

09

Влияние асимметрии на фрактальные свойства синхронного хаоса в связанных системах с удвоением периода

© *Е.П. Селезнев, А.М. Захаревич*

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 28 января 2002 г.

Численно исследуется влияние асимметрии на синхронный хаос в связанных системах с удвоением периода. Показано, что с введением асимметрии после потери трансверсальной суперустойчивости синхронный хаотический аттрактор становится фрактальным, а с приближением к границе синхронизации (уменьшением связи) его размерность демонстрирует немонотонное поведение.

Изучение явления хаотической синхронизации имеет как фундаментальное, так и прикладное значение [1–3]. Несомненный интерес в этом направлении представляют исследования явления хаотической синхронизации в симметрично связанных идентичных подсистемах, демонстрирующих один из классических сценариев перехода к хаосу, например через последовательность удвоений периода [7–13]. Режиму синхронных хаотических колебаний в такой системе соответствует ситуация, когда значения динамических переменных в подсистемах равны. При этом в фазовом пространстве выделяется два направления: диагональное, вдоль которого движения неустойчивы, а соответствующий ляпуновский показатель положителен, и трансверсальное, вдоль которого движение устойчиво, а соответствующий ляпуновский показатель отрицателен. Эволюция системы при изменении параметра нелинейности тождественна эволюции изолированной подсистемы. Целью данной работы является изучение влияния асимметрии (неидентичности подсистем) на структуру синхронного хаотического аттрактора и ее эволюцию с приближением к границе синхронизации. Численно исследовалась система диссипативно связанных квадратич-

ных отображений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} = \lambda\delta - y_n^2 - k(x_n^2 - y_n^2), \end{cases} \quad (1)$$

где x_n и y_n — динамические переменные, $n = 1, 2, \dots$ — дискретное время, λ — параметр нелинейности, δ — параметр асимметрии, k — параметр связи.

При $\delta = 1$ система симметрична относительно замены $x_n \Leftrightarrow y_n$, и для этого случая ее динамика достаточно хорошо изучена [2,12–15]. При $k > 0$ в закритической области ($\lambda > \lambda_c$, где $\lambda_c = 1.40115518909\dots$ — критическое значение для изолированных подсистем [16]) система (1) демонстрирует синхронный хаотический режим, фазовый портрет которого расположен на диагонали плоскости (x_n, y_n) . Поведение связанных систем в этом случае тождественно динамике изолированной подсистемы. Оценка корреляционной размерности хаотического аттрактора при критическом значении параметра $\lambda = \lambda_c$ дает $d_c = 0.54$ (рассчитывалась редуцированная корреляционная размерность, для чего использовались 40 000 значений и 5000 опорных точек, рассчитанных с точностью 10^{-18}), что близко к хаусдорфовой размерности критического аттрактора квадратичного отображения [16,17]. С увеличением параметра λ размерность синхронного аттрактора увеличивается и становится равной 1. Последнее связано с тем, что для квадратичного отображения размерность хаотического аттрактора равна 1, а синхронный аттрактор связанной системы лежит на прямой — диагонали в фазовой плоскости $x_n = y_n$.

При $\delta \neq 1$ симметрия нарушается, однако режим синхронизации сохраняется. На рис. 1,а приведены структура плоскости параметров (k, λ) при $\delta = 0.97$. Светлые области соответствуют периодическим синфазным циклам, светло-серые — синхронным хаотическим режимам, темно-серым обозначена область несинфазных режимов, сплошными обозначены линии бифуркаций удвоения периода, цифрами — период циклов. Рис. 1,б иллюстрирует фазовые портреты хаотических аттракторов и их увеличенные фрагменты. Рассмотрим эволюцию цикла периода 1 с ростом параметра λ при фиксированных $k = 0.5$ и $\delta = 0.97$. С увеличением λ наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся при $\lambda \approx 1.4229918\dots$

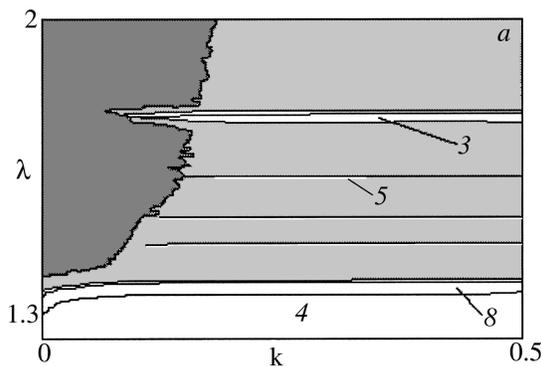


Рис. 1. *a* — плоскость параметров (k, λ) при $\delta = 0.97$, *b* — фазовые портреты и их увеличенные фрагменты в зависимости от параметров k и λ : 1 — $\lambda = 1.4229918\dots$, $k = 0.5$; 2 — $\lambda = 2$, $k = 0.5$; 3 — $\lambda = 1.422693\dots$, $k = 0.4$; 4 — $\lambda = 2$, $k = 0.4$.

переходом к синхронному хаосу (фрагмент 1 на рис. 1, *b*). При $k = 0.5$ детерминант матрицы линеаризации обращается в 0 и все циклы системы (как устойчивые, так и седловые) (1) являются суперустойчивыми в трансверсальном направлении. В этом случае критический аттрактор лежит на прямой, а оценка его корреляционной размерности дает значение $d_c = 0.5$ (что близко к рассчитанной в [16,17] корреляционной размерности критического аттрактора одномерного квадратичного отображения). При дальнейшем увеличении параметра λ происходит последовательное уменьшение связности синхронного хаотического аттрактора (фрагмент 2 на рис. 1, *b* иллюстрирует односвязный характер), а его размерность увеличивается и достигает $d_c = 1$. Таким образом, при введении асимметрии в случае трансверсальной суперустойчивости фрактальные свойства синхронного хаоса аналогичны симметричному случаю.

Уменьшение связи приводит к тому, что синфазные устойчивые и седловые циклы системы (1) не являются суперустойчивыми в трансверсальном направлении, а неустойчивые многообразия седловых циклов не лежат на одной прямой. Фрагмент 3 на рис. 1, *b* иллюстрирует критический аттрактор при $k = 0.4$. С ростом параметра λ каждый элемент критического аттрактора эволюционирует в фазовом пространстве

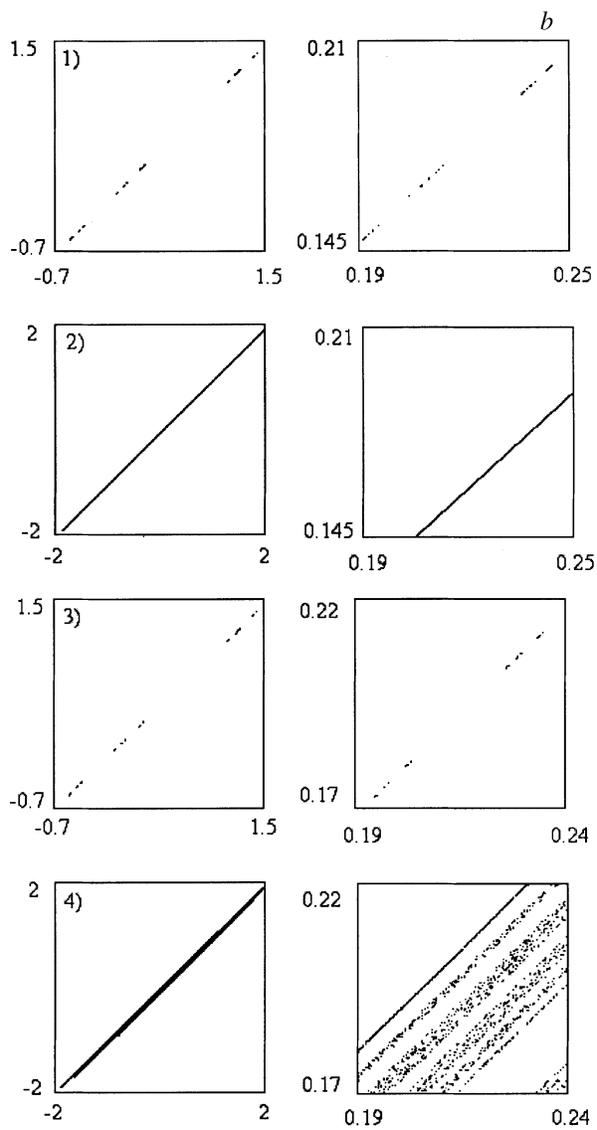


Рис. 1 (продолжение).

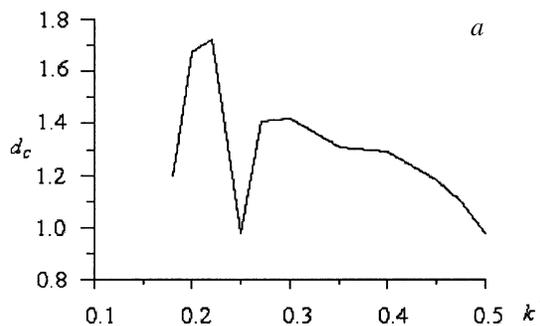


Рис. 2. *a* — зависимость корреляционной размерности d_c от параметра k при $\lambda = 2$; *b* — фазовые портреты и их увеличенные фрагменты: 1 — $k = 0.3$; 2 — $k = 0.25$; 3 — $k = 0.24$; 4 — $k = 0.225$.

в отдельном направлении, а в итоге критический аттрактор не лежит на прямой и остается фрактальным (фрагмент 4 на рис. 1, *b*).

Рис. 2, *a* иллюстрирует зависимость корреляционной размерности синхронного хаоса от параметра связи при $\lambda = 2$, а рис. 2, *b* — фазовые портреты аттракторов и их выделенные фрагменты. С уменьшением связи размерность становится больше 1, аттрактор не лежит на диагонали фазовой плоскости, а увеличение масштаба выявляет его сложную фрактальную структуру в виде бесконечного множества линий (фрагмент 4 на рис. 1, *b*). С дальнейшим уменьшением связи наблюдается расширение аттрактора в трансверсальном направлении (фрагмент 1 на рис. 2, *b*) и увеличение его размерности. При этом „линейчатая“ структура синхронного аттрактора проявляется на более мелких масштабах. Логично предположить, что с приближением к границе синхронизации размерность аттрактора, как и второй ляпуновский показатель, будет монотонно увеличиваться.

Однако с приближением параметра $k \rightarrow 0.25$ синхронный аттрактор начинает сжиматься в трансверсальном направлении (хотя второй ляпуновский показатель увеличивается), его размерность уменьшается и становится близкой 1, но он также не лежит на прямой (фрагмент 2 на рис. 2, *b*). Следует отметить, что в окрестности значений $\lambda = 2$ и $k = 0.25$ происходят бифуркации удвоения периода седловых циклов, вложенных в синхронный хаотический аттрактор, поэтому причиной

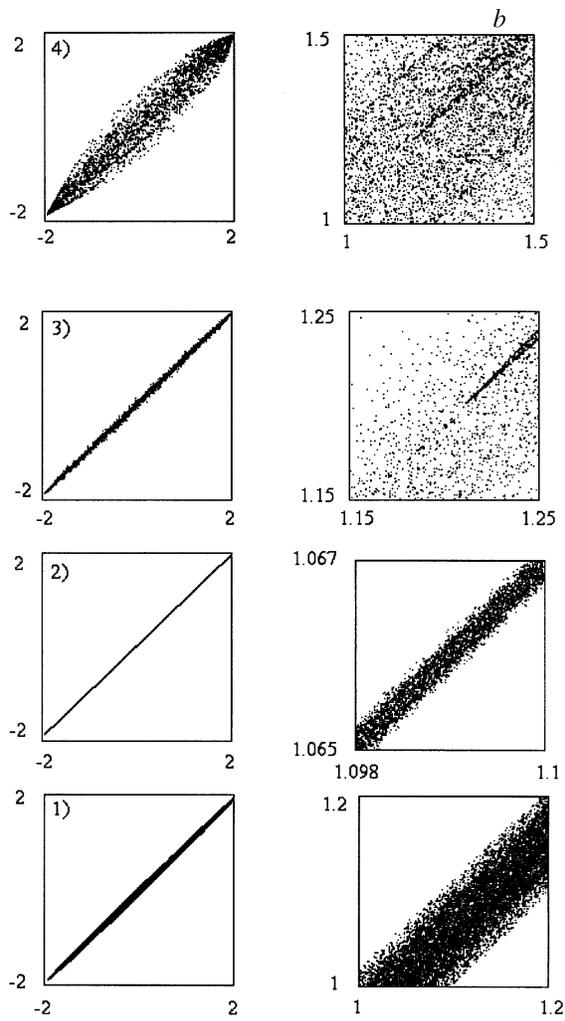


Рис. 2 (продолжение).

такого сжатия может быть изменение конфигурации многообразий неустойчивых циклов. Дальнейшее уменьшение связи приводит вновь к росту корреляционной размерности и расширению аттрактора в трансверсальном направлении (фрагменты 3, 4 на рис. 2, *b*). С приближением к границе области синхронизации наблюдается дальнейшее расширение аттрактора, однако размерность опять уменьшается.

В итоге можно сделать следующие выводы: в симметрично связанных системах при трансверсальной суперустойчивости асимметрия (неидентичность) подсистем не оказывает влияния на размерность синхронного хаотического аттрактора, т. е. размерностные характеристики аттрактора остаются такими же, как и у аттрактора изолированной подсистемы. С потерей суперустойчивости размерность аттрактора увеличивается, демонстрируя с приближением к границе синхронизации немонотонное поведение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-02-17578, при поддержке U.S. Civilian Research Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union, Award No REC-006.

Список литературы

- [1] *Yamada T., Fujisaka H.* // Prog. Theor. Phys. 1983. V. 69. P. 32.
- [2] *Pikovsky A.S.* // Z. Phys. B. 1984. V. 55. P. 149–154.
- [3] *Pecora L.M., Carrol T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 821–824.
- [4] *Hasler M.* // Phyl. Trans. of Royal Soc. of London. 1996. V. 353A. P. 115–126.
- [5] *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V.* et al. Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. World Scientific, Singapore, 1994.
- [6] *Hasler M.* // Proc. Int. Spec. Workshop Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Moscow, 1997. P. 2–7.
- [7] *Maistrenko Y., Kapitaniak T.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3285–3292.
- [8] *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. N 5. P. R4508–R4511.
- [9] *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T.* et al. // Phys. Rev. E. 1997. V. 76. N 6. P. 1014–1017.
- [10] *Hasler M., Maistrenko Yu., Popovych O.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. N 5. P. 6843–6846.
- [11] *Dmitry Postnov, Seung Kee Han, Hyungtae Kook* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. N 3. P. 2799–2807.

- [12] *Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Popovych O.* et al. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. N 3. P. 2817–2830.
- [13] *Popovych O., Maistrenko Yu., Mosekilde E.* et al. // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. N 3.
- [14] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 8. С. 991–1007.
- [15] *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н.* и др. // ЖТФ. 1990. Т. 60. № 10. С. 19–26.
- [16] *Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P.* et al. // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141.
- [17] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. № 1,2. С. 15–33.