01;03

Аналитическое решение задачи о тепловом скольжении второго порядка

© В.Н. Попов

Поморский государственный университет, Архангельск
E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

Поступило в Редакцию 18 апреля 2002 г.

Представлены результаты, полученные с использованием точных аналитических методов в задаче о тепловом скольжении второго порядка. Проведено сравнение с литературными данными.

Градиенты гидродинамических величин (температуры, массовой скорости газа, концентрации) вызывают такое явление, как скольжение разреженного газа вдоль обтекаемой поверхности. Такого рода скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности исследованы к настоящему времени достаточно подробно как точными, так и приближенными методами. Менее изученным является вопрос об учете в граничных условиях производных второго порядка от гидродинамических величин. Учет такого рода эффектов является необходимым для построения теории термофореза высокотеплопроводных частиц, где эти величины играют доминирующую роль, и позволил теоретически предсказать возможность отрицательного (в направлении градиента температуры) термофореза для такого рода аэрозольных частиц при малых значениях чисел Кнудсена ($0.01 < \mathrm{Kn} < 0.3$) [1–4]. Учитывая, что имеющиеся результаты получены либо численными [1,2], либо приближенными [3,4] методами, исследование данного вопроса с помощью точных аналитических методов представляется актуальным и в теоретическом, и в прикладном аспектах.

Рассмотрим простой одноатомный газ, заполняющий полупространство $x > 0$, ограниченное твердой плоской поверхностью, лежащей в плоскости $x = 0$. Пусть в газе создается нормальный к поверхности градиент температуры. Предположим, что этот градиент не постоянен, а медленно меняется вдоль рассматриваемой поверхности. Направим ось y вдоль направления изменения градиента температуры. Таким образом, в задаче отличны от нуля величины $\partial T/\partial x$ и $\partial^2 T/\partial x \partial y$. Первая из этих величин приводит к скачку температуры на границе твердой плоской поверхности, а вторая — к так называемому тепловому скольжению второго порядка.

Скорость скольжения газа относительно обтекаемой поверхности при этом определяется выражением

$$U\big|_S = K_T \beta_R \lambda \nu k, \qquad k = \frac{1}{T_\omega} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\Big|_S .$$

Здесь S и T_ω — поверхность и температура частицы, λ — длина свободного пробега частиц газа, ν — кинематическая вязкость газа, K_T — коэффициент теплового скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности, β_R — коэффициент теплового скольжения второго порядка. Учитывая, что K_T известно, поставленная задача сводится к нахождению коэффициента β_R.

Предположим, что

$$\frac{\lambda}{T_\omega}\left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \ll 1, \qquad \frac{\lambda^2}{T_\omega}\left|\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right| \ll 1.$$

Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения газовых молекул по координатам и скоростям можно записать в виде

$$f = f^{(0)}\big(1 + C_y \varphi(x, C_x)\big),$$

где $f^{(0)}$ — локально-равновесная функция распределения, записанная в приближении Чепмена–Энскога, а $\varphi(x, C_x)$ является решением уравнения ($\mu = C_x$):

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\varphi(x, \tau) d\tau$$
$$- k\left[Z_1(x, \mu) + \gamma(\mu^2 + 1/2) Z_2(x, \mu)\right], \qquad (1)$$

$$Z(x, \mu) = \int\limits_0^\infty \exp(-x/\eta) F(\eta, \mu) A(\eta) d\eta,$$

$$F(\eta,\mu)=\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,I+\exp(\eta^2)\Omega(\eta)\delta(\eta-\mu),$$

$$\Omega(\eta)=\sqrt{\pi}\Delta^{-1}(\eta)+\eta\,t(\eta)I,$$

$$\Delta^{-1}(\eta)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-(\eta^2-5/2) & -\gamma(\eta^2-3/2)\\ \gamma^{-1} & 3\end{bmatrix},$$

$$t(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mu^2)d\mu}{\mu-\eta}=-2\sqrt{\pi}\exp(-\eta^2)\int\limits_{0}^{\eta}\exp(t^2)dt,$$

$$A(\eta)=\left[A_1(\eta),A_2(\eta)\right]^t,\quad Z(x,\mu)=\left[Z_1(x,\mu),Z_2(x,\mu)\right]^t$$

с граничными условиями

$$\varphi(0,\mu)=0\quad(\mu>0),\qquad \varphi(\infty,\mu)=2U\big|_S. \tag{2}$$

Здесь $Z(x,\mu)$ — функция распределения из задачи о скачке температуры на границе твердой плоской поверхности, построенная в [5], $A(\eta)$ — коэффициенты в разложении решения задачи о скачке температуры на границе твердой плоской поверхности по собственным векторам непрерывного спектра, символ t означает транспонирование, $\gamma^2=2/3$, Px^{-1} — распределение в смысле главного значения при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Вводя в рассмотрение вектор-столбец $Y(x,\mu)=[\varphi(x,\mu),0]^t$, перепишем (1) и (2) в векторном виде

$$\mu\,\frac{\partial Y}{\partial x}+Y(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau^2)Y(x,\tau)d\tau-kK(\mu)Z(x,\mu), \tag{3}$$

$$Y(0,\mu)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad(\mu>0),\qquad Y(\infty,\mu)=\begin{bmatrix}2U|_s\\0\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$K(\mu)=\begin{bmatrix}1 & \gamma(\mu^2+1/2)\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Общее решение (3) ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид [6]

$$Y_0(x, \mu) = B_0 + B_1(x - \mu) + \int\limits_0^\infty \exp(-x/\eta)\Phi(\eta, \mu)B(\eta)d\eta,$$

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta P\,\frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\eta^2)}{n - z}d\eta.$$

Здесь B_0, B_1, $B(\eta)$ — неизвестные вектор-столбцы, компоненты которых подлежат дальнейшему определению.

Частное решение неоднородного уравнения (3) ищем в виде

$$Y_1(x, \mu) = \int\limits_0^\infty \exp(-x/\eta)G(\eta, \mu)d\eta, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^\infty \exp(-\mu^2)G(\eta, \mu)d\mu = 0. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (3), приходим к характеристическому уравнению

$$\left(1 - \frac{\mu}{\eta}\right)G(\eta, \mu) = -kK(\mu)F(\eta, \mu)A(\eta),$$

решение которого находим в пространстве обобщенных функций

$$G(\eta, \mu) = k\eta P\frac{1}{\eta - \mu}K(\mu)F(\eta, \mu)A(\eta) + g(\eta)\delta(\eta - \mu). \tag{7}$$

Явный вид $g(\eta)$ найдем, подставляя (7) в (6):

$$g(\eta) = k\eta\exp(\eta^2)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,\frac{1}{\mu - \eta}K(\mu)F(\eta, \mu)A(\eta)d\mu.$$

Учитывая соотношения, приведенные в [7], находим $g(\eta) \equiv [0, 0]$. Тогда

$$Y(x, \mu) = B_0 + B_1(x - \mu) + \int_0^\infty \exp(-x/\eta)\Phi(\eta, \mu)B(\eta)d\eta$$

$$+ kK(\mu) \int_0^\infty \exp(-x/\eta)\eta P \frac{1}{\eta - \mu} F(\eta, \mu)A(\eta)d\eta.$$

Построенное решение при $B_0 = [2U_0, 0]^t$ и $B_1 = [0, 0]^t$ удовлетворяет граничному условию (4) на бесконечности. С учетом граничного условия (4) на стенке приходим к векторному сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши:

$$\begin{bmatrix} -2U|_S \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta B(\eta)d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2)\lambda(\mu)B(\mu)$$

$$+ kK(\mu) \int_0^\infty \eta P \frac{1}{\eta - \mu} F(\eta, \mu)A(\eta)d_\eta \quad (\mu > 0). \tag{8}$$

Учитывая соотношения, приведенные в [7], находим

$$\int_0^\infty \eta P \frac{1}{\eta - \mu} F(\eta, \mu)A(\eta)d\eta = \left[\mu \int_0^\infty F(\eta, \mu)A(\eta)d\eta\right]'_\mu$$

$$= (2\mu - \varepsilon_T) \begin{bmatrix} -1 \\ 1/\gamma \end{bmatrix} + \varepsilon_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь воспользовались тем, что [5]

$$\int_0^\infty F(\eta, \mu)A(\eta)d\eta = (\mu - \varepsilon_T) \begin{bmatrix} -1 \\ 1/\gamma \end{bmatrix} + \varepsilon_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя найденное значение интеграла в (8) и переходя к скалярной форме записи, приходим к уравнению $(B(\eta) = [n(\eta), 0]^t)$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{\eta n(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2)\lambda(\mu)n(\mu) \qquad (\mu > 0), \tag{9}$$

$$f(\mu) = \left[-2U|_S - (2\mu - \varepsilon_T)(\mu^2 - 1/2) - \varepsilon_n\right]k.$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{\eta n(\eta)}{\eta - z} d\eta. \tag{10}$$

С использованием граничных значений $N^{\pm}(\mu)$ и $\lambda^{\pm}(\mu)$ на верхнем и нижнем берегах разрезов сведем (9) к задаче определения аналитической функции по заданному скачку

$$\frac{2f(\mu)\mu \exp(-\mu^2)}{X(-\mu)} = N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) \quad (\mu > 0). \tag{11}$$

Здесь [6]

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\xi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \xi(\tau) = -\pi/2 - \operatorname{arctg} \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\,\tau \exp(-\tau^2)},$$

$\theta(\tau) = \arg \lambda^+(\tau)$ — регулярная ветвь аргумента функции $\lambda^+(\tau)$, фиксированная условием $\theta(0) = 0$.

С учетом поведения всех входящих в (11) функций ее решение записывается в виде

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{f(\mu)\mu \exp(-\mu^2)}{X(-\mu)} \frac{d\mu}{\mu - z}. \tag{12}$$

Функция $N(z)$, определяемая равенством (10), исчезает в бесконечно удаленной точке. Потребуем, чтобы этим свойством обладало и решение (12). Раскладывая (12) в ряд окрестности бесконечно удаленной точки, находим

$$U\big|_S = \frac{k}{2}\left[(Q_1 - 2Q_3) + \varepsilon_T(Q_2 + 1/2) + \varepsilon_n\right].$$

Подставляя в полученное выражение значения входящих в него Лоялковских интегралов $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.2663$, $Q_3 = -1.8207$ [9] и $\varepsilon_T = 1.3013$, $\varepsilon_n = -0.5633$ [5], окончательно получаем

$$U\Big|_S = 0.5323k.$$

Переходя к размерным величинам, находим $\beta_R = 2.3524$. Учитывая, что для высокотеплопроводных аэрозольных частиц при малых числах Кнудсена скорость термофореза определяется выражением [4]

$$U_T = \tau \nu \mathrm{Kn} \nabla \ln T, \quad \tau = -2K_T(C_T + \beta_R - \beta_B),$$

$K_T = 1.14995$, $C_T = 2.204939$, $\beta_B = 5.798445$, находим $\tau = 2.85442$. Здесь C_T — коэффициент скачка температуры разреженного газа на границе твердой плоской поверхности, β_B — коэффициент барнеттовского скольжения. Отметим, что найденное значение коэффициента β_R теоретически подтверждает существование отрицательного (в направлении градиента температуры) термофореза. В [2] $\tau = 3.258$.

Список литературы

[1] *Горелов С.Л.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 178–182.
[2] *Takeo Soga.* // Phys. Fluids. 1986. V. 29. N 4. P. 976–985.
[3] *Dwyer H.A.* // Phys. Fluids. 1967. V. 10. N 5. P. 976–984.
[4] *Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 6. С. 498–502.
[5] *Латышев А.В.* // ПММ. 1990. Т. 54. № 4. С. 581–586.
[6] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
[7] *Гайдуков М.Н., Попов В.Н.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1998. № 2. С. 165–173.
[8] *Loyalka S.K.* // Transport theory and statistical physics. 1975. V. 4. P. 55–65.