01;02

К вопросу о пространственной фокусировке ультрахолодных нейтронов неоднородным магнитным полем. Эйкональное приближение

© *Т. Чен*

Московская государственная академия
тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова
E-mail: docent65@mtu-net.ru

Поступило в Редакцию 13 июля 2001 г.

Рассмотрено движение ультрахолодных нейтронов в неоднородном магнитном поле с квадратичной неоднородностью по двум координатам. Уравнение Шредингера решено с использованием квазиклассического (эйконального) подхода. Показана теоретическая возможность пространственной фокусировки нейтронов с образованием точечного фокуса, а также "банчей" нейтронов.

Проблема микроскопа на ультрахолодных нейтронах (УХН), впервые поднятая И.М. Франком еще в 1972 г. [1], до сих пор не потеряла своей актуальности. Решение этой проблемы идет по нескольким направлениям. Одним из них является создание светосильной фокусирующей оптики для УХН. В частности, интерес представляют различные способы фокусировки нейтронов с использованием неоднородных магнитных полей. Магнитные линзы для УХН обсуждались, например, в работах [2–4].

В настоящей работе впервые теоретически исследуется возможность пространственной фокусировки УХН в магнитном поле с поперечным (по оси X) и продольным (по оси Z) градиентом одновременно.

Движение УХН в стационарном режиме под действием гравитационного и магнитного полей описывается стационарным уравнением Шредингера. Потенциал этих полей равен: $U = mgz \pm \mu H$, где m — масса нейтрона, g — ускорение свободного падения, $mg = 0.98 \cdot 10^{-7}$ eV/m; $\mu = 6.02 \cdot 10^{-8}$ eV/T — магнитный момент нейтрона. Знаки "$\pm$" перед μ соответствуют нейтронам с различной поляризацией спинов относительно магнитного поля.

Пусть магнитное поле H имеет следующую пространственную конфигурацию:

$$H = H_0 + \alpha_2 x^2 + \beta_1 z + \beta_2 z^2, \qquad (1)$$

где H_0, α_2, β_1, β_2 — константы, не зависящие от координат.

Поперечный градиент магнитного поля должен иметь величину, удовлетворяющую условию $2\alpha_2 L_x \gg 2H_0/L_x$, чтобы эффективность фокусировки была высока. Здесь L_x — поперечный размер пучка нейтронов.

Стационарное уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ нейтронов будем решать, используя квазиклассический подход. Положим $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) \exp\{iS(\mathbf{r})\}$, где S — эйконал, ψ_0 — медленно меняющаяся по сравнению с эйконалом функция. Тогда из уравнения Шредингера получаем уравнение Гамильтона–Якоби для эйкональной функции S:

$$(\partial S/\partial z)^2 + (\partial S/\partial x)^2 - \alpha z - p^2 \pm 2m\mu H = 0. \qquad (2)$$

В (2) введены следующие обозначения: $\alpha = 2m^2 g \cong 5.46 \cdot 10^{-53}$ kg^{2}m/s^2, p — импульс нейтрона при $z = 0$.

Решение уравнения (2) ищем в виде:

$$S = S_0(z) + x^2 S_2(z)/2. \qquad (3)$$

Ограничиваясь в (3) членами $\sim x^2$, мы тем самым пренебрегаем сферической аберрацией расходящегося потока (пучка) УХН.

Подставляя S в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для нахождения функций S_0 и S_2:

$$(\partial S_0/\partial z)(\partial S_2/\partial z) + S_2^2(z) \pm 2m\mu\alpha_2 = 0, \qquad (4)$$

$$(\partial S_0/\partial z)^2 - \alpha z - p^2 \pm 2m\mu(H_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2) = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) представляем в виде:

$$(\partial S_0/\partial z)^2 = az^2 + bz + c, \qquad (6)$$

где $a = +2m\mu\beta_2$; $b = \alpha + 2m\mu\beta_1$; $c = p^2 + 2m\mu H_0$.

Интегрируя уравнение (6), получим:

$$S_0 = \pm(z/2 + C_1)(az^2 + bz + c)^{1/2} + C_2 \int (az^2 + bz + c)^{-1/2} dz + C_3, \qquad (7)$$

где интеграл в правой части (7) принимает разные значения в зависимости от знака a. Рассмотрим для определенности $a > 0$, что соответствует УХН, поляризованным вдоль поля H.

Тогда для функции $S_0(z)$ имеем:

$$S_0 = \pm\,(z/2 + C_1)(az^2 + bz + c)^{1/2} + C_2(a)^{-1/2}$$
$$\times \Big\{\ln[2a^{1/2}(az^2 + bz + c)^{1/2} + 2az + b]\Big\} + C_3. \tag{8}$$

Здесь
$$C_1 = b/4a = (\alpha + 2m\mu\beta_1)/8m\mu\beta_2;$$
$$C_2 = C/2 - b^2/8a = [8m\mu\beta_2(p^2 + 2m\mu H_0) - (\alpha + 2m\mu\beta_1)^2]/16m\mu\beta_2,$$

C_3 — константа интегрирования. Заметим, что знак коэффициента a влияет на явный вид функции S_0, но не ограничивает возможность пространственной фокусировки нейтронов с другой поляризацией спина.

Исследуем теперь вопрос о фокусировке УХН, исходя из квантово-механических представлений о плотности нейтронного потока.

Найдем вектор **J** плотности потока УХН:

$$\mathbf{J} = i\hbar(\psi\,\mathrm{grad}\,\psi^* - \psi^*\mathrm{grad}\,\psi), \tag{9}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, ψ^* — функция, комплексно сопряженная с ψ.

Компоненты вектора **J** равны:

$$J_x = \hbar\psi_0^2 x S_2(z)/m \cong 0.63 \cdot 10^{-7}\psi_0^2 x S_2(z), \tag{10}$$

$$J_z = \hbar\psi_0^2\big(\partial S_0/\partial z + (x^2/2)(\partial S_2/\partial z)\big)/m$$
$$\cong 0.63 \cdot 10^{-7}\big(\partial S_0/\partial z + (x^2/2)(\partial S_2/\partial z)\big).$$

Здесь
$$\partial S_0/\partial z = \pm(az^2 + bz + c)^{1/2}, \tag{11}$$
$$\partial S_2/\partial z = -(S_2^2 + 2m\mu\alpha_2)/\pm\,(az^2 + bz + c)^{1/2}. \tag{12}$$

Производная $\partial S_0/\partial z$ не зависит от характера поляризации спина. В выражении (12) перед квадратным корнем возьмем знак "плюс". Решая уравнение (12), получим:

$$S_2 = (2m\mu\alpha_2)^{1/2}\,\mathrm{ctg}\,f(z),$$

где

$$f(z) = (2m\mu\alpha_2/a)^{1/2} \times \ln[2(a)^{1/2}(az^2 + bz + c)^{1/2} + 2az + b] + \text{const}, \ a \neq 0. \quad (13)$$

Параметры фокусировки определяются производными функций S_0 и S_2, поэтому в (13) константу можно положить равной нулю. Фокусировка УХН произойдет в точке с координатами: $x = 0$, $z = z_f$, где z_f определяется из уравнения: $\partial J_z(x, z)/\partial z = 0$. Легко находим, что если $a \neq 0$, то плотность потока УХН достигает максимальной величины в точке $x = 0$, $z = z_f = -b/(2a)$. Параметр b принимает различные значения для нейтронов с разной поляризацией. Тогда учитывая малость величин α, m, μ, получаем, что УХН со спинами вдоль и против поля фокусируются в различных точках z_f. Расстояние между точками фокусировки различно поляризованных УХН равно $\Delta z_f = -\beta_1/\beta_2$. Отсюда следует, что при отсутствии линейной продольной неоднородности магнитного поля в точке z_f фокусируются УХН обеих поляризаций.
Острота фокусировки зависит от производной $\partial S_2/\partial z$, причем должно выполняться условие $\partial S_2/\partial z < 0$, что соответствует выбранному выше знаку в (12). Из выражения (12) вытекает возможность управления процессом фокусировки с помощью варьирования параметра α_2. В случае, если $a = 0$, что соответствует отсутствию квадратичной неоднородности по z, фокусировка происходит при выполнении условия $b = \alpha + 2m\mu\beta_1 = 0$. При этом нейтроны образуют пространственные "банчи" УХН (области повышенной концентрации нейтронов) в тех точках z, которые попадают в область неоднородного по x поля. Величина продольного градиента, требуемого для этого, равна $\beta_1 \approx 2.7 \cdot 10^{-19}$ T/m. Видно, что требование к продольной линейной неоднородности поля гораздо менее строгое, чем для поперечной неоднородности.

В заключение отметим, что все полученные результаты являются следствием выбора профиля магнитного поля в виде (1) и эйкональной функции в форме (3).

Список литературы

[1] *Франк И.М.* // Природа. 1972. № 9. С. 29.
[2] *Golub R., Carter P.* Nuclear Instruments and Methods. 1971. V. 91. P. 205–209.
[3] *Терехов Г.И.* // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3. В. 23. С. 1275–1279.
[4] *Франк А.И.* // УФН. 1987. Т. 151. В. 2. С. 229–272.