01;03

К вопросу о вычислении скорости скольжения разреженного газа вдоль твердой цилиндрической поверхности

© А.В. Латышев, В.Н. Попов, А.А. Юшканов

Поморский государственный университет, Архангельск
E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

Поступило в Редакцию 11 октября 2001 г.

Представлены результаты, полученные с использованием точных аналитических методов в задаче о скольжении разреженного газа вдоль поверхности прямого кругового цилиндра. Проведено сравнение с литературными данными.

Полная система граничных условий при обтекании разреженным газом произвольной гладкой поверхности получена с использованием БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели кинетического уравнения Больцмана в [1]. Позднее эта задача для случая твердой сферической поверхности решалась моментными методами как для линеаризованного уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме Больцмана [2], так и для модельных кинетических уравнений [3,4]. Вычислению отдельных газокинетических коэффициентов скольжения второго порядка вдоль твердой сферической поверхности посвящены работы [5–7]. В настоящей работе приводятся результаты, полученные авторами с использованием точных аналитических методов в задаче о скольжении разреженного газа вдоль поверхности прямого кругового цилиндра, и проводится их анализ.

В рассматриваемой задаче возможны две качественно различные ситуации: поперечное обтекание поверхности цилиндра (при условии, что градиент температуры и массовая скорость газа вдали от поверхности перпендикулярны его оси) и продольное обтекание (при условии, что градиент температуры и массовая скорость газа вдали от поверхности направлены вдоль его оси). В обоих случаях течение газового потока будем описывать линеаризованным уравнением Больцмана с оператором столкновений БГК модели, записанным в цилиндрической системе координат, ось Oz которой совпадает с осью цилиндра. В качестве граничного условия на поверхности цилиндра принята модель диффузного отражения.

Линеаризуем функцию распределения, описывающую состояние газа, относительно функции распределения в объеме газа в приближении Чепмена–Энскога. Раскладывая функцию $Y(\rho, \varphi, \mathbf{C})$, учитывающую отклонение функции распределения газовых молекул по скоростям и координатам в слое Кнудсена от функции распределения в объеме газа, в ряд по малому параметру $1/R$

$$Y(\rho, \varphi, \mathbf{C}) = Y^{(1)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) + R^{-1}Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) + \ldots,$$

приходим к уравнению

$$C_\rho \frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \rho} + Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C'^2) K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}') d\mathbf{C}'$$

$$- C_\varphi^2 \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\rho} + C_\rho C_\varphi \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\varphi} - C_\varphi \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \varphi}, \qquad (1)$$

из которого при заданных граничных условиях (речь о них пойдет ниже), находим вид $Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C})$.

Здесь ρ и $\mathbf{C}$ — безразмерные радиус-вектор и компоненты собственной скорости частиц газа, $Y^{(1)}(\rho, \varphi, \mathbf{C})$ совпадает с решением задачи о скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности [8]:

$$K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + \mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{2}{3}\left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\left(C'^2 - \frac{3}{2}\right),$$

R — безразмерный радиус цилиндра. Способ обезразмеривания величин совпадает с принятым в [1].

Предположим, что градиент температуры вдали от поверхности цилиндра перпендикулярен его поверхности, а касательная к поверхности компонента массовой скорости не постоянна, а изменяется в направлении к нормали к ней, т.е. отличны от нуля величины $\frac{1}{T_s}\frac{\partial T}{R\partial\varphi}\Big|_S$ и $\frac{\partial U_\varphi}{\partial \rho}\Big|_S$.

В этом случае [8]

$$Y^{(1)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) = C_\varphi Y_a^{(1)}(\rho, \varphi, C_\rho) + C_\varphi(C_\varphi^2 + C_z^2 - 2) Y_b^{(1)}(\rho, \varphi, C_\rho), \quad (2)$$

$$Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) = C_\varphi Y_a^{(2)}(\rho, \varphi, C_\rho) + \sum_k b_k(C_z, C_\varphi) Y_k^{(2)}(\rho, \varphi, C_\rho), \quad (3)$$

где C_φ в совокупности с $b_k(C_z, C_\varphi)$ образует полную систему ортогональных (в смысле скалярного произведения) многочленов.

Обозначим $\mu = C_\rho$. Подставляя разложения (2) и (3) в (1), домножая полученное соотношение на $C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_z^2)$ и интегрируя по C_φ и C_z от $-\infty$ до $+\infty$, приходим к краевой задаче, состоящей из уравнения

$$\mu \frac{\partial Y_a^{(2)}}{\partial \rho} + Y_a^{(2)}(\rho, \varphi, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_a^{(2)}(\rho, \varphi, \mu') \exp(-\mu'^2) d\mu'$$

$$+ \mu Y_a^{(1)}(\rho, \varphi, \mu) - \frac{3}{2} \frac{\partial Y_a^{(1)}}{\partial \mu} + 3\mu Y_b^{(1)}(\rho, \varphi, \mu) - \frac{3}{2} \frac{\partial Y_b^{(1)}}{\partial \mu} \qquad (4)$$

и граничных условий

$$Y_a^{(2)}(R, \varphi, \mu) = -2U_\varphi^{(2)}\Big|_S, \quad (\mu > 0), \qquad Y_a^{(2)}(\infty, \varphi, \mu) = 0,$$

решив которую, находим искомую скорость скольжения разреженного газа вдоль твердой цилиндрической поверхности

$$U_\varphi\Big|_S = \frac{3}{4}\left[(Q_3 + Q_1 Q_2)\frac{1}{T_S}\frac{\partial T}{R\partial\varphi}\Big|_S + Q_0 \frac{\partial U_\varphi}{\partial \rho}\Big|_S\right]. \qquad (5)$$

Подставляя в [5] значения входящего в него Лоялковских интегралов [9], окончательно получаем

$$U_\varphi^{(2)}\Big|_S = -0.40017\,\frac{1}{T_S}\frac{\partial T}{R\partial\varphi}\Big|_S - 0.75000\,\frac{\partial U_\varphi}{\partial \rho}\Big|_S. \qquad (6)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что слагаемое $\mu Y_a^{(1)}$ не вносит вклада в скорость скольжения на поверхности, так как отвечающее ему частное решение уравнения (4) имеет вид $(\rho - R)Y_a^{(1)}$ и на поверхности (при $\rho = R$) обращается в нуль.

В случае продольного обтекания цилиндрической поверхности отличны от нуля величины $\frac{1}{T_S}\frac{\partial T}{\partial z}\big|_S$ и $\frac{\partial U_z}{\partial \rho}\big|_S$.

При этом

$$Y^{(1)}(\rho, z, \mathbf{C}) = C_z Y_a^{(1)}(\rho, z, C_\rho) + C_z(C_\varphi^2 + C_z^2 - 2)Y_b^{(1)}(\rho, z, C_\rho) \qquad (7)$$

$$Y^{(2)}(\rho, z, \mathbf{C}) = C_\varphi Y_a^{(2)}(\rho, z, C_\rho) + \sum_k d_k(C_z, C_\varphi) Y_k^{(2)}(\rho, z, C_\rho), \qquad (8)$$

где C_z в совокупности с $d_k(C_z, C_\varphi)$ образует полную систему ортогональных (в смысле скалярного произведения) многочленов.

Подставляя разложения (7) и (8) в (1), домножая полученное соотношение на $C_z \exp(-C_\varphi^2 - C_z^2)$ и интегрируя по C_φ и C_z от $-\infty$ до $+\infty$, получим уравнение для функции $Y_a^{(2)}(\rho, z, \mu)$:

$$\mu \frac{\partial Y_a^{(2)}}{\partial \rho} + Y_a^{(2)}(\rho, z, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_a^{(2)}(\rho, z, \mu') \exp(-\mu'^2) d\mu'$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial Y_a^{(1)}}{\partial \mu} + \mu Y_b^{(1)}(\rho, z, \mu) - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_b^{(1)}}{\partial \mu} \tag{9}$$

с граничными условиями

$$Y_a^{(2)}(R, \mu) = -2U_z^{(2)}\Big|_S, \quad (\mu > 0), \qquad Y_a^{(2)}(\infty, z, \mu) = 0.$$

Учитывая, что слагаемое $\mu Y_a^{(1)}$ не вносит вклада в скорость скольжения на поверхности, а последние три слагаемых в правой части (9) в три раза меньше соответствующих слагаемых в (4), то можно утверждать, что при продольном обтекании цилиндра в три раза меньше будут и соответствующие коэффициенты скольжения:

$$U_z\Big|_S = -0.13339 \frac{1}{T_S} \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_S -0.25000 \frac{\partial U_z}{\partial \rho}\Big|_S.$$

Отметим, что отмеченное выше соотношение между коэффициентами скольжения при продольном и поперечном обтекании цилиндра не зависит от выбора метода решения уранений (4) и (9), а определяется самой структурой этих уравнений. Однако это соотношение никак не может быть получено из результатов, полученных в [1]. В то же время в случае продольного обтекания цилиндрической поверхности полученные результаты полностью совпадают с соответствующими результатами [1].

Полученные в работе результаты могут быть использованы при решении самых разнообразных проблем кинетической теории газа, для решения которых в граничных условиях необходимо учитывать эффекты, вносящие в скорость скольжения линейные по числу Кнудсена поправки.

Список литературы

[1] *Sone Y.* // In: Rar. Gas Dynam. New York: Academic Press, 1969. V. 1. P. 243–253.
[2] *Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 498–502.
[3] *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. В. 11. С. 2253–2261.
[4] *Яламов Ю.И., Поддоскин А.А., Юшканов А.А.* // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 343–346.
[5] *Гайдуков М.Н., Попов В.Н.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1998. № 2. С. 165–173.
[6] *Ролдугин В.И.* // Коллоид. журн. 1987. Т. 49. № 1. С. 45–53.
[7] *Баканов С.П., Высоцкий В.В., Некрасов А.Н.* // Коллоид. журн. 1986. Т. 48. № 5. С. 851–855.
[8] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
[9] *Loyalka S.K.* // Transport theory and statistical physics. 1975. V. 4. P. 55–65.