01

Изменение зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в системах с дискретным временем

© А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ГосУНЦ „Колледж“
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 11 февраля 2002 г.

Рассматривается зависимость длительности переходных процессов от начальных условий в одномерной и двумерной динамических системах с дискретным временем — логистическом отображении и отображении Эно. Показано, что вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий для цикла периода один определяется мультипликатором(ами) устойчивой неподвижной точки. При изменении управляющих параметров в рамках одного динамического режима происходит бифуркация, приводящая к качественному изменению вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий.

Исследование нелинейных динамических систем (как с дискретным, так и с непрерывным временем) привлекает в последние десятилетия неослабевающее внимание исследователей. Как правило, в центре внимания находятся установившиеся режимы, а также то, каким образом один динамический режим сменяется другим при изменении управляющих параметров. В то же самое время целый пласт явлений, связанных с переходными процессами, как правило, оказывается вне поля зрения исследователей, несмотря на то что переходные процессы несут информацию о системе в целом и аттракторах, реализующихся в фазовом пространстве [1,2].

Ранее в работе [3] были изучены переходные процессы в одномерной динамической системе с дискретным временем — логистическом отображении

$$x_{n+1} = f(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n). \tag{1}$$

В частности, было показано, что для логистического отображения зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0)$ претерпевает качественные изменения при варьировании управляющего параметра λ и смене одного динамического режима другим. Было также показано, что зависимость длительности переходных процессов от начальных условий подчиняется определенным скейлинговым закономерностям.

В настоящей работе рассматриваются механизмы, приводящие к качественному изменению вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в случае, когда управляющие параметры системы меняются в рамках одного динамического режима. В качестве исследуемых систем выбраны логистическое отображение (1), являющееся эталонным объектом нелинейной динамики, а также отображение Эно [4,5]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n(1 - x_n) + by_n, \\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned} \tag{2}$$

которое, как известно, при $b = 0$ переходит в логистическое отображение. Режимом, при котором проводилось исследование переходных процессов в (1) и (2), являлся наиболее простой — устойчивый цикл периода один. Иными словами, управляющие параметры варьировались таким образом, что все наблюдения проводились в рамках этого динамического режима, когда поведению системы (2) соответствовала неподвижная устойчивая точка (x^0, y^0), $x^0 = y^0 = (\lambda + b - 1)/\lambda$, а логистическому отображению — неподвижная устойчивая точка $x^0 = (\lambda - 1)/\lambda$ соответственно.

Зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0)$ в логистическом отображении (1) и $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ в отображении Эно (2) при заданных начальных условиях с наперед заданной точностью ε определялась так же, как это делалось в работе [3]: при фиксированных значениях управляющих параметров определялся аттрактор, реализующийся в системе, для чего произвольная точка начальных условий итерировалась $N = 6500$ раз, после чего полагалось, что изображающая точка „вышла“ на аттрактор. Анализируя полученную последовательность ($\{x_n\}|_{n=0}^N$ для логистического отображения и $\{(x_n, y_n)\}|_{n=0}^N$ для отображения Эно соответственно), начиная с $n = N - 1, N - 2, \ldots,$ определялся период режима (неподвижная

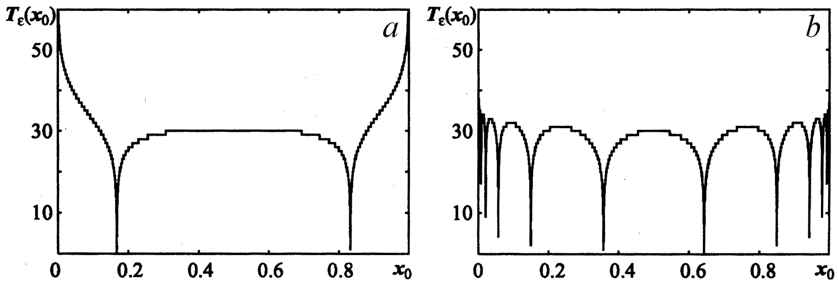

Рис. 1. Зависимость длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0)$ для цикла периода один логистического отображения: a — $\lambda = 1.2$, b — $\lambda = 2.8$.

устойчивая точка, 2-цикл, 4-цикл и т. д.). Затем, последовательно перебирая все возможные начальные условия с некоторым шагом разбиения, для каждого начального условия определялся интервал дискретного времени, необходимый для того, чтобы изображающая точка „вышла“ на найденный ранее аттрактор с точностью ε.

Как следует из проведенных исследований, зависимость длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0)$ для логистического отображения претерпевает качественные изменения при варьировании управляющего параметра λ даже в пределах одного динамического режима. На рис. 1 приведена зависимость длительности переходного процесса $T_\varepsilon(x_0)$ для двух значений управляющего параметра λ: a соответствует значению управляющего параметра $\lambda = 1.2$, b — $\lambda = 2.8$ соответственно. Поведению системы при этом и в том, и в другом случае соответствует неподвижная устойчивая точка $x_0 = (\lambda - 1)/\lambda$. Изменение вида зависимости $T_\varepsilon(x_0)$ происходит, когда управляющий параметр λ пересекает точку $\lambda_m = 2$. В этот момент цикл периода один обладает максимальной устойчивостью, его мультипликатор μ равен нулю. При значениях $\lambda < \lambda_m$ зависимость $T_\varepsilon(x_0)$ имеет два локальных минимума, а при $\lambda > \lambda_m$ число таких локальных минимумов оказывается бесконечным (рис. 1).

Механизм подобного усложнения вида зависимости длительности переходного процесса от начальных условий связан с появлением двух последовательностей точек $\{x_i^{(0)}\}|_{i=1}^{\infty}$ и $\{x_i^{(1)}\}|_{i=1}^{\infty}$, которые за конечное число итераций отображаются в неподвижную устойчивую точку x^0:

$$x^0 = f(x_1^{(0)}) = f\big(f(x_2^{(0)})\big) = f\big(f(x_2^{(1)})\big) = \ldots = f^{(n)}(x_n^{(0)}) = f^{(n)}(x_n^{(1)}). \quad (3)$$

Эти последовательности сходятся к точкам границ бассейна притяжения аттрактора $x_{gr0} = 0$ и $x_{gr1} = 1$ соответственно, причем каждой точке последовательности соответствует локальный минимум зависимости длительности переходного процесса от начальных условий (см. также [3]). Эти последовательности возникают при $\lambda > \lambda_m$ и обусловлены необратимостью отображения (1).

Как уже говорилось выше, отображение Эно (2) при $b = 0$ переходит в логистическое (1), а следовательно, в отображении Эно при $b = 0$ и $\lambda = 1 \div 3$ на базе устойчивого цикла периода один должно наблюдаться явление усложнения зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$, характерное для логистического отображения. Соответствующая зависимость $T_\varepsilon(x_0)$ для логистического отображения в этом случае просто транслируется вдоль оси y, и локальные минимумы зависимости длительности переходных процессов от начальных условий представляют собой линии, параллельные оси y на плоскости начальных условий (x_0, y_0). Это явление наблюдается в отображении Эно и при значениях управляющего параметра b, близких (но не равных) нулю (рис. 2). За счет появления в (2) слагаемого by_n линии, соответствующие минимумам зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$, перестают быть параллельными.

В то же самое время объяснить механизм усложнения зависимости длительности переходных процессов от времени $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ так, как это было сделано для логистического отображения, не удается. Это связано, во-первых, с тем, что при $b \neq 0$ отображение Эно является обратимым, а следовательно, не существует таких точек, которые бы за конечное число итераций отображались бы в неподвижную точку (x^0, y^0).[1] Между тем именно эти точки и обусловливали в логистическом отображении появление бесконечного числа локальных минимумов зависимости $T_\varepsilon(x_0)$.

Во-вторых, в отображении Эно при $b \neq 0$ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ неподвижной точки (x^0, y^0) не обращаются в ноль и соответственно в отображении Эно (при $b \neq 0$) не существует циклов максимальной устойчивости. Между тем именно с циклом максимальной

[1] Естественно, кроме самой этой точки (x^0, y^0).

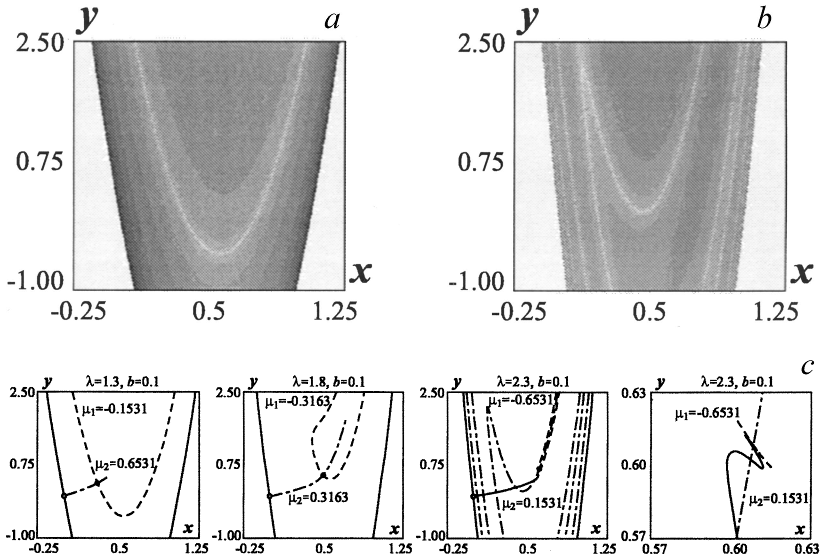

Рис. 2. Проекция поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость возможных состояний (x, y) для системы Эно. Градациями серого показана длительность переходных процессов: белый цвет соответствует нулевой длительности переходного процесса, черный — пятидесяти единицам дискретного времени. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности: *a* — проекция зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ при $\lambda = 1.3$, $b = 0.1$. *b* — аналогичная проекция для $\lambda = 2.3$, $b = 0.1$. *c* — схематичное изображение устойчивых многообразий точки аттрактора (x^0, y^0) и устойчивого и неустойчивого многообразий неустойчивой точки $(0, 0)$ при фиксированном значении управляющего параметра $b = 0.1$ и различных значениях параметра λ. Устойчивое многообразие точки (x^0, y^0), характеризуемое отрицательным мультипликатором μ_1, показано пунктиром, второе многообразие, соответствующее положительному мультипликатору μ_2 — штрихпунктиром. Многообразия неустойчивой точки $(0, 0)$ показаны сплошными линиями. Для удобства на рисунках приведены значения мультипликаторов $\mu_{1,2}$ точки аттрактора (x^0, y^0). Последний рисунок *c* является увеличенным фрагментом предыдущего, поясняющим поведение неустойчивого многообразия точки $(0, 0)$ в окрестности точки аттрактора (x^0, y^0).

устойчивости в логистическом отображении связан момент бифуркации зависимости длительности переходных процессов от времени $T_\varepsilon(x_0)$. Следовательно, для отображения Эно возникает задача о нахождении на плоскости управляющих параметров (λ, b) бифуркационной линии, пересечение которой приводит к качественному усложнению вида зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$.

Сопоставление проекции поверхности $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость начальных условий (x_0, y_0) с расположением устойчивых многообразий устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) (многообразия играют важную роль, например, при формировании границ бассейнов притяжения аттракторов [6,7]) показывает, что точки начальных условий, в которых длительность переходных процессов принимает минимальные значения, совпадают с точками одного из этих многообразий. Устойчивая неподвижная точка (x^0, y^0) характеризуется мультипликаторами $\mu_1 = \left(2 - 2b - \lambda - \sqrt{4b + (-2 + 2b + \lambda)^2}\right)/2$ и $\mu_2 = \left(2 - 2b - \lambda + \sqrt{4b + (-2 + 2b + \lambda)^2}\right)/2$, а также собственными векторами $\mathbf{e}_1 = \left((2 - 2b - \lambda - \sqrt{4b + (-2 + 2b + \lambda)^2})/2, 1\right)$ и $\mathbf{e}_2 = \left((2 - 2b - \lambda + \sqrt{4b + (-2 + 2b + \lambda)^2})/2, 1\right)$ соответственно.

Наименьшие значения зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ располагаются вдоль того многообразия точки (x^0, y^0), которое соответствует наименьшему по модулю значению мультипликатора. Именно вдоль этого многообразия осуществляется наиболее быстрое приближение изображающей точки к аттрактору. При фиксированном значении управляющего параметра $b = 0.1$ и с изменением управляющего параметра λ от 0.9 до 2.7 (при этом поведению системы соответствует устойчивый цикл периода один) происходит постепенное уменьшение модуля положительного мультипликатора μ_2 и одновременное увеличение модуля отрицательного мультипликатора μ_1. При $b = 0.1$ и $\lambda < \lambda_{eq} = 1.8$ имеет место соотношение $|\mu_1| < |\mu_2|$, и соответственно минимумы зависимости длительности переходного процесса от начальных условий (светлые линии на рис. 2, *a*) соответствуют многообразию, характеризующемуся отрицательным мультипликатором μ_1. При $\lambda = \lambda_{eq} = 1.8$, когда $|\mu_1| = |\mu_2|$, оба многообразия становятся „равноправными“, а при $\lambda > \lambda_{eq} = 1.8$ величина $|\mu_2|$ становится меньше, чем $|\mu_1|$, многообразия меняются ролями, и светлые линии минимальных значений переходных процессов располагаются уже вдоль многообразия, характеризующегося положительным мультипликатором μ_2 (рис. 2, *b*).

Таким образом, при $b = 0.1$ и $\lambda = 1.8$ происходит „обмен ролями“ устойчивых многообразий неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0). Однако при этих же значениях управляющих параметров имеет место еще одно важное событие, в котором принимает участие неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ (устойчивое многообразие этой точки, характеризующееся мультипликатором $\mu_1^{unst} = (\lambda - \sqrt{4b+\lambda^2})/2$ и собственным вектором $\mathbf{e}_1 = \big((\lambda - \sqrt{4b+\lambda^2})/2, 1\big)$ образует границу бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) системы Эно). Это неустойчивое многообразие характеризуется мультипликатором $\mu_2^{unst} = (\lambda + \sqrt{4b+\lambda^2})/2$ и собственным вектором $\mathbf{e}_2 = \big((\lambda + \sqrt{4b+\lambda^2})/2, 1\big)$. Поскольку любая точка, лежащая в малой окрестности неустойчивой точки $(0,0)$ и принадлежащая бассейну притяжения аттрактора (x^0, y^0), должна быть с течением времени „притянута“ к аттрактору, то неустойчивое многообразие неусточивой точки $(0,0)$ должно заканчиваться в точке (x^0, y^0) (или, по крайней мере, проходить через нее).

При $\lambda < \lambda_{eq} = 1.8$, как уже говорилось выше, доминирующую роль играет многообразие, которому соответствует отрицательный мультипликатор μ_1. Именно вдоль этого многообразия осуществляется наиболее быстрая сходимость к точке аттрактора. Поэтому неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ стремится к точке аттрактора по направлению второго многообразия точки (x^0, y^0), характеризуемого мультипликатором μ_2 (рис. 2, c). После того как значение управляющего параметра λ превосходит λ_{eq}, поведение неустойчивого многообразия точки $(0,0)$ в окрестности точки (x^0, y^0) обусловливается многообразием с отрицательным мультипликатором μ_1. В результате неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ бесконечное число раз пересекает устойчивое многообразие точки (x^0, y^0), характеризуемое положительным мультипликатором μ_2. Вследствие этого устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) также бесконечное число раз пересекает неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ в ее окрестности, что приводит к появлению бесконечного числа „впадин“ на поверхности зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$.

Таким образом, в системе Эно при выполнении условия $\mu_1 = -\mu_2$ ($\mu_{1,2}$ — действительные) происходит бифуркация расщепления многообразий, приводящая к качественной трансформации вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 01–02–17392 и 00–15–96673), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

Список литературы

[1] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 15. С. 26–31.
[2] *Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* // Phys. Rev. 2001. E 64. P. 036210.
[3] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* // Докл. АН. 2002 (в печати).
[4] *Хенон М.* // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
[5] *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. A164. P. 413.
[6] *Grebogi C., Ott E.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 13. P. 935–938.
[7] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. N 10. P. 1011–1014.