01

Квазипериодические решения уравнения Кортевега–де Вриза

© *Ю.Н. Зайко*

Поволжская академия государственной службы, Саратов

Поступило в Редакцию 1 октября 2001 г.

Рассмотрены физические предпосылки появления квазипериодических решений уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ). Решения возникают вблизи особенностей коэффициентов уравнения КдВ, описывающих, например, волны поляризации в сегнетоэлектрике с фазовым переходом первого рода, или в системе электронный пучок–волноведущая структура. Наличие особенности приводит к тому, что скорость длинноволновых возмущений в системе становится мнимой, что соответствует распространению волн в полосе непрозрачности. Рождение второй гармоники связано с модуляцией исходного периодического решения на второй (низкой) частоте.

В работе [1] было высказано предположение, что бесконечная последовательность бифуркаций рождения n-й гармоники периодического решения уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ), имеющая точку сгущения, может приводить к стохастизации решений последнего. Это было подтверждено на примере численного исследования решений уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса (КдВБ), описывающего динамику поляризации сегнетоэлектрика с фазовым переходом типа порядок–беспорядок [2]. Настоящая работа посвящена исследованию физических предпосылок появления этих решений. Этот вопрос интересен потому, что в приложениях часто встречаются модельные уравнения: КдВ и подобные ему, коэффициенты которых имеют особенности, что и является причиной появления точки сгущения бифуркаций.

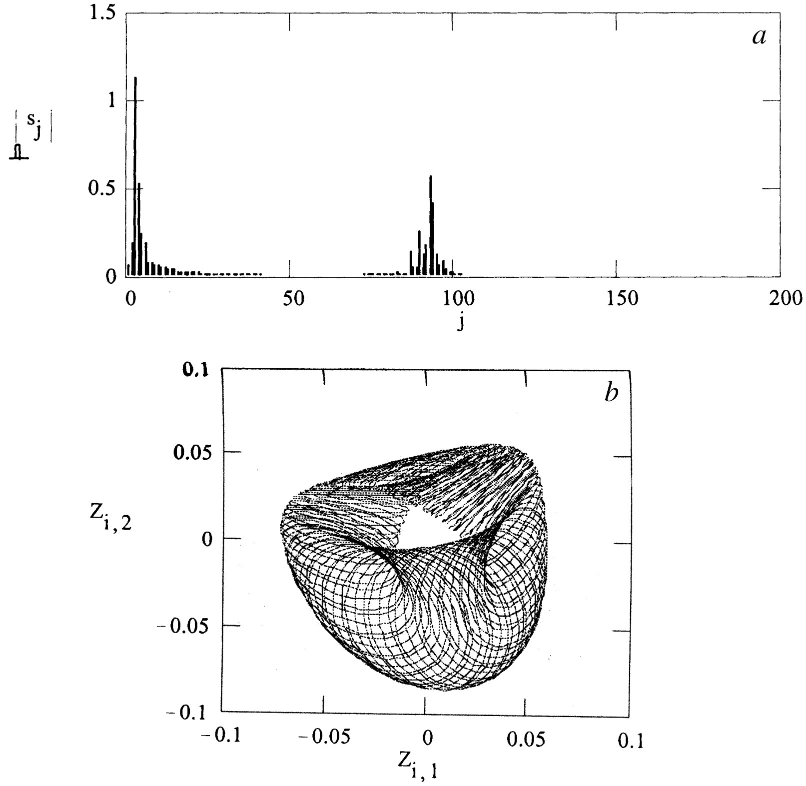
Для сегнетоэлектрика точка сгущения последовательности бифуркаций совпадает с точкой Кюри $T = T_c$, в которой происходит фазовый переход. Как показано в [2], в этой точке рождается квазипериодическое решение уравнения КдВБ с несоизмеримыми в общем случае частотами. Формально это связано с тем, что коэффициенты уравнения КдВБ для поперечной волны поляризации P выше точки Кюри становятся мнимыми, а решение представляет собой комплексную функцию

$P = P_1 + iP_2$ с вещественными P_1 и P_2. Причиной этого, в свою очередь, является мнимая скорость длинноволновых возмущений малой амплитуды, распространяющихся в системе при $T > T_c$, что соответствует частоте ω возмущения, попадающей в полосу непрозрачности в линейном приближении [3]. Физически это означает модуляцию исходного гармонического решения, т. е. общее решение линеаризованной задачи может быть представлено в виде $P = \mathrm{Re}\{(P_1 + iP_2)\exp(ikz - i\omega t)\}$, где $k = k(\omega)$ — волновое число, соответствующее частоте ω. Здесь явно выделены быстроосциллирующая на частоте ω и медленноменяющаяся амплитудная части решения. Изменения последней связаны с периодическим обменом энергией между компонентами решения $\sim P_{1,2}$, сдвинутыми по фазе на $\pi/2$ относительно друг друга. В работе [4] показано, что из амплитудных компонент $P_{1,2}$ можно построить вектор модуляции, аналогичный вектору Джонса в поляризационной оптике [5].

Рассмотрим детально возникновение квазипериодичности в случае продольных волн, возникающих в системе "электронный пучок–волноведущая структура (ЭП–ВС)". В линейном приближении есть две волны: так называемая медленная волна в пучке и прямая волна в ВС. С учетом слабой нелинейности задача в гидродинамическом приближении описывается уравнением КдВ для переменной составляющей скорости пучка v:

$$v_\tau + Avv_\eta + Bv_{\eta\eta\eta} + \lambda v = 0; \quad \lambda = \frac{1}{2\omega_{po}}\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right), \tag{1}$$

где введено слабое затухание λ, зависящее от проводимости G и сопротивления R волноведущей системы на единицу длины; C и L — погонные емкость и индуктивность ВС, ω_{po} — плазменная частота электронов [1]. Выражения для A и B приведены в [1]. Без ограничения общности положим $A = 1$. Переменные $\tau = \varepsilon^{3/2}t$ и $\eta = \varepsilon^{1/2}(z - \chi t)$ — так называемые растянутые координаты; z и t — реальные координата и время, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Скорость длинноволновых возмущений χ определяется из дисперсионного уравнения $K(\chi) = 0$ [1], которое вблизи комплексного решения $\chi_0 = \chi_r \pm i\chi_i$ можно представить в виде $K(\chi) \approx M \cdot [(\chi - \chi_r)^2 + \chi_i^2]$, M — константа. Условием появления такого решения является также $K'(\chi_0) = 0$. Для K' имеем: $K'(\chi) \approx 2M(\chi - \chi_r) = \pm 2iM\chi_i$. Ограничиваясь знаком "+" и используя для B выражение $B = [\sigma^4 \cdot K'(\chi)]^{-1}$, σ — параметр экранировки



Результаты численного анализа уравнения (2) для $R = -20$, $\mu = 0.008$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2580$. Начальные значения: $\operatorname{Re} v(0) = \operatorname{Im} v(0) = 0.01$; $\operatorname{Re} v^{(n)}(0) = \operatorname{Im} v^{(n)}(0) = 0.001$, $n = 1, 2$. *a* — спектр решения (2), рассчитанный по методу быстрого Фурье-преобразования. $s_j = fft(\operatorname{Re} v(x_i))$; $j = 0 \div 2048$. *b* — фазовый портрет решения (2); $Z_{i,1} = \operatorname{Re} v(x_i)$, $Z_{i,2} = \operatorname{Im} v(x_i)$; $i = 0 \div 4095$.

волн плотности заряда за счет присутствия ВС [1], после несложных преобразований (1) для решений, зависящих от $x = \eta - V\tau$, для $V = 0$ получим уравнение:

$$v_x - i \cdot v v_x - R \cdot v_{xxx} - i \cdot \mu v = 0; \quad R = \frac{\varepsilon}{2\sigma^4 M \cdot \chi_i^2}; \quad \mu = \frac{\lambda \cdot \varepsilon}{\chi_i}. \qquad (2)$$

На рисунке приведены фазовый портрет и спектр решения (2) при конкретных значениях R и μ.

Особенностью квазипериодических решений (2), как следует из рисунка, является наличие модуляционной структуры у каждой из основных частот. Это связано с нелинейностью исходных уравнений и с появлением второй (низкой) частоты. Вышесказанное подтверждает модуляционную природу квазипериодичности.

Список литературы

[1] *Зайко Ю.Н.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. В. 23. С. 63–65.
[2] *Zayko Y.N., Nefedov I.S.* // Applied Mathematics Letters. 2001. V. 14. P. 115–121.
[3] *Бурсиан Э.В.* Нелинейный кристалл: титанат бария. М.: Наука, 1974. 296 с.
[4] *Zayko Y.N.* // Applied Mathematics Letters. 1997. V. 10. N 5. P. 75–78.
[5] *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах / Пер. с англ. под ред. И.Н. Сисакяна. М.: Мир, 1987. 616 с.