01;09

Асимптотический метод расчета вибраторных антенн

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
E-mail: vav@novsu.ac.ru

Поступило в Редакцию 22 октября 2001 г.

Известные численные и численно-аналитические методы расчета вибраторных антенн обладают следующей особенностью: по мере уменьшения радиуса вибратора падает эффективность численных методов.

Развит новый асимптотический метод, обладающий противоположным свойством: по мере уменьшения радиуса вибратора растет эффективность этого метода. Поэтому предлагаемый асимптотический метод дополняет известные численные и численно-аналитические методы.

1. Постановка задачи. В работе [1] разработана теория интегрального уравнения вибраторных антенн и дано обоснование метода Галеркина. В работе [2] предложен численно-аналитический метод расчета активных антенн, возбуждаемых сосредоточенными источниками.

Методы работ [1,2] обладают следующей особенностью: по мере уменьшения радиуса вибратора падает эффективность этих методов. И самое важное, что эти методы принципиально не дают ответа на вопрос о том, как ведут себя различные характеристики антенн в предельном случае, когда радиус стремится к нулю.

Отмеченной особенностью обладают также методы, предложенные в [3] и в других работах, поэтому проблема тонких вибраторов весьма актуальна.

Интересные методы расчета тонких вибраторов были предложены в работах [4,5]. В работе [4] получено одномерное интегродифференциальное уравнение для определения тока, текущего вдоль вибратора. Однако при выводе уравнения делается ряд приближений, поэтому уравнение является приближенным. В работе [5] получена бесконечная система линейных алгебраических для нахождения тока, выявлена связь бесконечной системы и интегродифференциального уравнения, полученного в работе [4]. Однако авторы названной работы несколько позже [3] обнаружили медленную сходимость метода усечения при увеличении числа базисных функций и, по-видимому, отказались от данного подхода.

В данной работе предложен новый метод, лишенный указанных недостатков и решающий проблему тонких вибраторов.

2. Сведение интегродифференциального уравнения к бесконечной системе алгебраических уравнений. Рассмотрим трубчатый цилиндрический вибратор длиной $2l$, радиусом a. Под воздействием первичного поля $E_z^0(z)$, которое полагаем осесимметричным, на идеально-проводящей поверхности наводятся аксиальные токи. Плотность поверхностных токов $j_z(z)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению [4]:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\iint\limits_S j_z(z')\,\frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}\,dS' = -i\omega\varepsilon E_z^0(z), \tag{1}$$

где

$$R=\sqrt{(z-z')^2+2a^2[1-\cos(\varphi-\varphi')]}.$$

В начале выясним причину низкой эффективности метода, предложенного в работе [5]. В ней решалось интегральное уравнение, которое получается из (1) в результате обращения дифференциального оператора, интегральное уравнение с логарифмической особенностью в ядре. Решение такого уравнения, как известно, на концах интервала $[-1, 1]$, ведет себя как функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Разложим эту функцию по тригонометрическим функциям и найдем коэффициенты разложения:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\cos(\pi n x),\quad c_n=\frac{1}{2}\,\varepsilon_n\pi J_0(\pi n),\quad \varepsilon_n=\begin{cases}1,\, n=0,\\ 2,\, n>0,\end{cases} \tag{2}$$

где J_0 — функция Бесселя.

Как следует из (2), ряд действительно медленно сходится. А теперь обратимся к интегродифференциальному уравнению (1), решение которого на концах интервала $[-1, 1]$ ведет себя как функция $\sqrt{1-x^2}$. Разложим ее по тригонометрическим функциям, обращающимся на концах интервала в ноль:

$$\sqrt{1-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos\left(\pi\,\frac{2n-1}{2}\,x\right),\quad c_n=\frac{2}{2n-1}\,J_1\left(\pi\,\frac{2n-1}{2}\right), \tag{3}$$

где J_1 — функция Бесселя.

Ряд (3) сходится значительно быстрее, чем (2). В этом проявляется важное преимущество интегродифференциального уравнения перед интегральным уравнением, которое решалось в работе [5].

Для сведения двухмерного уравнения (1) к одномерному воспользуемся разложением функции Грина в сумму-интеграл в цилиндрической системе координат [6]:

$$\frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-in(\varphi-\varphi'))$$

$$\times\int_0^{+\infty}\exp\Bigl(-\sqrt{h^2-k^2}\,|z-z|'\Bigr)\frac{J_n(hr)J_n(hr')}{\sqrt{h^2-k^2}}\,hdh. \quad (4)$$

На основе (4) сведем двумерное уравнение (1) к одномерному уравнению относительно тока (ток получается из плотности тока умножением на $2\pi a$):

$$-\left(\frac{d^2}{(kl)d\tau^2}+(kl)\right)\int_{-1}^{1}B(\tau,t)I(t)dt = i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{k}\,E^0(\tau), \quad (5)$$

где

$$B(\tau,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\exp\left(-\sqrt{h^2-1}\,|\tau-t|\right)\frac{J_0^2(hka)}{\sqrt{h^2-1}}\,hdh.$$

А теперь, ограничиваясь рассмотрением только четной задачи, разложим функцию тока по тригонометрическому базису:

$$I(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos(\nu_n\tau), \qquad \upsilon_n = \frac{2n-1}{2}\,\pi. \quad (6)$$

Найдем интегралы, возникающие при решении уравнения (5) методом Галеркина с использованием базиса (6):

$$\int_{-1}^{1}\exp(-x|\tau-t|)\cos(\nu_m t)dt = \frac{2x\cos(\upsilon_m\tau)}{x^2+\nu_m^2}+\frac{\exp(-x)}{x^2+\nu_m^2}$$

$$\times\,\nu_m\sin\nu_m\bigl(\exp(x\tau)+\exp(-x\tau)\bigr), \quad (7)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\exp(-x|\tau - t|)\cos(\nu_m t)\cos(\nu_n\tau)dtd\tau$$
$$= \frac{2x\delta_{mn}}{x^2+\nu_n^2} + \frac{2(-1)^{m+n}\nu_m\nu_n}{(x^2+\nu_m^2)(x^2+\nu_n^2)}\big(1+\exp(-2x)\big), \qquad (8)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\int_{-1}^{1}\exp(-x|\tau - t|)\cos(\nu_m t)dt\right)\cos(\nu_n\tau)dt$$
$$= \frac{-2x\nu_n^2\delta_{mn}}{x^2+\nu_n^2} + \frac{2(-1)^{m+n}\nu_m\nu_n x^2}{(x^2+\nu_m^2)(x^2+\nu_n^2)}\big(1+\exp(-2x)\big),$$
$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \qquad (9)$$

Формулы (7), (8) и (9) получены в результате вычисления элементарных интегралов, поэтому подробности вычислений опущены. Замечательным является то, что в процессе нахождения интегралов появились элементы, отличные от нуля только на диагонали, когда $m = n$.

На основе разложения (6) и с учетом (7)–(9) сведем уравнение (5) к эквивалентной бесконечной системе

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\nu_n^2}{(kl)^2} - 1\right)\beta_n c_n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m K_{mn} = e_n, \qquad (10)$$

где

$$\beta_n = \int_0^{+\infty}\frac{J_0^2(kax)x}{x^2 - 1 + \frac{\nu_n^2}{(kl)^2}}\,dx, \qquad e_n = \frac{i}{120\pi k}\int_{-1}^{1}E^0(\tau)\cos(\nu_n\tau)d\tau,$$

$$K_{mn} = \frac{-kl\nu_n\upsilon_m(-1)^{m+n}}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x^3J_0^2(kax)}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\times \frac{\big(1+\exp(-2\sqrt{x^2-1}\,kl)\big)}{\big((x^2-1)(kl)^2+\nu_n^2\big)\big((x^2-1)(kl)^2+\nu_m^2\big)}\,dx.$$

Необходимо отметить, что матричные элементы записаны для случая $x \geqslant 1$, при $x \leqslant 1$ необходимо воспользоваться заменой $\sqrt{x^2-1} = i\sqrt{1-x^2}$.

Для вычисления β_n представим интеграл в виде суммы двух интегралов и далее плохо сходящийся интеграл найдем аналитически

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{J_0^2(kax)x}{x^2 - 1 + \frac{v_n^2}{(kl)^2}}\, dx = I_0\left(\frac{v_n a}{l}\right) K_0\left(\frac{v_n a}{l}\right) + \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{J_0^2(kax)x}{x^2 - 1 + \frac{v_n^2}{(kl)^2}} - \frac{J_0^2(kax)x}{x^2 + \frac{v_n^2}{(kl)^2}} \right) dx. \quad (11)$$

Сходимость приближенных решений к точным доказана в работе [1]. Матричные элементы представлены в виде одномерных интегралов. Все эти интегралы остаются сходящимися, если a устремить к нулю. Поэтому изложенный здесь метод по сути является асимптотическим, хотя неизвестный ток находится в результате решения системы уравнений.

Далее, когда величина $x = \frac{v_n a}{l}$ будет уменьшаться по мере уменьшения радиуса вибратора, то, согласно асимптотике

$$I_0(x)K_0(x) \approx \ln(1/x) + 0.115947, \quad x \to 0,$$

будет увеличиваться элемент β_n, стоящий на главной диагонали матрицы системы (10), а следовательно будет расти эффективность численных методов решения системы (10).

3. Результаты численных расчетов. В табл. 1 приведены входные сопротивления, которые вычислены на основе базиса, удовлетворяющего условию Мейкснера на ребре [1]. Табл. 2 и 3 получены с помощью тригонометрического базиса. Во всех случаях применяется численно-аналитический метод решения бесконечных систем [2]. Полагаем, что $2T/l$ — ширина участка в середине вибратора, где первичное поле отлично от нуля, и равна $U_0/2T$, где U_0 — амплитуда напряжения.

И наконец, число N в таблицах означает порядок решаемой на ЭВМ системы линейных алгебраических уравнений. Поэтому таблицы демонстрируют скорость сходимости, эффективность методов.

Табл. 1 и 2 демонстрируют прекрасное совпадение двух методов, а также эффективность каждого метода. Как следует из табл. 3, по мере уменьшения радиуса вибратора улучшается сходимость на основе тригонометрического базиса.

Таблица 1. Входные сопротивления полуволнового вибратора

	$kl=\frac{\pi}{2},\quad \frac{l}{a}=60$		
N	$\frac{T}{l}=0.1$	$\frac{T}{l}=ka$	$\frac{T}{l}=10ka$
1	$108.31-i4.21032$	$107.63-i8.5062$	$109.54-i1.1654$
5	$91.534+i50.739$	$94.808+i48.152$	$89.985+i53.830$
10	$92.037+i50.437$	$95.462+i47.687$	$89.984+i53.842$
15	$92.063+i50.415$	$95.538+i47.622$	$89.975+i53.844$
20	$92.064+i50.413$	$95.538+i47.624$	$89.976+i53.843$

Таблица 2. Входные сопротивления полуволнового вибратора

	$kl=\frac{\pi}{2},\quad \frac{l}{a}=60$		
N	$\frac{T}{l}=0.1$	$\frac{T}{l}=ka$	$\frac{T}{l}=10ka$
1	$78.568+i37.002$	$80.552+i34.847$	$78.033+i39.815$
5	$88.745+i44.335$	$91.446+i41.640$	$87.493+i47.765$
10	$90.476+i46.614$	$93.658+i43.902$	$88.740+i50.033$
20	$91.120+i48.175$	$94.346+i45.446$	$89.225+i51.596$
40	$91.553+i49.207$	$94.836+i46.473$	$89.570+i52.635$
80	$91.794+i49.887$	$95.132+i47.041$	$89.758+i53.206$
100	$91.842+i49.887$	$95.190+i47.153$	$89.800+i53.318$
120	$91.873+i49.960$	$95.228+i47.225$	$89.821+i53.391$
150	$91.903+i50.030$	$95.265+i47.296$	$89.845+i53.465$

Таблица 3. Входные сопротивления полуволнового вибратора

	$kl=\frac{\pi}{2},\quad \frac{l}{a}=1000000$		
N	$\frac{T}{l}=0.1$	$\frac{T}{l}=ka$	$\frac{T}{l}=10ka$
1	$74.483+i41.981$	$74.541+i41.586$	$74.541+i41.586$
2	$76.516+i43.206$	$76.615+i42.801$	$76.615+i42.801$
10	$76.360+i43.918$	$76.461+i43.515$	$76.461+i43.515$
50	$76.375+i44.128$	$76.469+i43.722$	$76.469+i43.722$
150	$76.379+i44.163$	$76.472+i43.755$	$76.471+i43.755$

Список литературы

[1] *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. В. 12. С. 2160–2168.
[2] *Нефедов Е.И., Радциг Ю.Ю., Эминов С.И.* // Докл. РАН. 1995. Т. 344. N 4. С. 477–478.
[3] *Вайнштейн Л.А., Фок В.А.* // ЖТФ. 1967. Т. 37. В. 7. С. 1189–1195.
[4] *Леонтович М., Левин М.* // ЖТФ. 1944. Т. 14. В. 9. С. 481–506.
[5] *Капица П.Л., Фок В.А., Вайнштейн Л.А.* // ЖТФ. 1959. Т. 29. В. 10. С. 1189–1205.
[6] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967.