное множество решений (2) "фрактального" осциллятора (1) можно использовать в качестве базисной системы для параметрического представления некоторой функции $F(t)$. При таком подходе параметр фрактальности рассматривается как параметр для определения возможности представления другого сигнала в базисе (2).

Список литературы

[1] *Mandelbrot B.B.* The fractal Geometry of Nature. New York, 1982.
[2] *Олемской А.И., Флат А.Я.* // УФН. 1993. Т. 163. № 12. С. 1–50.
[3] *Зосимов В.В., Лямшев Л.М.* // УФН. 1995. Т. 165. № 4. С. 361–402.
[4] *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. New York, 1974. 234 p.
[5] *Самко С.Г., Килбас Ф.Ф., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
[6] *Нигматулин Р.И.* // ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368.
[7] *Чукбар К.В.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 5. С. 1875–1884.
[8] *Мейланов Р.П.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 23. С. 40–43.
[9] *Мейланов Р.П., Садыков С.А.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. В. 5. С. 128–129.
[10] *Мейланов Р.П.* // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 2. С. 34–37.
[11] *Лифшиц С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., 1961. 388 с.
[12] *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
[13] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
[14] *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.
[15] *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
[16] *Джарбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.