

01;03

## **Асимптотическое решение задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости**

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 11 апреля 2002 г.

Впервые найдено строгое решение задачи о временной эволюции формы периодической волны на поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости в квадратичном по амплитуде волны приближении.

1. Несмотря на длительную историю исследования волн конечной амплитуды, до сих пор все строгие исследования сделаны в рамках приближения идеальной жидкости (см., например, [1–7] и указанную там литературу). Наиболее корректные попытки учета влияния вязкости на нелинейную эволюцию формы свободной поверхности вязкой жидкости выполнены в приближении малой вязкости в рамках теории пограничного слоя [8–10], пригодной лишь при больших значениях числа Рейнольдса. Тем не менее вполне реальна корректная аналитическая формулировка задачи определения формы волны, распространяющейся по поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости в приближении, квадратичном по амплитуде волны [11].

Проблема исследования волнового движения конечной амплитуды в вязкой жидкости актуальна в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями. Так, в [12–14] в линейном приближении по амплитуде волн в вязкой жидкости предсказано существование неустойчивости поверхности жидкости по

отношению к упругим напряжениям, по отношению к содержащимся в жидкости инактивным ПАВ (поверхностно-активным веществам) и существование колебательной неустойчивости жидкости при конечной скорости перераспределения электрического заряда по поверхности жидкости. Детальный теоретический анализ этих эффектов возможен лишь в приближениях более высокого порядка малости по амплитуде волн, чем первый. В связи со сказанным и была поставлена настоящая задача.

2. Пусть в декартовой системе координат  $OXYZ$  в поле тяжести  $\mathbf{g}$ , когда  $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$ , несжимаемая жидкость с плотностью  $\rho$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и поверхностным натяжением  $\gamma$  заполняет полупространство  $z \leq 0$ . Внешнее давление постоянно и равно  $P_0$ . Будем искать формы профиля волны, свободно распространяющейся по поверхности жидкости вдоль  $OX$  в квадратичном приближении по амплитуде волны.

Пусть  $u = u(x, z, t)$  и  $v = v(x, z, t)$  — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей жидкости, а  $\mathbf{n}_x$  и  $\mathbf{n}_z$  — орты горизонтали и вертикали. Тогда аналитическое выражение для профиля волны  $\xi = \xi(x, t)$  и поля скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = u\mathbf{n}_x + v\mathbf{n}_z$  должны быть решением начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{U}) \times \mathbf{U} = -\text{grad} \left( \frac{1}{\rho} p + \frac{U^2}{2} + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad \text{div} \mathbf{U} = 0;$$

$$z = \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = v;$$

$$p - 2\rho\nu\mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U}) - P_0 = \gamma \text{div}(\mathbf{n});$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U}) + \mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)\mathbf{U}) = 0;$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad U \rightarrow 0;$$

$$t = 0 : \quad \xi = F(x);$$

$$z \leq \xi : \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}^0(x, z) = u^0(x, z)\mathbf{n}_x + v^0(x, z)\mathbf{n}_z.$$

Здесь  $t$  — время;  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  — орты касательной и нормали к поверхности.

3. Процедура разделения сформулированной проблемы на задачи первого и второго порядка малости подробно описана в [11]. Задача первого приближения хорошо известна, и на ее решении останавливаться

не будем. Главный ее результат — дисперсионное уравнение:

$$v^2(q^2 + k^2)^2 + \omega_0^2 = 4qv^2k^3; \quad \omega_0^2 = k(g + k^2\gamma/\rho); \quad q = \sqrt{k^2 + S/v},$$

где  $S$  — комплексная частота. В нелинейном анализе используется лишь одно решение дисперсионного уравнения, лежащее на верхнем листе римановой поверхности. Далее оно обозначается как  $S$ .

Если искомое векторное поле скоростей второго приближения  $\mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t)$  представить через два скалярных  $\varphi_2 \equiv \varphi_2(\mathbf{r}, t)$  и  $\psi_2 \equiv \psi_2(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1\varphi_2 + \hat{\mathbf{N}}_2\psi_2; \quad \hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv -\mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial x},$$

то математическая постановка задачи второго приближения, согласно [11], принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - v\Delta\psi_2 &= a^2 \left( \eta_0 \exp(2L) + (\eta_1 \cos(h) + \eta_2 \sin(h)) \exp(2L) \right. \\ &\left. + (\Pi_1 \cos(2\theta + h) + \Pi_2 \sin(2\theta + h)) \exp(L + 1) \right) \exp(2T); \quad \Delta\varphi_2 = 0; \end{aligned}$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = a^2 (H_1 \cos(2\theta) - H_2 \sin(2\theta)) \exp(2T); \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -\rho g \xi_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - 2\rho v \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} \right) + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} \\ = a^2 (Z_1 + Z_1 \cos(2\theta) - Z_2 \sin(2\theta)) \exp(2T); \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \\ = a^2 (2H_2 - \kappa_1 + G_1 \cos(2\theta) - G_2 \sin(2\theta)) \exp(2T); \quad (3) \end{aligned}$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \rightarrow 0. \quad (4)$$

$$S_R = \text{Re}(S); \quad S_I = \text{Im}(S); \quad q_R = \text{Re}[\sqrt{k^2 + S/v}]; \quad q_I = \text{Im}[\sqrt{k^2 + S/v}];$$

$$D_0 = S_R + 2vk^2; \quad C_1 = q_R^2 - q_I^2; \quad C_2 = 2q_R q_I; \quad C_3 = C_1 - k^2;$$

$$l = kz; \quad L = q_R z; \quad h = q_I z; \quad \theta = S_I t - kx; \quad T = S_R t;$$

$$\eta_0 = -(vk)^2 C_2 2q_I; \quad \eta_1 = \frac{vk}{(k+q_R)^2 + q_I^2} (S_I B_1 - D_0 B_2);$$

$$\eta_2 = \frac{vk}{(k+q_R)^2 + q_I^2} (D_0 B_1 + S_I B_2);$$

$$\Pi_1 = \frac{vk}{(3k+q_R)^2 + q_I^2} (D_0 M_2 + S_I M_1);$$

$$\Pi_2 = \frac{vk}{(3k+q_R)^2 + q_I^2} (D_0 M_1 - S_I M_2);$$

$$B_1 = (k+q_R)C_3 + q_I C_2; \quad B_2 = (k+q_R)C_2 - q_I C_3; \quad M_1 = (3k+q_R)C_3 + q_I C_2;$$

$$M_2 = (3k+q_R)C_2 - q_I C_3; \quad H_1 = k(D_0 - 2vkq_R); \quad H_2 = k(S_I - 2vkq_I);$$

$$Z_1 = vk^2 \rho (D_0 + 2v(q_I^2 - q_R^2)) - \frac{\rho}{2} (S_I^2 - S_R^2 D_0); \quad G_1 = -k(2H_2 + \kappa_1);$$

$$Z_2 = vk^2 \rho (S_I - 4vq_I q_R) + \rho S_I (S_R + vk^2); \quad G_2 = k(2H_1 + \kappa_2);$$

$$\kappa_1 = kS_I - q_I(k^2 - q_I^2 + 3q_R^2)v; \quad \kappa_2 = kS_R + v(k^2(2k - q_R) + q_R(3q_I^2 - q_R^2)).$$

Соотношение (1) — кинематическое условие на свободной поверхности; (2) — условие для давления на свободной поверхности; (3) — условие зануления касательных натяжений на свободной поверхности; (4) — условие отсутствия движения на бесконечной глубине. Входящая в определение  $T$  величина  $S_R$  меньше нуля и характеризует декремент затухания волны в линейном приближении.

4. Частное решение полной задачи об определении профиля волны, распространяющейся по поверхности вязкой бесконечно глубокой жидкости, верное с точностью до величин второго порядка малости по отклонению формы поверхности от равновесной плоской, получается в виде:

$$\xi = a \cos(\theta) \exp(T) + a^2 (\Lambda_1 \cos(2\theta) - \Lambda_2 \sin(2\theta)) \exp(2T); \quad (5)$$

$$J_1 = \operatorname{Re}[\sqrt{2(k^2 + q_I^2)}]; \quad J_2 = \operatorname{Im}[\sqrt{2(k^2 + q_I^2)}];$$

$$\alpha_1 = q_I^2 + q_R^2; \quad \alpha_2 = q_I^2 - q_R^2; \quad D_1 = k - q_R; \quad D_2 = 3k + q_R; \quad D_3 = k + q_R;$$

$$D_4 = 4q_I(k^3 - 3k^2 q_R + k(q_I^2 - 5q_R^2) - q_R \alpha_1);$$

$$D_5 = 4kq_I(5k^4 - 8k^3 q_R + 2k^2(3q_I^2 - 7q_R^2) + \alpha_1^2);$$

$$\begin{aligned}
D_6 &= 2(3k^4 + 4k^2q_I^2 + q_I^4 + 4k(k^2 + 2q_I^2)q_R - 2k^2q_R^2 - 4kq_R^3 - q_R^4); \\
D_8 &= 3k^2 + \alpha_1; \\
D_7 &= 21k^6 + 22k^5q_R + k^4(27q_I^2 - 25q_R^2) \\
&\quad + 6kq_R\alpha_1^2 + \alpha_1^3 + k^2\alpha_1(7q_I^2 + 3q_R^2) + 4k^3(15q_I^2q_R - 7q_R^3); \\
b_1 &= 2(3k^3 + k^2q_R + 3k\alpha_2 - q_R\alpha_1); \\
b_2 &= 21k^5 + k^4q_R + 2\alpha_2k^2(13k + q_R) + \alpha_1^2(5k + q_R); \\
b_3 &= -q_I(7k^2 - q_I^2 + 2kq_R - q_R^2); \\
b_4 &= 2k^2(9k^3 + 5kq_I^2 + 15k^2q_R + q_I^2q_R + 7kq_R^2 + q_R^3); \\
b_5 &= -2q_I(k^2 + q_I^2 + 6kq_R + q_R^2); \quad b_6 = -q_I(k^4 + 32k^3q_R + 2k^2\alpha_2 + \alpha_1^2); \\
\Omega_1 &= kv(q_I^2 + D_2^2)^{-1}; \\
b_7 &= -3k^2 + 5kq_I^2 - k^2q_R + q_I^2q_R + 3kq_R^2 + q_R^3; \\
\Omega_2 &= \Omega_1(4(S_R^2 + S_I^2) + 4v(q_I^2 + D_1D_2)S_R \\
&\quad - 8vq_ID_3S_I + v^2(q_I^2 + D_1^2)(q_I^2 + D_2^2))^{-1}; \\
\delta_1 &= 2k\rho\Omega_1((D_1D_2 - q_I^2)S_R + 4kq_IS_I + 2vk^2(D_1D_2 - q_I^2)); \\
\delta_2 &= 2k\rho\Omega_1(-4kq_IS_R + (D_1D_2 - q_I^2)S_I - 8vk^3q_I); \\
d_1 &= -\Omega_2(D_4(S_R^2 + S_I^2) + vD_5S_R - v(q_I^2 + D_3^2)^2(D_1D_2 - q_I^2)S_I \\
&\quad + 8v^2k^3q_I(D_1^2 + q_I^2)(D_2D_3 + q_I^2)); \\
d_2 &= \Omega_2(D_6(S_R^2 + S_I^2) + vD_7S_R - 4vkq_I(q_I^2 + D_3^2)^2S_I \\
&\quad + 2v^2k^2(q_I^2 + D_1^2)((D_8 + 4kq_R)^2 - 4k^2q_I^2)); \\
\chi_1 &= -2\Omega_2(b_1(S_R^2 + S_I^2) + vb_2S_R + v(q_I^2 + D_3^2)b_3S_I + v^2(q_I^2 + D_1^2)b_4); \\
\chi_2 &= -2\Omega_2(b_5(S_R^2 + S_I^2) + vb_6S_R + v(q_I^2 + D_3^2)b_7S_I \\
&\quad + 2v^2k^2q_I(D_1^2 + q_I^2)(D_1D_2 - q_I^2)); \\
K_1 &= 2\rho(\chi_1 + H_1); \quad K_2 = 2\rho(\chi_2 + H_2); \quad K_3 = 4k\rho(d_1q_I + d_2D_3 - G_2 + 2kH_1);
\end{aligned}$$

$$K_4 = -4k\rho(d_2q_I - d_1D_3 + G_1 + 2kH_2);$$

$$K_5 = 2k(-Z_1 + \delta_1 + 2\nu\rho(q_I\chi_2 + k\chi_1 - q_R\chi_1 + 2kH_1));$$

$$K_6 = 2k(-Z_2 + \delta_2 - 2\nu\rho(q_R\chi_2 + q_I\chi_1 - k\chi_2 - 2kH_1));$$

$$K_7 = -8\nu k^2\rho(d_1q_I + d_2D_3 - G_2 + 2k(\chi_1 + 2H_1));$$

$$K_8 = 8\nu k^2\rho(d_2q_I - d_1D_3 + G_1 + 2k(\chi_2 + 2H_2));$$

$$K_9 = 8k^3(Z_1 - \delta_1 + 2\nu\rho[d_1q_I - G_2 - q_I\chi_2 + D_3(d_2 + \chi_1) + 2kH_1]);$$

$$\beta_1 = 4\rho; \quad \beta_2 = 16\nu k^2\rho;$$

$$K_{10} = 8k^3(Z_2 - \delta_2 + 2\nu\rho\{d_2q_I + G_1 + k\chi_2 - D_3(d_1 - \chi_2) + 2kH_2\});$$

$$\beta_3 = 2k(\rho g + 4k^2\gamma);$$

$$\hat{S} = [S_R^2 \ S_R S_I \ S_I^2 \ S_R \ S_I \ 1]; \quad \hat{J} = [J_R^2 \ J_R J_I \ J_I^2 \ J_R \ J_I \ 1]^T;$$

$$\hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 4k^2\beta_1 \\ 0 & -4\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & -4k^2\beta_1 \\ \beta_2 & 0 & -\beta_2 & -4k\beta_2 & 0 & 4k^2\beta_2 \\ 0 & -2\beta_2 & 0 & 0 & 4k\beta_2 & 0 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_3 & 0 & 0 & -4k^2\beta_3 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1 & -K_2 & K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -2K_2 & -2K_1 & -2K_6 \\ 0 & 0 & 0 & -K_1 & K_2 & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_8 \\ 0 & 0 & 0 & K_3 & K_4 & K_9 \end{bmatrix}^T;$$

$$\hat{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta_1 & 0 & -2\beta_1 & 0 & 0 & 8k^2\beta_1 \\ 0 & -2\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_2 & 0 & 0 & -4k\beta_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 & -\beta_2 & -4k\beta_2 & 0 & 4k^2\beta_2 \\ 0 & 2\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_2 & K_1 & K_6 \\ 0 & 0 & 0 & 2K_1 & -2K_2 & 2K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -K_2 & -K_1 & -K_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_7 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_3 & K_{10} \end{bmatrix}^T;$$

$$\Lambda_1 = \frac{(\hat{S}_{\xi_1} \hat{J})(\hat{S}_{\xi_3} \hat{J}) + (\hat{S}_{\xi_2} \hat{J})(\hat{S}_{\xi_4} \hat{J})}{(\hat{S}_{\xi_1} \hat{J})^2 + (\hat{S}_{\xi_2} \hat{J})^2}; \quad \Lambda_2 = \frac{(\hat{S}_{\xi_1} \hat{J})(\hat{S}_{\xi_4} \hat{J}) - (\hat{S}_{\xi_2} \hat{J})(\hat{S}_{\xi_3} \hat{J})}{(\hat{S}_{\xi_1} \hat{J})^2 + (\hat{S}_{\xi_2} \hat{J})^2}.$$

Набор величин, заключенных в квадратные скобки, нужно понимать как матрицу. Символом  $T$  обозначена операция транспонирования матрицы. В формулах для  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  выражения в круглых скобках представляют собой произведения матриц.

Полученное решение интересно сравнить с результатами А.Х. Найфе, который исследовал аналогичную задачу, сформулированную для идеальной жидкости [4]. В этом случае, согласно [4], прямое разложение решения в квадратическом по амплитуде отклонения поверхности от равновесной формы приближении приводит к следующему результату:

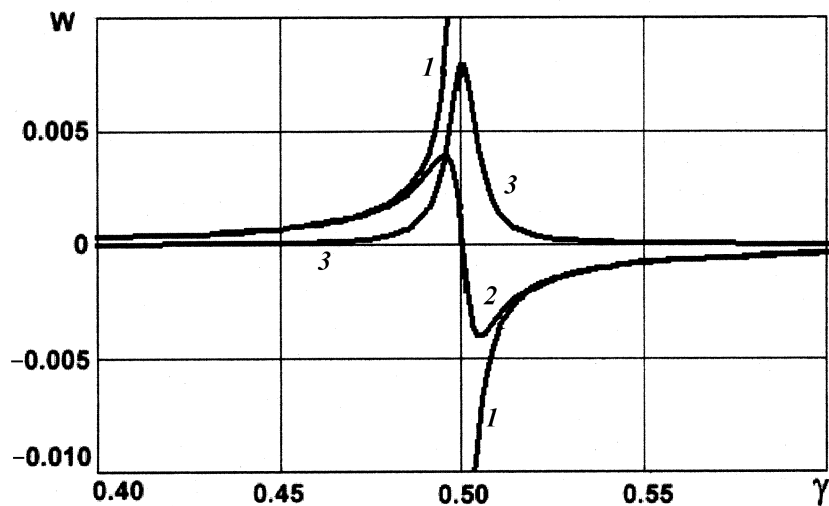
$$\xi = a \cos(\theta_0) + a^2 \Lambda_0 \cos(2\theta_0); \quad \Lambda_0 = \frac{(\rho g k + \gamma k^3)}{2(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

$$\theta_0 = kx - \omega_0 t. \quad (6)$$

Если  $\gamma = 0$ , то решение (6) превращается в волну Стокса [1,2]. Несложно показать, что при  $\nu \rightarrow 0$  выражение для профиля волны в вязкой жидкости (5) переходит в соответствующее для идеальной жидкости (6).

При сравнении решений для вязкой жидкости (5) и для идеальной жидкости (6) выяснилось, что они наиболее существенно различаются при значениях безразмерных параметров, соответствующих резонансному взаимодействию мод. Для невязкой жидкости из (6) видно, что при  $\gamma k^2 = 0.5\rho g$  добавка, квадратичная по амплитуде волны первого приближения, становится бесконечно большой и получается, что главная мода резонансно раскачивает волну с вдвое меньшей длиной.

На рисунке в безразмерных переменных, в которых  $k = g = \rho = 1$ , построены амплитуды вторых слагаемых решений (5) и (6) при



Зависимости входящих в (5) и (6) амплитуд безразмерных квадратичных добавок  $W(\gamma)$  к профилю волны от величины безразмерного поверхностного натяжения при  $a = 0.01$ : 1 — для идеальной жидкости  $W(\gamma) = a^2 \Lambda_0(\gamma)$ ; 2 и 3 — для вязкой жидкости при  $\nu = 10^{-3}$ : 2 —  $W(\gamma) = a^2 \Lambda_1(\gamma, \nu)$ ; 3 —  $W(\gamma) = a^2 \Lambda_2(\gamma, \nu)$ .

безразмерных значениях  $\nu = 10^{-3}$  и  $a = 0.01$  в зависимости от безразмерного поверхностного натяжения  $\gamma$ . Выбранный набор безразмерных переменных позволяет сравнить вязкую и невязкую модели межмодового резонанса для волны на поверхности воды с длиной 2.4 см и амплитудой 0.3 мм. Из рисунка видно, что в далекой по  $\gamma$  от резонанса области безразмерных параметров решения (5) и (6) совпадают. Вблизи резонансного безразмерного значения  $\gamma = 0.5$  в решении задачи с учетом вязкости становится отличным от нуля коэффициент  $\Lambda_2$  при  $\sin(2\theta)$ . Это смещает фазу волны, найденной во втором порядке приближений, по отношению к фазе основной волны. Амплитуда квадратичной добавки  $\sqrt{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2}$  остается меньше амплитуды основной волны  $a = 0.01$  даже при резонансном значении  $\gamma = 0.5$ . Это означает, что решение (5) в данном случае пригодно при всех



значениях  $\gamma$ , тогда как решение (6), основанное на приближении невязкой жидкости, предсказывает резонансно-высокую амплитуду.

5. Заключение. Полученное корректное в квадратичном по амплитуде волн приближении асимптотическое решение задачи распространения волн по поверхности бесконечно глубокой жидкости произвольной вязкости позволяет обобщить понятие „волны Стокса“ (определенное для идеальной жидкости) на случай вязкой жидкости. Сравнение найденного решения с решением для идеальной жидкости показывает, что даже малая вязкость играет существенную роль в формировании профиля волны при резонансном межмодовом взаимодействии волн.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

## Список литературы

- [1] *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
- [2] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [3] *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А.* Механика сплошных сред. Ч. 1. М.: Наука, 2000. 256 с.
- [4] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 385–395.
- [5] *Shugan I., Voliak K.* // J. Fluid Mech. 1998. V. 368. P. 321–338.
- [6] *Trulsen K., Kliakhandler I.* // Physics of fluids. 2000. V. 12. N 10. P. 2432–2437.
- [7] *Longuet-Higgins M.S.* // J. Fluid Mech. 2000. V. 423. P. 275–291.
- [8] *Миндлин И.М.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 135–143.
- [9] *Нестеров С.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 116–121.
- [10] *Fedorov A.V., Melvil W.K.* // J. Fluid Mech. 1998. V. 354. P. 1–42.
- [11] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений жидкости со свободной поверхностью. Препринт № 31. ИМИ РАН. Ярославль, 2001. 87 с.
- [12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 4. С. 89–94.
- [13] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 2. С. 22–29.
- [14] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 1–6.