

09:12

Экспериментальное исследование бифуркаций в системах с быстро меняющимся параметром

© Б.П. Безручко, Р.Н. Иванов, В.И. Пономаренко, Е.П. Селезнев

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: sbire@ns.sgu.ru

Поступило в Редакцию 3 декабря 2001 г.

Приводятся результаты экспериментального наблюдения бифуркации удвоения периода в нелинейных цепях в условиях, когда управляющий параметр меняется быстро по сравнению с процессами установления колебаний. Регистрируется выбор одного из двух возможных состояний, отличающихся лишь фазой колебаний. Демонстрируется наличие в реальных системах с непрерывным временем закономерностей нарушения вероятностной симметрии постбифуркационных состояний, ранее обнаруженных в численных экспериментах на дискретных системах.

1. Термин „бифуркация“ в первоначальном смысле этого слова (раздвоение) предполагает раздвоение пути эволюции системы при достижении ее управляющим параметром некоторого критического значения. В ряде случаев варианты постбифуркационного поведения равноценны: например, после бифуркации потери симметрии потерявший устойчивость симметричный цикл сменяется двумя вероятностно идентичными зеркально-симметричными циклами, а колебания удвоенного периода, возникающие после бифуркационного удвоения периода, отличаются лишь фазой. При этом возникает проблема выбора одного из путей в условиях, если параметр меняется с конечной скоростью при наличии шумов. Она имеет отношение к таким фундаментальным феноменам, как спонтанное нарушение симметрии, которое отмечается в различных областях естествознания [1–3]. В данной работе представлены результаты наблюдения отмеченных бифуркационных ситуаций в нелинейных колебательных цепях в условиях, когда время изменения параметра меньше характерного времени релаксации системы.

В зависимости от условий реализации различают два типа бифуркационных переходов в системах с шумом: стохастический и динамический [4–6]. Первый тип реализуется в пределе бесконечно медленного изменения управляющего параметра. При этом выбор того или иного постбифуркационного (конечного) состояния полностью определяется шумом. Если распределение вероятностей шума симметрично, то вероятностно симметричны и конечные состояния: $p_1 = p_2 = 1/2$. Второй тип перехода наблюдается в другом пределе — бесконечно малого шума. При этом в зависимости от задания начальных условий с вероятностью, равной 1, реализуются или первое ($p_1 = 1, p_2 = 0$), или второе ($p_1 = 0, p_2 = 1$) состояние, т. е. имеет место полная предсказуемость. В реальности же реализуется некая промежуточная ситуация, в которой существенны и шумы и скорость изменения параметра, и при этом можно выделить условную границу между стохастическим и динамическим переходами по признаку установления определенного конечного состояния с заданной вероятностью, например, $p_1 = 0.75, p_2 = 0.25$.

Феномен нарушения вероятностной симметрии конечных состояний при динамических бифуркациях в присутствии шумов моделировался в [6–8] численно на одномерных отображениях $x_{n+1} = f(x_n + \xi_n, r)$ с квадратичной функцией f , в которых после бифуркации удвоения периода возможны два варианта периодического движения на одном аттракторе, различающихся лишь фазой. Здесь x_n — динамическая переменная, $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ — дискретное время, ξ_n — шум с нулевым средним $\langle \xi \rangle = 0$, симметричным распределением и дисперсией σ^2 , r — бифуркационный параметр, зависящий от времени по кусочно-линейному закону:

$$r(n) = \begin{cases} r_1 + Sn, & n \leq N, \\ r_1 + SN = r_2, & n > N, \end{cases} \quad (1)$$

где S — скорость изменения параметра r_n ($S = \Delta r/N$, где $\Delta r = r_2 - r_1$ — полное изменение r_n , N — число итераций, за которое r_n изменяется на Δr). При моделировании определялась вероятность $p_{1,2}$ попадания системы в заданное конечное состояние удвоенного периода в зависимости от дисперсии шума σ^2 при различных значениях S , а результатом являлась зависимость критического

уровня шума σ_c^2 , соответствующего границе между стохастическим и динамическим сценариями перехода, от скорости S . Было показано, что феномен нарушения вероятностной симметрии конечных состояний при быстрой бифуркации удвоения периода в исследованных дискретных моделях определяется „движением“ границ областей притяжения различных конечных состояний в фазовом пространстве при изменении управляющего параметра [8]. При изменении управляющего параметра r в малой окрестности бифуркационного значения r_{c1} зависимость $\sigma_c^2(S)$ имеет степенной вид $\sigma_c^2 \approx 2\gamma^2 S^2$, где $\gamma = (dx^*/dr)|_{r_{c1}}$ характеризует смещение границ областей притяжения постбифуркационных состояний. Целью данной работы является экспериментальное подтверждение наличия в реальных системах с непрерывным временем закономерностей, обнаруженных ранее в дискретных системах.

2. В качестве объектов исследования использовались: 1) неавтономный диссипативный осциллятор — нелинейный колебательный контур с диодом (диодный резонатор), состоящий из катушки индуктивности L , резистора R , полупроводникового диода D (выделенный на рис. 1, *a* жирной линией); 2) автоколебательная кольцевая система типа генератора с запаздывающей обратной связью (ГЗОС) (рис. 1, *b*). Нами использовалась аналого-цифровая конструкция генератора, в которой нелинейный элемент и линия задержки были чисто цифровыми, а RC -фильтр — аналоговым. Части сопрягались с помощью аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразователей. Такая реализация позволяла легко менять их характеристики (вид нелинейной функции $F(x)$ и время задержки τ) в довольно широких пределах, оставляя неизменными прочие характеристики цепи.

Схема эксперимента приведена на рис. 1, *a*. Гармонический возбуждающий сигнал вида $V(t) = V_0(t) \sin(\omega t)$, где $V_0(t)$ — переменная амплитуда, а ω — круговая частота, формируемый связкой из персонального компьютера цифро-аналогового преобразователя и аналогового фильтра нижних частот, складывался с помощью сумматора с шумовым сигналом, поступающим с генератора шума. Шум был близким к нормальному с нулевым средним в рабочей полосе частот. Далее через развязывающий усилитель сигнал подавался на исследуемую систему. В качестве управляющего параметра выбиралась амплитуда внешнего воздействия $V_0(t)$, которая менялась во времени по кусочно-линейному

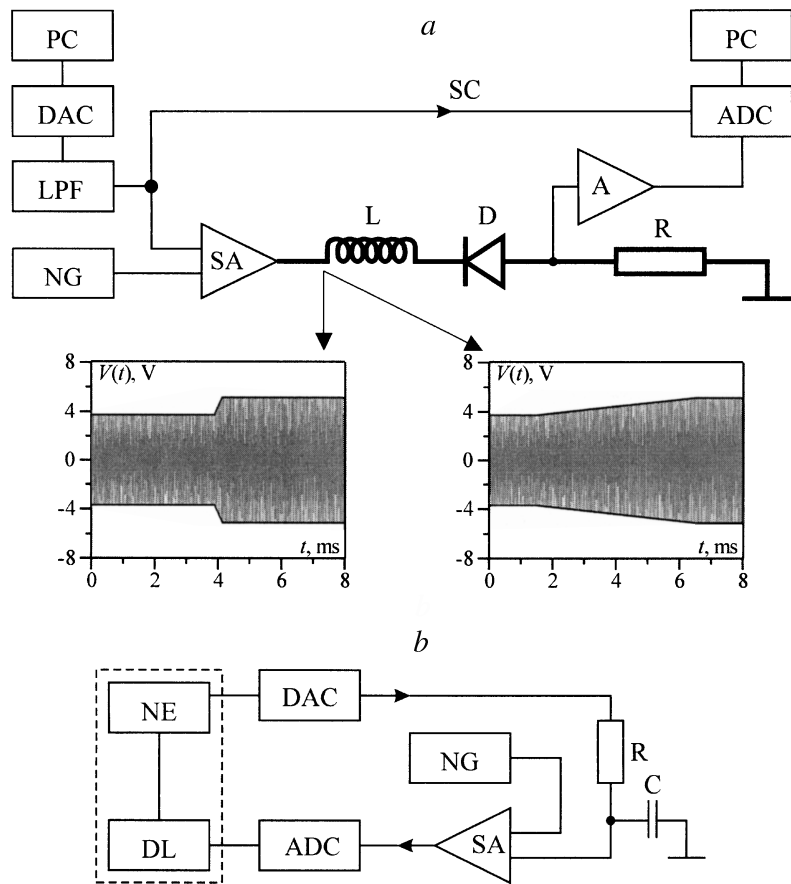


Рис. 1. Блок-схемы экспериментальных установок для исследования нарушения вероятностной симметрии постбифуркационных состояний на: *a* — колебательном контуре с полупроводниковым диодом (стрелками показаны примеры возбуждающего сигнала для большой и малой скоростей изменения управляющего параметра соответственно); *b* — генераторе с запаздывающей обратной связью. На рисунке: PC — персональный компьютер; DAC — цифро-аналоговый преобразователь; ADC — аналого-цифровой преобразователь; LPF — фильтр нижних частот; NG — генератор шума; A — усилитель; SA — суммирующий усилитель; SC — синхронизирующая цепь; NE — нелинейный элемент; DL — линия задержки.

закону:

$$V_0(t) = \begin{cases} V_{01} + St, & t \leq T, \\ V_{01} + ST = V_{02}, & t > T, \end{cases} \quad (2)$$

где V_{01} и V_{02} — начальное и конечное значения параметра, S — скорость изменения параметра, $S = \Delta V_0/T$, где $\Delta V_0 = V_{02} - V_{01}$ — величина изменения параметра, T — время, за которое произошло изменение (для удобства сравнения с результатами численного моделирования [8] скорость S приводилась к безразмерному виду). Далее с помощью связки из усилителя и аналого-цифрового преобразователя, синхронизируемого с возбуждающим сигналом посредством цепи, содержащей генератор импульсов, с исследуемых систем снимались реализации напряжения. С помощью компьютера определялось, какой из двух возможных, отличающихся фазой (сдвигом во времени на T) видов колебаний установится в системе в результате бифуркации удвоения периода.

В экспериментах с автоколебательной системой к сигналу кольцевого генератора на аналоговой части кольца добавлялся шум от регулируемого генератора (рис. 1, *a*). Роль управляющего параметра играл коэффициент r в характеристиках нелинейного элемента ГЗОС, которые выбирались в виде:

$$F(x) = r - x^2 \quad (3)$$

или

$$F(x) = -x(r + x). \quad (4)$$

Функции (3) и (4) отличаются характером зависимости от параметра r стационарного решения x^* уравнения цикла периода 1. Для (4) производная $\gamma = dx^*/dr = 0$, т.е. точка x^* не меняет своего положения в одномерном фазовом пространстве, для (3) — $\gamma > 0$. Параметр r менялся во времени по закону (1). В финальной стадии определялся вид постбифуркационного состояния — фаза установившихся колебаний удвоенного периода относительно введенного опорного сигнала.

Для всех исследуемых систем по реализациям напряжения строились зависимости вероятности $p_{1,2}$ попадания в одно из конечных состояний от дисперсии шума σ^2 при различных значениях скорости изменения управляющего параметра S . Причем для набора статистики, необходимой для расчета средних значений вероятности с погрешностью, не превышающей 1%, при каждом значении дисперсии шума

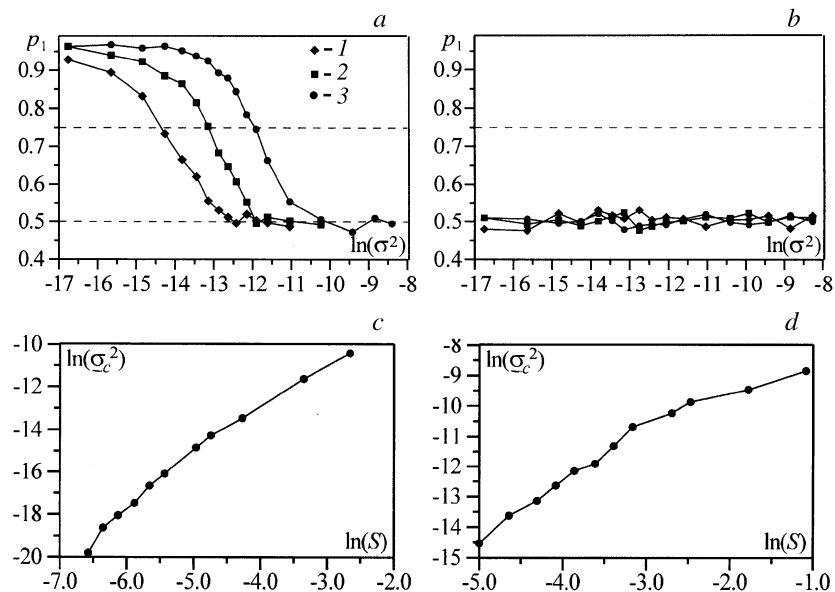


Рис. 2. *a, b* — зависимости вероятности достижения заданного конечного состояния p_1 от логарифма интенсивности шума $\ln(\sigma^2)$ при различных скоростях изменения управляющего параметра ($1 — S = 6.75 \cdot 10^{-3}$, $2 — S = 13.5 \cdot 10^{-3}$, $3 — S = 27 \cdot 10^{-3}$) для генератора с запаздывающей обратной связью с характеристиками нелинейного элемента вида (3) и (4) соответственно; *c, d* — экспериментальные зависимости логарифма критического уровня шума $\ln(\sigma_c^2)$ от логарифма скорости изменения управляющего параметра $\ln(S)$ при большом интервале ΔV для диодного резонатора и кольцевой системы с нелинейностью типа (3) соответственно.

и каждом значении скорости изменения управляющего параметра проводилось по 2000 экспериментов. Затем по сглаженным зависимостям $p_{1,2}(\ln(S))$ производились оценки критического уровня шума σ_c^2 от скорости изменения управляющего параметра S .

3. Данные проведенных экспериментов показывают, что в обеих исследованных реальных системах в общем случае имеет место явление нарушения вероятностной симметрии конечных состояний, если скорость изменения управляющего параметра достаточно велика.

Типичный вид экспериментальной зависимости вероятности попадания системы в заданное конечное состояние от уровня шума представлен на рис. 2, *a* для разных скоростей изменения управляющего параметра. Видно, что при малой скорости изменения параметра даже небольшой уровень шума приводит к равновероятности конечных состояний. С увеличением же скорости все большую роль играют динамические процессы — результат бифуркационного перехода постепенно становится предсказуемым.

В то же время специальным заданием функции нелинейности F в кольцевой системе удавалось создать условия, при которых симметрия не нарушается даже при больших скоростях. Так, на рис. 2, *b* представлены результаты экспериментов на кольцевой системе с запаздывающей обратной связью при задании нелинейной функции в виде (4), когда $\gamma = 0$. В этой ситуации потерявший устойчивость цикл не меняется, и положение границы областей притяжения конечных состояний не зависит от параметра, поэтому постбифуркационные состояния остаются равновероятными при любой скорости изменения параметра. Добиться подобного в контуре с диодом не удалось, так как для этого требовалось обеспечить независимость теряющего устойчивость цикла от управляющего параметра в трехмерном фазовом пространстве, что оказалось нереализуемым при подборе параметров контура и воздействия. Эти результаты подтверждают вывод о связи механизма появления асимметрии с „движением“ границ областей притяжения различных конечных состояний в фазовом пространстве, что качественно соответствует результатам, полученным для квадратичных отображений [8]. Следует обратить внимание и на тот факт, что в широком диапазоне изменения параметра зависимость дисперсии шума σ_c^2 , соответствующего условной границе характера перехода (стохастического или динамического) от скорости S изменения параметра, будучи представленной в логарифмических координатах, нелинейна (рис. 2, *c, d*) и, следовательно, не является степенной, как считалось в первых теоретических работах по изучению данного феномена.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00–02–17441, 01–02–06372) и U.S. Civilian Research Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (Award N REC-006).

Список литературы

- [1] Гольданский В.И., Кузьмин В.В. // УФН. 1989. Т. 157. В. 1. С. 3–50.
- [2] Желудев И.Н. // УФН. 1989. Т. 157. В. 4. С. 683–717.
- [3] Ахманов С.А., Рошаль А.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4. В. 2. С. 203–243.
- [4] Karpal R., Mandel P. // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. N 2. P. 1076–1081.
- [5] Baesens C. // Physica D. 1991. V. 53. N 2–4. P. 319–375.
- [6] Бутковский О.Я., Браш Дж.С., Кравцов Ю.А., Суровяткина Е.Д. // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. В. 6. С. 2201–2207.
- [7] Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А., Суровяткина Е.Д. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. В. 5. С. 1–12.
- [8] Безручко Б.П., Иванов Р.Н. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 22. С. 7–15.