

01;09

## Хаотическая синхронизация отображений Хенона. Информационный подход

© А.С. Дмитриев, Г.А. Касьян, А.Д. Хилинский

Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

Поступило в Редакцию 12 ноября 2001 г.

Предлагается схема хаотической синхронизации, основанная на передаче информации о состоянии ведущей системы ведомой системе без использования формализма символической динамики. Показывается, что объем передаваемой информации для синхронизации ведомой системе в предлагаемой схеме близок к теоретическому минимуму.

Хаотическая синхронизация [1–3] характеризуется высокой степенью чувствительности к шумам и другим возмущениям сигнала [4–7]. Является ли это ее фундаментальным свойством или связано с конкретным выбором схемы синхронизации и может быть подавлено ее усовершенствованием? В [8,9] показано, что причина чувствительности заключается в том, что хаотические колебания несут в себе информацию о текущем состоянии ведущей системы, и для обеспечения синхронизации эта информация должна передаваться без искажения ведомой системе. Там же предложен подход к синхронизации хаотических систем, использующий передачу от ведущей к ведомой системе не самого хаотического сигнала, а информации об этом сигнале, достаточной для его восстановления. В [10] этот подход обобщен на случай однонаправленной синхронизации двух гиперболических отображений Лози. Здесь, так же как и в одномерном случае, в качестве передаваемой информации использовалась символическая последовательность, соответствующая хаотической последовательности.

Однако в случае негиперболических отображений, например, отображения Хенона, подход, основанный на передаче информации в виде символической последовательности с дальнейшим восстановлением по ней исходной хаотической последовательности, неприменим. Для того чтобы выявить причины этого и разработать альтернативную процедуру, рассмотрим, как работает схема восстановления хаотического

сигнала по символической последовательности в случае отображения Лози:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\alpha - 1) - \alpha \cdot |x_n| + y_n, \\ y_{n+1} = \beta \cdot x_n. \end{cases} \quad (1)$$

Якобиан отображения (1) постоянен и равен  $\beta$ . Это означает, что площадь маленькой ячейки будет уменьшаться в  $1/\beta$  раз за итерацию. Но вдоль одного направления ячейка сжимается, вдоль другого — растягивается. Расстояние между двумя близкими точками увеличивается экспоненциально вдоль растягивающего направления со скоростью  $\lambda_1$ . При итерировании назад растягивающее и сжимающее направления меняются местами, и скорость разбегания траекторий равна  $|\lambda_2|$ , где  $\lambda_2$  — младший ляпуновский показатель.

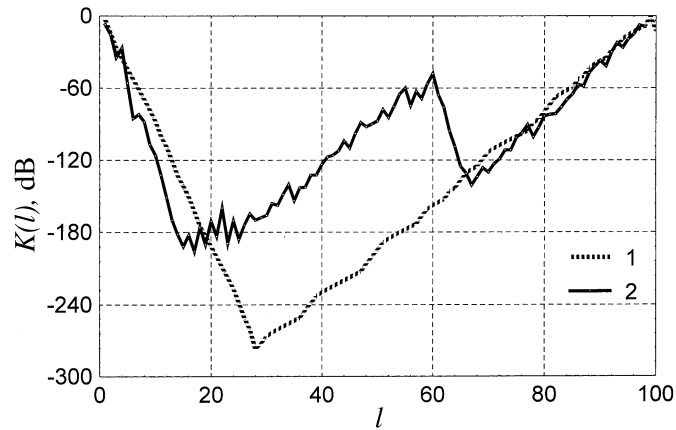
Символическая динамика для отображения Лози строится по правилу  $X_n = \text{sign}(x_n)$  [11] и представляет собой двоичную последовательность. Восстановление хаотической последовательности  $x_n$  по символической последовательности  $X_n$  производится следующим образом: двумерное отображение Лози записывается в виде одного итерационного уравнения второго порядка

$$|x_n| = \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} x_{n+1} + \frac{\beta}{\alpha} x_{n-1}. \quad (2)$$

Уравнение (2) является сжимающим по переменным  $x_{n-1}$ ,  $x_{n+1}$ , поскольку коэффициенты  $\beta/\alpha$  и  $1/\alpha$  меньше единицы. Это означает, что если  $x_{n-1}$  и  $x_{n+1}$  известно с некоторой точностью, то значение  $|x_n|$  вычисляется из (2) с большей по отношению к ним точностью. Знак  $|x_n|$  определяется по соответствующему  $X_n$ . Пусть имеется исходная оценка  $N$  членов последовательности  $x_n$ :  $x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}$ . Тогда многократно применяя процедуру оценки  $n$ -го члена последовательности через его  $n - 1$  и  $n + 1$  соседей, получаем постепенно улучшающуюся оценку последовательности  $x_n$ . В качестве начального приближения используется символическая последовательность  $\{X_n\}$ . При этом восстановление происходит в соответствии с итерационным процессом

$$x_n^i = X_n |x_n^i| = X_n \left[ \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} x_{n+1}^{i-1} + \frac{\beta}{\alpha} x_{n-1}^{i-1} \right], \quad (3)$$

где  $i$  — номер итерации.



**Рис. 1.** Реконструкция хаотической последовательности,  $l$  — номер реконструируемой точки,  $K(l)$  — ошибка реконструкции, хаотическая последовательность восстанавливается по символической последовательности из 100 элементов. Результаты применения алгоритма: 1 — для отображения Лозы, 2 — для отображения Хенона.

На рис. 1 (кривая 1) представлена зависимость качества реконструкции от номера элемента для хаотической последовательности длины  $N$ . Из графика видно, что точность оценки в крайних точках 1 и  $N$  не улучшается, поскольку у них нет соседей соответственно слева и справа. Лучше всего восстанавливается отсчет с номером  $\approx N/3$ . Наклон сторон получившегося треугольника определяется  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Заметим, что если конечная и начальная точки исходной последовательности  $x_1$  и  $x_N$  известны с точностью  $\varepsilon$  (а не являются, как это предполагалось выше, лишь элементами двоичной последовательности), то описанный выше алгоритм позволяет реконструировать всю хаотическую траекторию с точностью порядка  $\varepsilon$ .

Отображение Хенона

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \alpha \cdot x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = \beta \cdot x_n \end{cases}, \quad \alpha \in [1, 2], \beta \in [0, 1] \quad (4)$$

является негиперболическим, построение символической динамики для него затруднено [12], и подход, рассмотренный выше, для отображения

Лози, непосредственно не применим. Однако попытка использования этого подхода позволяет понять причины того, почему он дает неудовлетворительные результаты, и построить адекватный задаче алгоритм синхронизации.

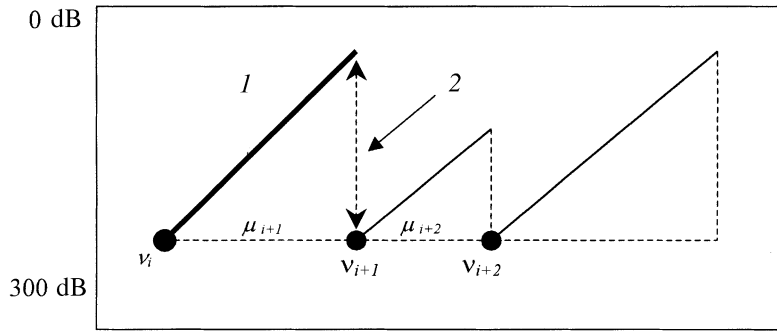
Пусть, как и в случае отображения Лози, в канал передается последовательность  $X_n$ ,  $X_n = \text{sign}(x_n)$ . Перепишем двумерное отображение Хенона в виде одномерного отображения второго порядка

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 - x_{n+1} + \beta x_{n-1}}. \quad (5)$$

Отображение (5) является сжимающим везде, кроме области малых  $x_n$ :  $|x_n| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon \sim 0.2$ . Вне этой области ошибка в значении  $x_n$ , вычисляемая в соответствии с уравнением (5), меньше, чем ошибка в точках  $x_{n-1}$  и  $x_{n+1}$ , по которым производится оценка. Для малых  $|x_n|$  это, вообще говоря, не так. Поэтому применение для восстановления хаотической последовательности алгоритма, аналогичного применявшемуся для отображения Лози, не дает высокого качества восстановления. Типичный результат применения этого алгоритма показан на рис. 1 (кривая 2). Из рисунка видно, что на некоторых участках происходит существенное ухудшение качества восстанавливаемого сигнала, но имеются и временные интервалы, где качество восстановления достаточно высокое. Ухудшение качества восстановления происходит из-за отсутствия свойства сжимаемости у отображения (5) при малых  $|x_n|$ .

Пусть на входе ведомой системы известны с требуемой точностью оценки значений сигнала в моменты времени  $n_0$  и  $n_0 + 1$ , и пусть на входе ведомой системы имеется копия отображения Хенона. Тогда для нескольких следующих за точкой с номером  $n_0$  точек с номером  $n > n_0$  можно получить значение элементов двоичной последовательности  $X_n$ , основываясь на значениях  $x_{n_0}$  и  $x_{n_0-1}$ . Для этого достаточно построить „прогноз“, проитерировав отображение Хенона с начальным условием  $(x_{n_0}, x_{n_0-1})$ . В общем случае эти начальные условия известны лишь с конечной точностью и слегка отличаются от значений на выходе ведущей системы, поэтому правильный вид двоичной последовательности можно получить лишь для того достаточно короткого участка траектории, где ошибка прогноза меньше характерного размера аттрактора. Кроме того, прогноз позволяет определить моменты времени, в которые траектория системы проходит через малые по модулю значения.

Выше при рассмотрении алгоритма восстановления для отображения Лози отмечалось, что для восстановления с высокой точностью



**Рис. 2.** Прогноз хаотической траектории и передача информации, необходимой для восстановления сигнала: 1 — прогноз, 2 — переданная информация.

хаотической последовательности на интервале времени от 1 до  $N$  достаточно знать значения  $x_1, x_N$  с требуемой точностью и двоичную последовательность  $X_n$  на интервале  $n \in [2, N]$ . Эти же условия справедливы при применении указанного алгоритма к отображению Хенона, если на интервале  $n \in [2, N]$  отсутствуют точки  $x_n$  с малыми по модулю значениями.

Таким образом, приходим к следующему алгоритму передачи информации от ведущей системы к ведомой и реконструкции хаотической последовательности. Пусть  $v_i$  — номера точек, в которых траектория наиболее близко подходит к нулю;  $\mu_i = [v_i, v_{i+1}]$  — участок траектории, ограниченный двумя такими последовательными точками (рис. 2). Предположим, что на входе ведомой системы имеется оценка хаотической последовательности на  $\mu_i$  участке траектории. Берем в качестве начальных условий две последние точки из  $\mu_i$  и строим прогноз для значения точек из  $\mu_{i+1}$ . При этом нам пока не известна длина  $\mu_{i+1}$ . Поскольку начальные условия для прогнозной траектории известны с некоторой ошибкой, а возмущенная и невозмущенная траектории разбегаются в среднем экспоненциально, точность прогноза будет уменьшаться по мере удаления от  $v_i$ . Тем не менее если число точек между  $v_i$  и  $v_{i+1}$  не слишком велико, то мы сможем: 1) предсказать номер точки  $v_{i+1}$ , в которой значение переменной близко к нулю; 2) получить двоичную последовательность  $X_n$  для всех точек из  $\mu_{i+1}$ . Теперь единственными недостающими для восстановления хаотической последовательности

данными являются значения переменных в точке  $v_{i+1}$ . Оно передается с требуемой точностью по каналу. После этого участок траектории  $\mu_{i+1}$  восстанавливается с помощью алгоритма, описанного на примере отображения Лози. Таким образом, для восстановления хаотической траектории на участке  $\mu_{i+1}$  достаточно передать значение переменной в одной точке (с номером  $v_{i+1}$ ). Небольшая модификация этого алгоритма позволяет снизить объем передаваемой информации. Дело в том, что, прогнозируя значение переменной в точках из  $\mu_{i+1}$ , мы получаем прогноз и для  $v_{i+1}$  точки. Следовательно, нет необходимости передавать по каналу значение точки  $x_{v_{i+1}}$  полностью. Нужно лишь уточнить ее прогнозное значение, т.е. передать те биты, которые исказились вследствие экспоненциального разбегания возмущенной и невозмущенной траектории.

Численная реализация предложенного алгоритма обеспечивает высокое качество синхронизации при объеме передаваемой информации  $\sim 0.8$  bit/reading, что достаточно близко к производству информации отображением Хенона, которое составляет  $\sim 0.6$  bit/reading.

## Список литературы

- [1] Fujisaka H., Yamada T. // Prog. Theor. Phys. 1983. V. 69. N 1. P. 32–47.
- [2] Абраймович В., Веричев Н., Рабинович М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1050–1060.
- [3] Pecora L.M., Caroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. N 8. P. 821–824.
- [4] Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С. // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 2. С. 265–281.
- [5] Hasler M., Maistrenko Yu.L. // IEEE Trans. CAS-1. 1997. V. 44. N 10. P. 856–866.
- [6] Lorenzo M.N., Kennedy M.P., Kolumban G., Kis G. // Proc. NDES'98. Budapest, 1998. P. 249–252.
- [7] Johnson G.A., Mar D.J., Caroll T.L., Pecora L.M. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. N 18. P. 3956–3959.
- [8] Дмитриев А.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. № 12. С. 1497–1509.
- [9] Dmitriev A.S., Kassian G.A., Khilinsky A.D. // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. V. 10. N 4. P. 749–761.
- [10] Дмитриев А.С., Касьян Г., Хаслер М., Хилинский А. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 5. С. 566–575.
- [11] Zheng Wei-Mou // Chaos, Solitons & Fractals. 1991. V. 1. N 3. P. 243–248.
- [12] Zhao H., Zheng W.-M. // Commun. Theor. Phys. 1993. V. 19. N 1. P. 21–26.