01;07

Спиральные волны в оптическом волокне

© И.В. Дзедолик, А.И. Дзедолик

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь
E-mail: dzedolik@crimea.edu

Поступило в Редакцию 24 сентября 2001 г.
В окончательной редакции 10 января 2002 г.

Найдены решения в виде нелинейных спиральных электрических и магнитных волн и волн поляризации в кварцевом волокне. Рассчитаны их параметры: нормальная скорость волнового фронта и шаг спирали в зависимости от свойств волокна, амплитуды и частоты электромагнитного поля.

В активных средах, для которых имеет место непрерывный приток энергии от внешнего источника и ее диссипация, возможно существование двухмерных нелинейных однорукавных и многорукавных спиральных волн, а также трехмерных волновых структур — простых и скрученных вихрей, сформированных спиральными волнами, центры вращения которых образуют нить вихря [1]. Оптическое волокно в этом смысле является пассивной диссипирующей средой. Однако в результате наличия границ между сердцевиной и оболочкой волокна электромагнитное поле в такой волноведущей среде распространяется в форме мод, удовлетворяющих условиям трансляции и суперпозиции в линейном случае [2]. Гибридные EH и HE моды, которым соответствуют косые лучи в волокне, имеют геликоидальные (спиральные) эквифазные поверхности [3]. Аналогично в жидкости или в газе, заполняющих цилиндрическую трубу, волны плотности распространяются в форме мод и также возможно существование спиральных волн [4]. Волновой фронт такой волны скручивается в спираль из-за отставания удаленных от оси участков фронта, так как скорость волны в среде $v = \omega r = \text{const}$ постоянна [1]. Спиральные волны возникают на поверхности вихревой воронки в жидкости или газе [3] и т. п. Аналогия между нелинейными и линейными спиральными волнами весьма интересна и информативна. В случае возникновения спиральных волн в оптически прозрачной пассивной среде можно говорить о самоорганизации электромагнитного поля в результате нелинейного взаимодействия поля со средой.

В настоящее время активно изучается один из вариантов самоорганизации электромагнитного поля в диэлектрической среде с нелинейными свойствами — вихревые солитоны [5,6]. Для описания нелинейных вихрей, как и для спиральных волн, существенно рассмотрение поперечного распределения поля в отличие от солитонов в оптическом волокне, динамика которых описывается изменениями огибающей в зависимости от продольной координаты и времени [7].

Рассмотрим условия возникновения волн поляризации и электромагнитных спиральных волн в оптически прозрачной среде с однородным показателем преломления. В установившемся режиме фаза спиральной волны имеет вид $\phi = \omega t - \theta(r) + \ell\varphi - \beta z$, где $\theta(r)$ — функция полярного радиуса, описывающая форму спирали, φ — полярный угол, ℓ — азимутальный индекс, задающий число рукавов спирали (топологический заряд), z — продольная координата. Запишем систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в непроводящем диэлектрике — кварцевом волноводе:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

с материальным уравнением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{2}$$

где $\mathbf{P} = -eN\mathbf{r}$ — вектор поляризации среды. Из (1) и (2) с учетом $\nabla\mathbf{F} + 4\pi\nabla\mathbf{P} = 0$ получаем уравнение

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = -4\pi\left[\nabla(\nabla\mathbf{P}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}\right]. \tag{3}$$

Элементарная ячейка кварца имеет центр симметрии, поэтому потенциал кристаллической решетки можно аппроксимировать четной периодической функцией $U = -f_0\cos(\frac{2\pi}{r_0}r)$, где r_0 — средний радиус атома. Уравнение движения оптического электрона в атоме, находящемся в узле кристаллической решетки кварца, представим в виде

$$m\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U - \sigma\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} - e\mathbf{E}, \tag{4}$$

где $-\nabla U = -\mathbf{f}_0 \sin(\frac{2\pi}{r_0} r)$ — „усредненная" возвращающая сила кристаллической решетки. Умножим уравнение (4) на $-eN$ и разделим на массу электрона m, получим уравнение для поляризации

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} = -\mathbf{f}_m \sin(\mathbf{qP}) + \sigma_m\,\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \nu_e^2\mathbf{E}, \tag{5}$$

где $\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_0 eN/m$, $\mathbf{q} = \mathbf{1}(2\pi/r_0 eN)$, $\sigma_m = \sigma/m$, $\nu_e^2 = e^2N/m$. Система уравнений (3)–(5) описывает нелинейные моды диэлектрического волновода. Получив решение для электрического поля из (3)–(5), магнитное поле можно найти из (1):

$$\mathbf{B} = -c\nabla \times \int dt\mathbf{E}. \tag{6}$$

Найдем решение системы (3)–(5) в простейшем случае, полагая, что векторы электромагнитного поля и поляризации имеют только радиальные компоненты $E = E_r(r, \varphi, z)$, $P = P_r(r, \varphi, z)$. Тогда из (3)–(5) получаем систему уравнений

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E = -4\pi \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{P}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{4\pi}{c^2}\,\frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \sigma_m\,\frac{\partial P}{\partial t} + f_m \sin(qP) = \nu_e^2 E. \tag{7}$$

Представим компоненты поля и вектор поляризации в форме $E = E_0 \exp(i\phi)$, $B = B_0(i\phi)$, $P = P_0(i\phi)$. Тогда систему (7) перепишем в виде

$$\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} - i\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial r} + i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 - \frac{\ell^2}{r^2}\right)\right] E$$

$$= -4\pi \left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} - i\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\theta}{\partial r} - i\,\frac{1}{r^2} + i\,\frac{\omega^2}{c^2}\right] P,$$

$$P - \frac{f_m}{\omega^2 + i\sigma_m\omega}\sin(qP) = -\frac{\nu_e^2}{\omega^2 + i\sigma_m\omega}\,E. \tag{8}$$

Разложим синус в ряд $\sin(qP) = qP(1 - q^2P_0^2/3! + q^4P_0^4/5! - - q^6P_0^6/7! + \ldots) \equiv \mu qP$ и подставим в (8), получаем „дисперсионное уравнение"

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} - i\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}$$
$$= \frac{i\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2 - \mu q f_m + i\sigma_m\omega}\left(\beta^2 + \frac{\ell^2 - 1}{r^2}\right) - i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 - \frac{\ell^2}{r^2}\right). \quad (9)$$

Перепишем уравнение (9), обозначив $\eta = d\theta/dr$:

$$\frac{d\eta}{dr} - i\eta^2 + \frac{1}{r}\eta = i\left(\beta^2(1+\gamma) - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\ell^2(1+\gamma) - \gamma}{r^2}\right), \quad (10)$$

где $\gamma = \omega_e^2/(\omega^2 - \omega_e^2 - \mu q f_m + i\sigma_m\omega)$. Это — общее уравнение Рикатти. Используя подстановку $\eta = i d\ln(u)/dr$, перепишем (10) в виде уравнения Бесселя

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2(1+\gamma) - \frac{\ell^2(1+\gamma) - \gamma}{r^2}\right)u = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) представим в форме функции Ханкеля $u = C_0H_m^{(1)}(R)$, где $R = \sqrt{\omega^2/c^2 - \beta^2(1+\gamma)}\,r$, а индекс $m = = \sqrt{\ell^2(1+\gamma) - \gamma}$. Произведя обратную подстановку $\eta = i(du/dr)/u = = i\sqrt{\omega^2/c^2 - \beta^2(1+\gamma)}[dH_m^{(1)}(R)/dR]/H_m^{(1)}(R)$ и интегрируя переменную $\eta = d\theta/dr$, находим форму спиральной волны

$$\theta = \int \eta dr = i\int \frac{d\ln H_m^{(1)}(R)}{dR}\,dR = i\ln H_m^{(1)}(R). \quad (12)$$

Подставляя (12) в $E = E_0\exp(i\phi)$, находим выражение для электрического поля

$$E_r = E_0H_m^{(1)}(R)\exp\left[i(\omega t + \ell\varphi - \beta z)\right], \quad (13)$$

которое вдали от области поглощения при условии $\gamma \ll 1$ $(m = \ell)$ совпадает с выражениями для спиральных химических волн [3] и волн в газе [4].

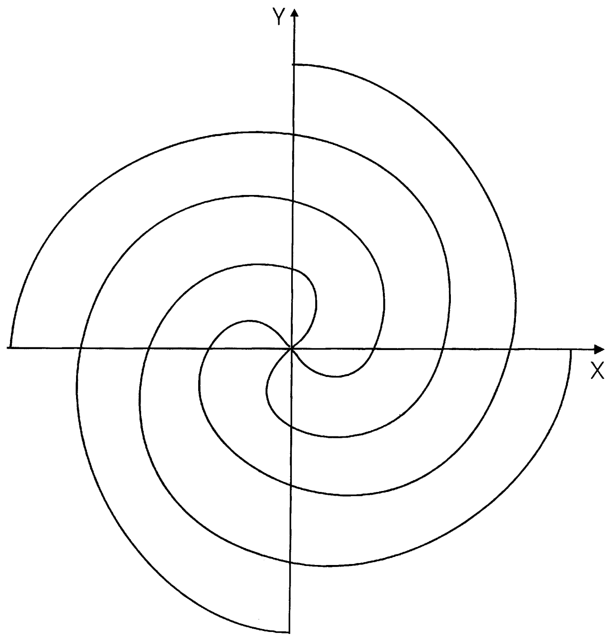

Рис. 1. Поверхности равной фазы $\omega t - \beta z = \mathrm{const}$ спиральной волны с топологическим зарядом $\ell = 4$ в поперечном сечении кварцевого волокна.

Магнитное поле находим из (6), подставляя (13):

$$B_\varphi = -c\,\frac{\partial}{\partial z}\int dtE = \frac{c\beta B_0}{\omega}\,H_m^{(1)}\exp\big[i(\omega t + \ell\varphi - \beta z)\big]. \tag{14}$$

Комплексный вектор Пойнтинга в рассматриваемом случае равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{1}_z E_r B_\varphi$$
$$= \mathbf{1}_z\frac{c\beta E_0 B_0}{\omega}\,[H_m^{(1)}(R)]^2\exp\big[i2(\omega t + \ell\varphi - \beta z)\big]. \tag{15}$$

Нелинейные волны поляризации в кварцевом волноводе, электрические (13), магнитные (14), а также плотность потока энергии (15)

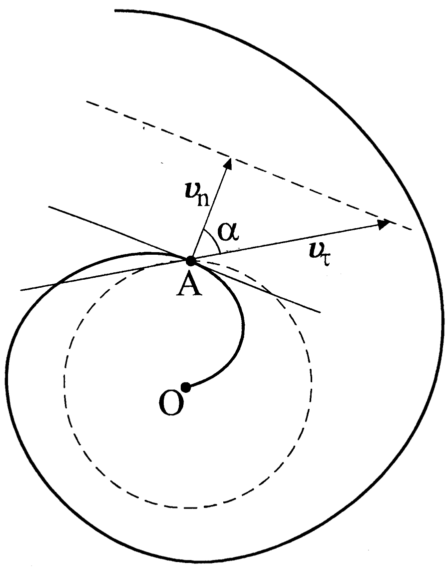

Рис. 2. Скорость фронта спиральной волны в поперечном сечении кварцевого волокна.

представляют собой спиральные волны. Поверхности равной фазы при $R \gg 1$ представляют собой в поперечной плоскости архимедовы спирали: $\omega t - R + \ell\varphi - \beta z = \text{const}$ (рис. 1). Вблизи оси волновода при $R \to 0$ фронт спиральной волны искажается.

Найдем скорость точки A спиральной волны, удаленной на расстояние r от центра спирали O [1]. Проведем через точку A окружность с центром в точке O, тогда скорость пересечения фронтом волны этой окружности равна $\upsilon_\tau = \omega r$, а скорость нормального смещения фронта обозначим υ_n (рис. 2). Скорость кругового движения связана с нормальной скоростью фронта соотношением $\upsilon_n = \upsilon_\tau \cos\alpha$, где α — угол между нормалью к фронту и касательной к окружности в точке A. Учтем, что $\operatorname{tg}\alpha = r d\phi/dr = -r\eta$, тогда находим $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 1/\sqrt{1+r^2\eta^2}$. Скорость нормального смещения фронта спиральной волны определяется выражением

$$v_n = \frac{v_\tau}{\sqrt{1 + r^2\eta^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{r^{-2} + [\beta^2(1+\gamma) - \omega^2/c^2][d \ln H_m^{(1)}(R)/dR]^2}}.$$

Шаг спиральной волны можно определить из уравнения $\theta(R + h_S) - \theta(R) = 2\pi$, которое в рассматриваемом случае имеет вид $H_m^{(1)}(R + b_S) = H_m^{(1)}(R)$. Скорость фронта и шаг спиральной волны в кварцевом волноводе зависят от частоты электромагнитного поля, электронной плазменной частоты, амплитуды волны поляризации и топологического заряда. Критическое значение интенсивности электромагнитного поля, при котором следует учитывать нелинейную поляризацию кварцевых стекол, должно быть не менее $I \sim 10^{12}$ W/cm^2 [7], т.е. при такой интенсивности возможно наблюдать спиральные волны в оптическом волокне.

Список литературы

[1] *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
[2] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.
[3] *Berry M.* // Les Houches Lecture. Series 35. North-Hollands, Amsterdam, 1981. P. 453–543.
[4] *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
[5] *Rosas D., Law C.T., Swartzlander G.A., jr.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. N 11. P. 3054–3065.
[6] *Kivshar Y.S., Nepomnyashchy A., Tikhonenko V., Christou J., Luther-Davies B.* // Optics Letters. 2000. V. 25. N 2. P. 123–125.
[7] *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.