

01;08

Акустический импульс в волноводе без стенок

© Л.Н. Пятницкий

Институт высоких температур РАН, Москва
E-mail: pyat7@mail.ru

Поступило в Редакцию 12 июля 2001 г.

Отражение акустической волны вогнутой конической поверхностью формирует на оси симметрии интенсивную волну с плоским фронтом и радиальным профилем поля типа функции Бесселя первого рода с индексом $n = 0$. Профиль сохраняет свою форму на протяженном отрезке, имитируя распространение в акустическом волноводе, при этом роль стенки играет боковой подвод энергии. В случае конуса со спиральной направляющей линией радиальный профиль поля отраженной волны соответствует функции Бесселя первого рода с индексом $n > 0$ и распространяется как в полом волноводе.

Состояние вещества в области высоких параметров обычно исследуется при концентрации энергии в ударной волне, которая характеризуется скачком давления от p_1 до p_2 . Волноводом для такой волны обычно служит камера низкого давления p_1 ударной трубы. В современных ударных трубах отношение p_2/p_1 достигает $10^3 - 10^4$, однако в основном за счет низкого значения давления в трубе-волноводе. При этом размеры зоны визуализации исследуемых процессов ограничены возможностями изготовления высококачественных оптических стекол и условиями их герметической установки в волновод.

В работе [1] было показано, что волновое уравнение имеет точные решения, описывающие в свободном пространстве волновые пучки, не расходящиеся в поперечном направлении. Эти решения, как в случае плоских волн, имеют конечную амплитуду и не содержат сингулярных точек. При осевой симметрии радиальное распределение поля в таком пучке выражается функцией Бесселя и воспроизводится в последующих сечениях. На этой основе энергию акустической волны можно концентрировать методом "волноводной" фокусировки акустических импульсов, являющимся альтернативой ударной трубе. Следует только

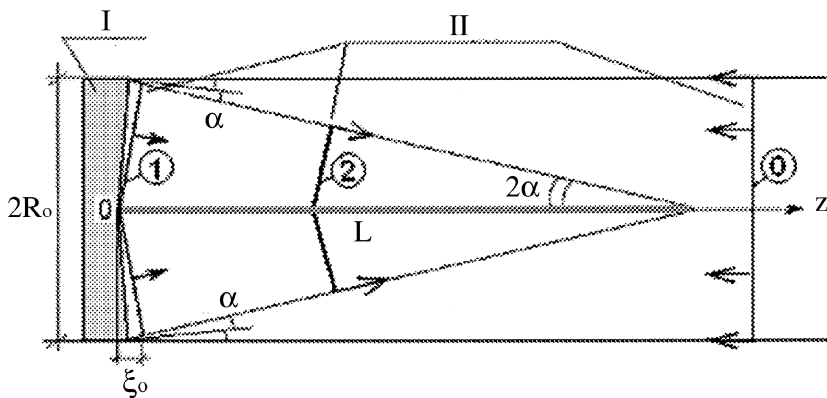


Рис. 1. Схема волноводной фокусировки.

иметь в виду, что в реальном воплощении волновой фронт ограничен в пространстве и имеет конечный диаметр.

Рассмотрим принцип такой фокусировки на примере звуковых колебаний с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$. Геометрию фокусировки иллюстрирует рис. 1. Плоский фронт 0 падающей волны (на рис. 1 справа) встречает на своем пути отражатель (I) в виде внутреннего конуса с диаметром основания $2R_0$, с углом при основании α и прямолинейной образующей $\xi = R \operatorname{tg} \alpha$.

После отражения волновой фронт (II) приобретает форму конической поверхности I, проходящей через позиции типа 2. При этом поле волны концентрируется вдоль оси симметрии z на длине фокального отрезка L . Оценим эту длину, а также диаметр d зоны концентрации энергии.

Совместим начало отсчета с вершиной конуса и найдем координату z , в которой луч падающей волны для произвольного радиуса R пересекает ось симметрии, $z = R/\sin 2\alpha$. Отсюда из простых геометрических соображений получим длину фокального отрезка L_0 :

$$L_0 = \frac{R_0}{\sin 2\alpha}. \quad (1)$$

Для оценки диаметра зоны фокусировки воспользуемся представлением о дифракционной расходимости волнового пучка, согласно которому диаметр пучка d соответствует углу 2α наклона лучей к оси и равен

$$d_0 \sim \frac{\lambda}{\alpha}. \quad (2)$$

Так как угол наклона 2α лучей постоянен вдоль фокального отрезка, то диаметр d_0 зоны концентрации энергии не должен зависеть от координаты z . Таким образом, согласно оценкам, при фокусировке на длине фокального отрезка L_0 формируется, как в волноводе диаметром d_0 , нерасходящаяся звуковая волна. Роль цилиндрического волновода выполняет боковой подвод энергии с конфигурацией типа маховского отражения. При этом, как следует из рис. 1, фронт волны распространяется вдоль оси z в режиме бегущего фокуса со скоростью $c_z = c / \cos 2\alpha$.

Обратимся теперь к более строгому определению поля волны при фокусировке. Его удобно характеризовать потенциалом ϕ скорости \mathbf{u} согласно $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$, поскольку через потенциал легко выразить переменную часть других гидродинамических параметров в волне, например давления $p = -\rho_0(\partial\phi/\partial t)$ и плотности $\rho = -(\rho_0/c^2)(\partial\phi/\partial t)$ [2]. Акустическое поле в области фокального отрезка описывается волновым уравнением $\partial^2\phi/\partial t^2 - c^2\Delta\phi = 0$. Оно, как известно, допускает факторизацию решения по координатам и времени. Поэтому монохроматическую компоненту волны с частотой ω представим зависимостью

$$\phi(r, z, t) = \text{Re}\{f(r, z) \exp[-i(\omega t - kz)]\}, \quad (3)$$

где $k = \omega/c$ — модуль волнового вектора, $f(r, z)$ — комплексная амплитуда волны.

Амплитуда волны слабо меняется вдоль оси z (производная $\partial^2 f/\partial z^2$ мала), и подстановка (3) в волновое уравнение дает уравнение для распределения амплитуды $f(r, z)$

$$2ik \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0. \quad (4)$$

За краевое условие здесь можно взять состояние волны (3) в момент ее отражения, т.е. в точке $z = 0$. Пусть $F(R \leq R_0)$ — радиальный профиль акустического поля исходной волны. Тогда при $\alpha < \pi/4$ для этого условия запишем

$$f(r, z = 0) = F(R) \exp(-ikr \sin 2\alpha). \quad (5)$$

В приосевой зоне, $r^2 < z/k$, на интервале $z \gg \lambda / \sin^2 2\alpha$ система (4) и (5) имеет решение, которое можно представить в виде (см., например, [3])

$$f(r, z) \approx f_0(z)J_0(kr \sin 2\alpha) + f_1(z) \exp\left(\frac{ikz(R_0^2 + r^2)}{2z}\right) J_0\left(\frac{kR_0 r}{z}\right), \quad (6)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого индекса с аргументом

$$x = kr \sin 2\alpha, \quad (6a)$$

$$f_0(z) = \sqrt{2\pi kz} \sin(2\alpha) F(z \sin 2\alpha) \exp(-i(kz/2) \sin^2(2\alpha + \pi/4)), \quad (6b)$$

$$f_1(z) \approx F(R_0)/(1 - z/L) \exp(-ikR_0 \sin 2\alpha). \quad (6c)$$

Слагаемое с амплитудой $f_1(z)$ обязано своим существованием конечной апертуре волны и описывает дифракцию на границе отражающего зеркала. Его влияние сказывается в конце фокального отрезка, и уже при $(L_0 - z)/\lambda \geq 10$ оно мало, $|f_1|/|f_0| \ll 1$. Поэтому при конечном диаметре падающей волны интенсивность акустического поля можно представить выражением

$$|f(r, z)|^2 \simeq |f_0|^2 |J_0(x)|^2 \quad (7)$$

с аксиальным распределением

$$|f_0|^2 = 2\pi kz \sin^2(2\alpha) F^2(z \sin 2\alpha) \quad (7a)$$

при условии

$$\lambda / \sin^2 2\alpha \ll z < (L_0 - 10\lambda). \quad (7b)$$

Согласно (7), радиальное распределение интенсивности не зависит от z . Следовательно, это распределение сохраняет цилиндрическую конфигурацию на основной части L фокального отрезка (1), определяемой условием (7b), причем $L \lesssim L_0$. Но это распределение является распределением Бесселя типа, $|J_0(x)|^2$, и выражение (2) может соответствовать только его центральному максимуму, диаметр которого составляет $d = (2.4/\pi)(\lambda / \sin 2\alpha)$. Действительно, сопоставляя это выражение с оценкой (2), находим, что для малых углов $d \approx d_0$.

От диаметра d в значительной степени зависит эффективность фокусировки $\beta = |f_0|^2/F^2$. Ее легко определить, зная функцию $F(R)$. Так, в случае прямоугольной функции $F(R)$ интенсивность на оси симметрии в точке $z = R/\sin 2\alpha$ превосходит интенсивность в соответствующей точке R падающей волны в отношении $\beta = 4\pi^2(R/\lambda)\sin 2\alpha$. Например, для $R = 100$ см, $\lambda = 0.1$ см и $\alpha = 5^\circ$ среднее по фокальному отрезку L значение эффективности составляет $\beta \approx 3 \cdot 10^3$.

Однако на эффективность фокусировки влияет также и аксиальное распределение (7а). В связи с распределением (7а) заметим, что протяженность L практически не зависит от длины волны λ и ограничена в основном параметрами установки. Далее, функция $|f_0|^2$ сфокусированного аксиального распределения воспроизводит профиль интенсивности $F^2(R = z \sin 2\alpha)$ в падающей волне с коэффициентом, линейно зависящим от z . Поэтому в сфокусированной волне, в отличие от волновода, аксиальное распределение интенсивности $|f_0|^2$ можно варьировать, меняя профиль $F^2(R)$. Так, для прямоугольного профиля F^2 функция $|f_0|^2$ будет линейно нарастать до максимального значения в точке $z \approx L$, тогда как для гауссова профиля F^2 максимум функции $|f_0|^2$ достигается при $z = 1/2L$ и т.д.

Практически, однако, менять профиль интенсивности падающей волны технически сложно. Целесообразнее изменить форму поверхности отражающего конуса и вместо прямолинейной образующей $\xi = R \operatorname{tg} \alpha$, где α — постоянная, использовать образующую с переменным углом $\alpha(R)$, для которой $\xi = \int_0^R \operatorname{tg} \alpha(R) dR$. Конкретный вид зависимости $\xi(R, \alpha)$, естественно, определяется как профилем $F^2(R)$, так и ожидаемым аксиальным распределением $|f_0|^2$. В частности, постоянным $F^2(R)$ и $|f_0|^2$ соответствует поверхность с образующей, которую для малых углов α можно описать простой формулой: $\xi = \alpha_0 R \ln(R_0/R)$, где $\alpha_0 = \alpha(R_0)$.

Возможные варианты аксиального распределения интенсивности рассмотрим на примере зависимости коэффициента $\beta(z, r = 0)$ от профиля $F^2(R)$ и формы образующей $\xi(R, \alpha)$, представляя $F^2(R)$ как функцию гауссова типа, $F^2 \sim \exp[-2(R/R_0)^{2n}]$. Для удобства сопоставления распределений β с разными n и $\xi(R, \alpha)$ отнесем их к одной и той же величине $\int_0^R F^2(R, n) R dR$, пропорциональной мощности падающей

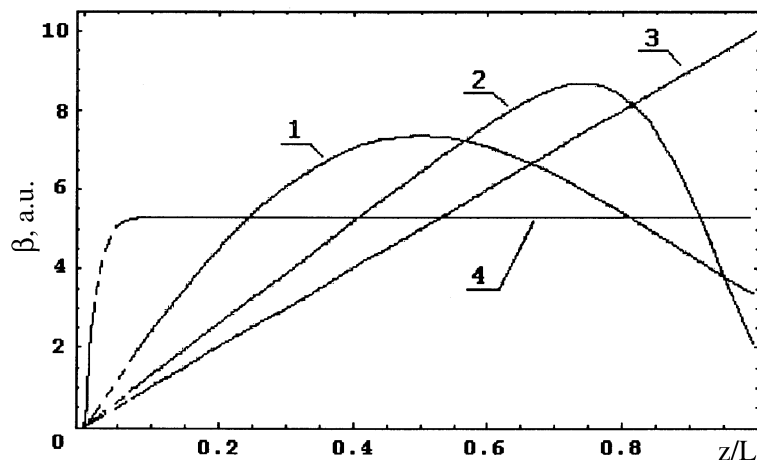


Рис. 2. Зависимости $\beta(z, r = 0)$ для $F^2 \sim \exp\{-2(R/R_0)^{2n}\}$; прямая образующая $\alpha = 5^\circ$: 1 — $n = 1$; 2 — 5, 3 — ∞ ; логарифмическая образующая $\alpha_0 = 5^\circ$: 4 — $n = \infty$.

волны. На рис. 2 они представлены в масштабе максимального значения $\beta = \beta(L, r = 0)$, соответствующего прямоугольному распределению $F^2(R)$ и принятого равным 10.

Графики 1–3 на рис. 2 построены для прямой образующей с углом $\alpha = 5^\circ$ при значениях $n = 1, 5$ и ∞ (функция F^2 при $n = \infty$ не зависит от R и дает прямоугольное распределение). Зависимость 4 относится к логарифмической образующей, которая характеризуется углом $\alpha_0(R_0)$. Она построена только для $\alpha_0 = 5^\circ$ и $n = \infty$, поскольку при других значениях n в распределении $\beta(z, r = 0)$ появляются максимумы, устранение которых здесь не рассматривается.

До сих пор при обсуждении условий фокусировки речь шла об отражении от конической поверхности, в основании которой лежит направляющая линия, имеющая вид окружности. Но в качестве направляющей можно использовать любую другую линию. Остановимся на случае спирали $R^* = R_0(1 + m\lambda)$, радиус R^* которой увеличивается при одном витке на целое число m длин волн λ . После отражения волны от такого конуса с прямой образующей нормаль к поверхности

волнового фронта повернется на некоторый азимутальный угол φ . В результате в радиальном преобразовании, зависящем от $kr \sin 2\alpha$, появится дополнение [4], связанное с изменением фазы волны $m\varphi$, что внесет соответствующее изменение в краевое условие (5):

$$f_\varphi(r, \varphi, z = 0) = F(R) \exp[i(m\varphi - kr \sin 2\alpha)]. \quad (8)$$

Новый вариант уравнения типа (4) с краевым условием (8) имеет решение, которое с теми же ограничениями, что и для (7), можно представить в виде

$$|f_\varphi(r, z, m)|^2 \simeq |f_0|^2 |J_m(x)|^2, \quad (9)$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя индекса m и по-прежнему $x = kr \sin 2\alpha$ (6a) и $|f_0|^2$ — аксиальное распределение интенсивности (7a). Соответственно все упомянутые выше свойства аксиального распределения справедливы и в случае спиральной направляющей линии отражающего конуса. Они включают сохранение плоского волнового фронта на длине L , характер преобразования (7a) радиального распределения $F(R)$ в продольное $f_0(z)$ с линейно нарастающим коэффициентом, ограничения (7b) на применимость формул у границ фокального отрезка.

Однако радиальные распределения в (7) и (9) при прочих равных условиях сильно различаются. Для их сопоставления на рис. 3 приведены зависимости $|f(r = 0, z = \text{const})|^2$ и $|f_\varphi(m = 5)|^2$ в едином масштабе $|f(r = 0, z = \text{const})|^2$, а также при одинаковых функциях $F^2(R)$ и равных значениях параметров k , α и z . Как показывают распределения рис. 3, для прямого круглого конуса основной максимум интенсивности находится на оси симметрии, имеет полуширину $\delta x_0 = 2.1$ и внешний диаметр $2x_0 = 4.8$. В случае спиральной направляющей линии основной максимум представляет собой кольцо, толщина которого на уровне полувысоты равна $\delta x_5 = 2.6$. Здесь окружность с наибольшим значением интенсивности имеет диаметр $2x_5 = 12.8$. Снаружи кольцо ограничено первым нулем функции Бесселя, $2x_{ex} = 17.2$. Внутри кольца поле волны практически равно нулю, так как в направлении к оси интенсивность быстро убывает и при $x < 4$ не превышает 0.01 от ее наибольшего значения.

На фокальном отрезке L распределения (7) и (9) образуют сплошной и полый цилиндры соответственно. Используя параметры фокусировки из рассмотренного выше примера, найдем, что для этих двух цилиндров

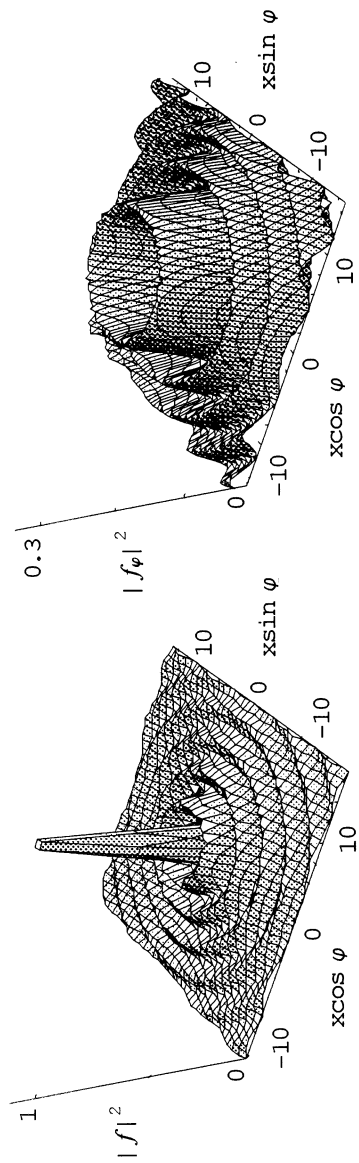


Рис. 3. Радиальные распределения $|f(r)|^2$ (7) и $|f_\varphi(r, m = 5)|^2$ (9).

$2r_0 = 4.4 \text{ mm}$ (полуширина $\delta r_0 = 2 \text{ mm}$) и $2r_{ex} = 16 \text{ mm}$ (толщина $\delta r_5 \sim 2.4 \text{ mm}$). В обоих случаях их протяженность составляет $L \approx 5.7 \text{ m}$.

Таким образом, фокусировка создает волну высокой интенсивности, которая распространяется в своеобразном волноводе, не имеющем ограничивающих стенок. В таком волноводе при достаточной интенсивности из простой волны в соответствии с механизмом Гюгонио образуется ударная волна. Но ударную волну можно использовать с самого начала в качестве исходного акустического импульса. Тогда около оси z будет наблюдаться осесимметричная картина отражения Маха.

Выше не вводилось никаких ограничений на начальное давление или вид среды. Поэтому данный метод фокусировки применим не только в газах, но и к жидкости, и в твердом теле.

Список литературы

- [1] *Durnin J.* // J. Opt. Soc. Am. 1987. V. A4. N 4. P. 651–654.
- [2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Гидродинамика. М.: Наука, 1988. С. 381.
- [3] *Андреев Н.Е., Аристов Ю.А., Полонский Л.Я., Пятницкий Л.Н.* // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. В. 6. С. 1756–1766.
- [4] *Андреев Н.Е., Марголин Л.Я., Плешанов И.В., Пятницкий Л.Н.* // ЖЭТФ. 1994. Т. 105. В. 5. С. 1232–1241.