01;02

Уравнение гармонического осциллятора для ультрахолодных нейтронов, движущихся в неоднородном магнитном поле

© Т. Чен

Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова
E-mail: docent65@mtu-net.ru

Поступило в Редакцию 16 июля 2001 г.

Рассмотрено движение ультрахолодных нейтронов в квадратично неоднородном магнитном поле. Найдено частное решение стационарного уравнения Шредингера, приводящее к уравнению гармонического осциллятора для координаты X. Показано, что при определенных условиях возможна фокусировка нейтронов с образованием одного фокуса или двух боковых фокусов. Исследована зависимость фокусировки от степени моноэнергетичности нейтронов.

Фокусирующие свойства неоднородных магнитных полей исследовались еще в 70-х гг. [1–3] с целью создания магнитных линз для ультрахолодных нейтронов (УХН).

В настоящей работе мы покажем, что возможность фокусировки УХН вытекает при определенных условиях из решения уравнения Шредингера. Рассмотрим движение УХН под действием гравитационного и неоднородного магнитного полей. Магнитное поле H будем считать квадратично неоднородным по координате X:

$$H = H_0 + \alpha_2 x^2, \qquad \alpha_2 > 0. \tag{1}$$

Стационарное уравнение Шредингера для волновой функции Ψ ($\mathbf{r}$) будем решать методом разделения переменных: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(x)\Psi_2(z)$, где $\Psi_1(x) \neq 0$, $\Psi_2(z) \neq 0$. Найдем частное решение уравнения Шредингера, сведя его к системе двух дифференциальных уравнений для функций $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(z)$:

$$d^2\Psi_1/dx^2 + \{2m[mv^2/2 \pm \mu(H_0 + \alpha_2 x^2)]/\hbar^2\}\Psi_1 = 0, \tag{2}$$

$$d^2\Psi_2/dz^2 + (2m^2 gz/\hbar^2)\Psi_2 = 0.$$

Здесь m — масса нейтрона, g — ускорение свободного падения, $\hbar$ — постоянная Планка, v — скорость УХН, $\mu = 6.02 \cdot 10^{-8}$ eV/T — магнитный момент нейтрона.

Первое уравнение в (2) приводится к уравнению типа гармонического осциллятора и имеет следующее решение:

$$\Psi_1(x) = C \times D_n(Ax), \qquad A = (8m\mu\alpha_2/\hbar^2)^{1/4}, \tag{3}$$

где
$$n = -1/2 + (mv^2/2 - \mu H_0)/[\hbar(2\mu\alpha_2/m)^{1/2}]. \tag{4}$$

В формуле (3) $D_n(t)$ — функция параболического цилиндра (функция Вебера). Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_1(x)|^2 dx = 1$ дает величину константы C для функции $\Psi_1(x)$: $C = (A/(2\pi)^{1/2} n!)^{1/2}$.
Положив $n = 0$, получим, что волновая функция УХН, поляризованных против поля H, равна:

$$\Psi_1(x) = C \times D_0(Ax) = C \times \exp(-A^2 x^2/4) \tag{5}$$

и имеет максимум при $x = 0$. Таким образом, при $n = 0$ на оси системы находится максимум плотности вероятности нахождения нейтронов. Данный результат можно интерпретировать как возникновение фокусировки УХН в точке $x = 0$. Размер Δx фокусного пятна оценим как расстояние, на котором $|\Psi_1(x)|^2$ падает в **e** раз.

Тогда из выражения (5) имеем для ширины фокуса:

$$\Delta x = 2(2)^{1/2}/A = (\hbar^2/2m\mu\alpha_2)^{1/4}. \tag{6}$$

Заметим, что, положив в (6) $\hbar \to 0$, получим $\Delta x \to 0$, т.е. эффект фокусировки носит квантово-механический характер.

Приведем численные оценки величины Δx для $H_0 \approx 1.5\,\mathrm{T}$; $\Delta H = H - H_0 \approx 0.5\,\mathrm{T}$; $d \sim 1\,\mathrm{mm}$ — поперечный размер потока УХН на выходе из системы, определяемый конструкцией конкретной фокусирующей системы. Тогда $\alpha_2 \approx 4 \times \Delta H/d^2$ и $\Delta x \sim 20\,\mu\mathrm{m}$. При „входном" размере потока УХН $D \sim 1\,\mathrm{cm}$ плотность потока „выходящих" из системы нейтронов на 2–3 порядка больше плотности „входящих".

Оценим теперь влияние степени моноэнергетичности (монохроматичности) УХН на фокусировку при $n = 0$. Изменение скорости нейтронов на величину ΔV вызывает при $n = 0$ следующее изменение Δn индекса функции параболического цилиндра:

$$\Delta n = (E/\Delta E)(\Delta V/V), \tag{7}$$

где $E = mv^2/2$; $\Delta E = E - \mu H_0$. Пусть $E \sim 10^{-7}\,\mathrm{eV}$, $\Delta E \sim 10^{-9}\,\mathrm{eV}$. Тогда для нейтронов, сверхмонохроматизированных со степенью монохроматичности $\Delta V/V \ll 10^{-2}$ (см., например, [4]), имеем из (7), что $\Delta n \ll 1$. Как показывает расчет, для таких нейтронов влияние степени моноэнергетичности на фокусировку мало. Однако при $\Delta V/V \sim 10^{-2}$ и тех же величинах E и ΔE индекс n функции параболического цилиндра равен единице и центральный максимум распадется на два максимума, симметрично расположенные относительно $x = 0$ (рис. 1).

Заметим, что если $\alpha_2 = 0$, то

$$\Psi_1(x) = C_1 \exp(ikx) + C_2 \exp(-ikx),$$

где

$$k = \{2m(mv^2/2 - \mu H_0)/\hbar^2\}^{1/2}.$$

Полученное здесь плосковолновое решение означает отсутствие фокусировки при $\alpha_2 = 0$, что видно также из выражения (6). Дополнительное увеличение плотности потока нейтронов возможно вдоль оси Y. В этом случае общее увеличение интенсивности потока выходящих нейтронов может достигать 5–6 порядков.

Решением второго уравнения в (2) является функция Эйри:

$$\Psi_2(z) = C \times \Phi(-t), \qquad t = z(2m^2 g/\hbar^2)^{1/3}, \tag{8}$$

где C — константа. Максимум функции Эйри достигается при $t \approx -1.02$, т.е. в точке с координатой $z_{\max} = -1.02/(2m^2 g/\hbar^2)^{1/3} \approx$ $\approx -6\,\mu\mathrm{m}$.

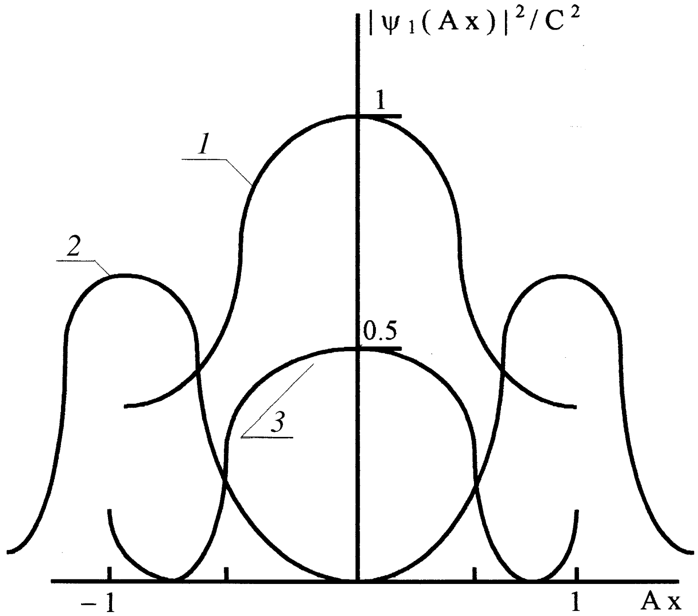

Рис. 1. Влияние степени моноэнергетичности $\Delta V/V$ на фокусировку УХН. *1* — $\Delta V/V = 10^{-3}$ $(n = 0.1)$, *2* — $\Delta V/V = 10^{-2}$ $(n = 1)$, *3* — $\Delta V/V = 2 \cdot 10^{-2}$ $(n = 2)$. $E = 10^{-7}$ eV, $\Delta E = 10^{-9}$ eV.

Найденное фиксированное положение максимума на оси z является ограничением, связанным с выбранным нами видом частного решения уравнения Шредингера.

Отметим, что одним из наиболее интересных способов практической реализации неоднородного магнитного поля является, например, эффект Мейснера в сверхпроводниках (рис. 2). Поперечный градиент магнитного поля можно создать подходящим выбором внутренней поверхности сверхпроводника (СП). В случае, если величина магнитного поля H меньше „критического поля" H_c, разрушающего сверхпроводимость, неоднородное магнитное поле образуется вблизи выходного зазора СП за счет сгущения магнитных силовых линий. Назовем энергию μH_c „критической" энергией для данного СП. Тогда,

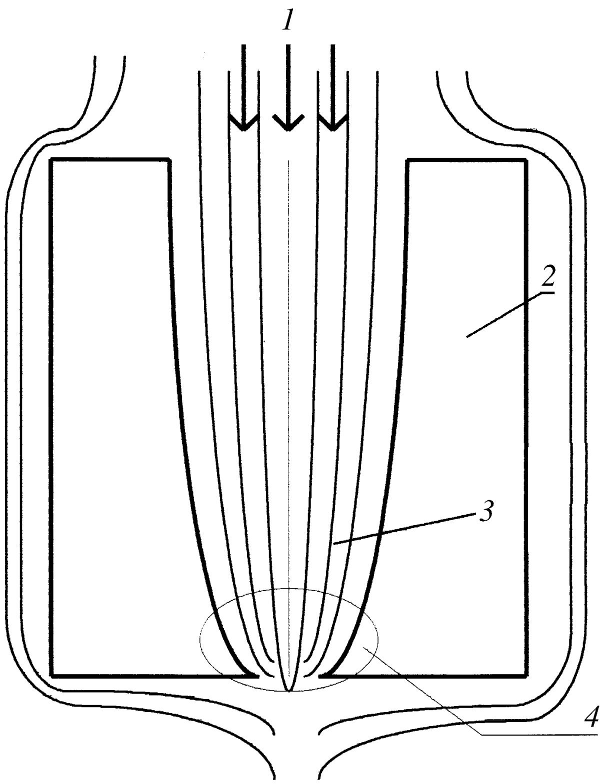

Рис. 2. Принципиальная схема магнитной фокусирующей системы (сверхпроводник + магнитное поле) для УХН: *1* — поток УХН, *2* — сверхпроводник, *3* — силовые магнитные линии, *4* — область неоднородного магнитного поля.

положив энергию нейтронов $E = E_c = mv_c^2/2 \approx \mu H_c$, найдем максимальную скорость УХН, при которой возникающий вследствие эффекта Мейснера градиент неоднородного магнитного поля оказывает фокусирующее действие на УХН. Для нейтронов со скоростями $V > V_c$ фокусирующий эффект неоднородного магнитного поля ослаблен и доминирующее значение имеет отражение от стенок СП. При этом возможно пространственное сжатие на выходе из СП потока нейтронов, испытывающих полное внешнее отражение от стенок СП. Очевидно, что для этого энергия УХН должна быть меньше эффективного потенциала вещества СП.

Список литературы

[1] *Терехов Г.И.* // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3. В. 23. С. 1275–1279.
[2] *Golub R., Carter P.* // Nuclear Instruments and Methods. 1971. V. 91. P. 205–209.
[3] *Франк А.И.* // УФН. 1987. Т. 151. В. 2. С. 229–272.
[4] *Чен Т., Кузьмин Р.Н.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 10. С. 51–54.