01;03

Критические условия неустойчивости движущейся заряженной капли в электростатическом поле

© *А.И. Григорьев*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 27 сентября 2001 г.

На основе анализа условия баланса давлений на поверхности заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, свободно падающей в однородном электростатическом поле, найдены критические условия неустойчивости поверхности такой капли. Величины зарядов капель, напряженностей электростатического поля и скорости движения капель относительно среды, удовлетворяющие полученному критерию, совпадают с наблюдаемыми в грозовых облаках и, следовательно, использованные модельные представления могут быть положены в основу гипотетического механизма инициирования разряда молнии.

1. Явление неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному или индуцированному заряду представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике, технологии и научном приборостроении (см., например, [1,2] и указанную там литературу). Но большая часть исследований по этому вопросу связана с интересом к элементарным процессам внутри грозового облака. Так, согласно существующим качественным представлениям, зарождение разряда линейной молнии связано с зажиганием коронного разряда в окрестности крупной капли или обводненной градины (с реализацией неустойчивости заряженной поверхности капли воды) [3,4]. Тем не менее такие представления не находят подтверждения в натурных измерениях в грозовых облаках. Максимальные величины собственных зарядов на отдельных каплях много меньше необходимых для реализации их неустойчивости [5]. То же относится и к неустойчивости капли во внешнем электрическом поле: измеряемые в грозовых облаках напряженности электрического поля существенно ниже необходимых для

реализации неустойчивости капли по отношению к индуцированному заряду [5]. Даже если принять во внимание и собственный заряд капли, и внешнее электростатическое поле, критерий суммарной неустойчивости (полученный в [6]) не выполняется с существенным запасом. По всей видимости, при построении физической модели инициирования разряда молнии упускается какой-то важный фактор, например, аэродинамическое давление в окрестности падающей капли, которое, согласно [7], приводит к снижению критических условий реализации неустойчивости свободной поверхности капли.

В связи со сказанным будем искать критические условия реализации неустойчивости заряженной капли идеальной жидкости, обдуваемой потоком газа (который также будем моделировать идеальной жидкостью), направленным коллинеарно внешнему однородному электростатическом полю.

2. Пусть капля идеальной несжимаемой электропроводной жидкости радиуса R с зарядом Q находится в однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$, в котором она вытягивается вдоль $\mathbf{E}_0$, принимая форму, близкую к вытянутому сфероиду. Согласно [6], при расчетах в линейном приближении по квадрату эксцентриситета (по e^2) форма такой капли может считаться сфероидальной. Примем, что сфероидальность капли в линейном по e^2 приближении не будет нарушена аэродинамическим давлением ламинарного потока газа плотностью ρ, со скоростью $\mathbf{U} \parallel \mathbf{E}_0$ обдувающего каплю. Уравнение сфероида в сферической системе координат с началом в центре капли может быть записано в виде:

$$\eta(\theta) = \frac{r(\theta)}{a} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}; \quad e^2 = 1 - b^2/a^2;$$

$b = R(1-e^2)^{1/6}$ и $a = R(1-e^2)^{-1/3}$ — меньшая и большая полуоси сфероида; угол θ отсчитывается от $\mathbf{E}_0$.

Выражение для эксцентриситета сфероида через Q, U и E_0 может быть получено из уравнения баланса давлений на поверхности капли [6]

$$p_\sigma = \Delta p + p_E + p_U; \tag{1}$$

$$p_\sigma = \sigma \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad}\eta(\theta)}{|\operatorname{grad}\eta(\theta)|}; \quad p_E = -\frac{E^2}{8\pi}; \quad p_U = -\frac{\rho U^2}{2};$$

σ — коэффициент поверхностного натяжения; p_σ — лапласовское давление под искривленной поверхностью капли; Δp — перепад постоянных давлений внутри капли и в среде; p_E — давление суммарного электрического поля на поверхность капли: p_U — аэродинамическое давление.

3. Согласно [8,9], неустойчивость капли по отношению к собственному или поляризационному заряду начинается с неустойчивости основной моды ($n = 2$) и генерируется ею: неустойчивость мод, более высоких, чем основная ($n > 2$), реализуется последовательно с ростом номера на фоне увеличивающейся амплитуды основной моды за счет увеличения поверхностной плотности заряда на вершинах вытягивающейся капли. В этой связи исследуем устойчивость сфероидальной капли по отношению к виртуальному увеличению амплитуды основной моды вида $\xi_0 \cdot P_2(\mu)$ (здесь $P_2(\mu)$ — полином Лежандра, $\mu \equiv \cos(\theta)$). Такое возмущение амплитуды основной моды в линейном по e^2 приближении соответствует приращению квадрата эксцентриситета на δe^2:

$$\delta e^2 = \frac{3\xi_0}{R}\left(1 - \frac{7}{6}e^2\right),$$

а также приращению давлений p_E и p_U на δp_E и δp_U соответственно [6,10]:

$$\delta p_E = \frac{1}{4\pi}E\delta E = \frac{9}{4\pi}\frac{\xi_0}{R}\left\{E_0^2\left[\frac{237}{175}e^2P_0 + \frac{18}{35}\left(1 + \frac{553}{90}e^2\right)P_2\right.\right.$$
$$\left. + \frac{24}{35}\left(1+\frac{1663}{880}e^2\right)P_4 + \frac{66}{77}e^2P_6\right] + \frac{Q^2}{R^4}\left[\frac{8}{135}e^2P_0 + \frac{1}{9}\left(1+\frac{67}{42}e^2\right)P_2\right.$$
$$\left.\left. + \frac{16}{105}e^2P_4\right] + \frac{QE_0}{R^2}\left[\frac{2}{15}\left(1-\frac{193}{210}e^2\right)P_1 + \frac{3}{5}\left(1+\frac{421}{270}e^2\right)P_3 + \frac{43}{63}e^2P_6\right]\right\}; \tag{2}$$

$$\delta p_U = \frac{27}{4}\rho U^2\frac{\xi_0}{R}\left\{-\frac{139}{525}e^2P_0 + \frac{24}{105}\left(1 - \frac{1}{10}e^2\right)P_2\right.$$
$$\left. - \frac{8}{35}\left(1 - \frac{439}{330}e^2\right)P_4 - \frac{64}{231}e^2P_6\right\}. \tag{3}$$

Выражение для изменения лапласовского давления δp_σ на малой деформации сфероидальной поверхности капли $h(\theta)$, разложимой в ряд по полиномам Лежандра

$$h(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P_n(\mu),$$

в линейном по e^2 приближении имеет вид [6]:

$$\delta p_\sigma = -\frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{[4+n(n+1)]\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}e^2 P_{n+2}$$

$$+P_n\left[2\left(1-\frac{2}{3}e^2\right)-\left(1+\frac{e^2}{3}\right)n(n+1)\right]$$

$$+e^2\Big[4+n(n+1)\Big]\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}P_{n-2}$$

$$+e^2[4+n(n+1)]\frac{[2n(n+1)-1]}{(2n-1)(2n+3)}P_n\Bigg\}a_n. \tag{4}$$

В результате взаимодействия виртуального возмущения формы поверхности капли с электрическими, гидродинамическими и лапласовскими силами форма капли может измениться, если исходная сфероидальная форма соответствовала предельной в смысле устойчивости по отношению к возможным деформациям. Форму новой поверхности капли будем искать в виде

$$r(\theta) = a\eta(\theta) + h(\theta)$$

из условия баланса давлений [6]:

$$p_\sigma + \delta p_\sigma = \Delta p + p_E + \delta p_E + p_U + \delta p_U. \tag{5}$$

Учтем, что исходная форма капли удовлетворяет уравнению (1), и из (5) получим соотношение между виртуальными добавками к давлениям:

$$\delta p_\sigma = \delta p_E + \delta p_U.$$

Подставим в это соотношение выражения (2)–(4), приравнивая коэффициенты при равных полиномах Лежандра, найдем выражение для добавки к амплитуде основной моды:

$$\frac{a_2}{R} = \frac{\xi_0}{R}\left\{\frac{27}{70}We\left(1+\frac{79}{210}e^2\right)+W\left(1+\frac{87}{42}e^2\right)+w\frac{81}{280\pi}\left(1+\frac{4171}{630}e^2\right)\right\}; \tag{6}$$

$$We \equiv \frac{\rho R U^2}{\sigma}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}; \quad w \equiv \frac{E_0^2 R}{\sigma}.$$

Несложно видеть, что если выражение, стоящее в (6) в фигурных скобках, меньше единицы, то виртуальное возмущение будет уменьшаться со временем. Это очевидно из следующих соображений. Примем полученное выражение для добавки к основной моде за начальное виртуальное возмущение ξ_1 и повторим расчеты с начала. Новая добавка к амплитуде основной моды будет, согласно (6), уже меньше ξ_1, т.е. возмущение будет уменьшаться. Если же выражение, стоящее в (6) в фигурных скобках, будет больше единицы, то добавка к амплитуде основной моды будет нарастать со временем, т.е. основная мода, а с ней и все остальные более высокие моды будут неустойчивы и капля претерпит неустойчивость по схеме, описанной в [11,12].

В итоге критические условия неустойчивости заряженной капли в однородном электростатическом поле и обдувающем потоке газа имеют вид

$$\frac{27}{70}\,We\left(1+\frac{79}{210}\,e^2\right)+W\left(1+\frac{87}{42}\,e^2\right)+w\,\frac{81}{280\pi}\left(1+\frac{4171}{630}\,e^2\right). \quad (7)$$

При $U = 0$ это условие сводится к условию неустойчивости заряженной капли в однородном электростатическом поле [6].

4. Проверим возможность выполнения критерия (7) для капли в грозовом облаке, отталкиваясь от максимальных значений зарядов капель и напряженностей электрического поля, наблюдаемых в естественных условиях. Пусть капля имеет радиус $R = 1\,\mathrm{mm}$, тогда, согласно данным наблюдений [5], ее заряд может достигать величины $Q = 2\cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$. Максимальное значение измеряемой напряженности электростатического поля в грозовом облаке $E_0 = 900\,\mathrm{kV/m}$ [5]. Капля указанного радиуса будет падать в поле тяжести с установившейся скоростью $U = 6.49\,\mathrm{m/s}$ [13]. Режим обтекания капли указанного радиуса воздухом определится числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 866$ [13]. Ясно, что при столь больших значениях числа Рейнольдса режим обтекания капли будет не ламинарным, а турбулентным и, следовательно, критерий (7), полученный для условий ламинарного обтекания, будет не верен. Тем не менее выполнение или невыполнение критерия (7) может свидетельствовать о принципиальной возможности или невозможности применения использованных модельных представлений к анализу физического механизма инициирования разряда молнии. Подстановка в (7) указанных значений физических параметров показывает, что критерий реализации неустойчивости удовлетворяется уже при $e^2 \approx 0.23$. Та-

кая величина эксцентриситета обеспечивается уже наличием внешнего электростатического поля [6,14], если же учесть влияние на величину эксцентриситета собственного заряда [6] и аэродинамического давления, то критерий (7) выполнится и при меньших скоростях падения капли (меньших значениях числа Рейнольдса).

5. Заключение. Аэродинамическое давление на поверхность заряженной капли, падающей в атмосфере в электростатическом поле, способствует реализации неустойчивости заряженной поверхности капли и, следовательно, зажиганию коронного разряда в ее окрестности и инициированию (в соответствии с существующими моделями) разряда молнии [3,4].)

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–28.
[3] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
[4] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
[5] *Облака* и облачная атмосфера. Справочник. / И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. В. 6. С. 27–34.
[7] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. Т. 69. В. 5. С. 7–14.
[8] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. В. 7. С. 1272–1278.
[9] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
[10] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
[11] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 3. С. 19–28.
[12] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. В. 12. С. 26–30.
[13] *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 160 с.
[14] *O'Konski Ch.T., Thacher H.C.* // J. Phys. Chem. 1953. V. 57. P. 955–958.