

01;05

## Динамика электротепловой неустойчивости полярного диэлектрика в области температурного максимума релаксационных потерь

© О.А. Емельянов

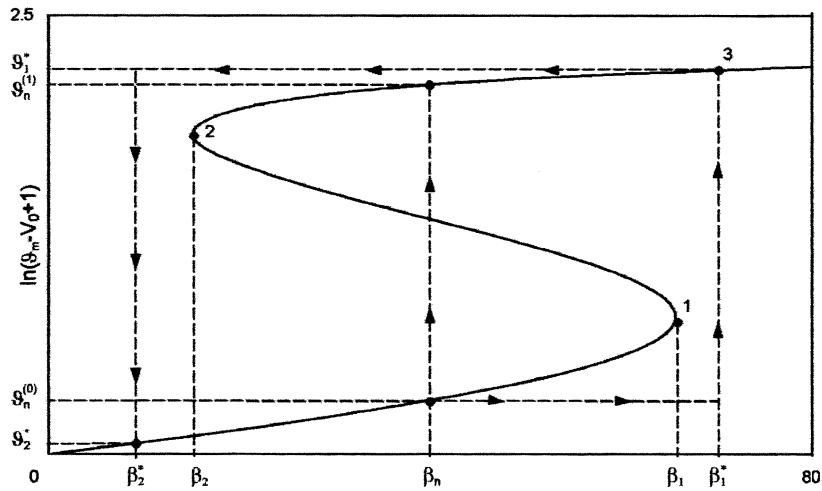
Санкт-Петербургский государственный технический университет  
E-mail: eicc@phtf.stu.neva.ru

Поступило в Редакцию 25 апреля 2002 г.

В условиях воздействия электрического поля полярный диэлектрик может находиться в нескольких устойчивых температурных состояниях. Переход между указанными состояниями вызван либо температурными возмущениями, либо изменением параметра нагрузки, связанным с частотой  $\omega$  и величиной напряженности электрического поля  $E$ .

Предложена методика решения нелинейной электротепловой задачи динамики температурных переходов. Полученные результаты расчета температурной динамики в центре диэлектрика хорошо согласуются с данными численного эксперимента.

Для описания экспериментально наблюдаемой бистабильности теплового состояния конденсаторов на основе полярных полимерных диэлектриков была предложена модель, удовлетворительно описывающая это явление в области температурного максимума релаксационных потерь. Полученные точные стационарные аналитические решения зависимости температуры в центре конденсатора  $\vartheta_m$  от безразмерных параметров нагрузки  $\beta$  и температуры стенки  $V_0$  образуют поверхность стационарных температурных состояний, имеющую особенность типа „сборка“ [1]. Однако в рамках стационарного подхода дать оценку динамики возможных переходов между указанными состояниями затруднительно. Между тем знание временного поведения наиболее нагретой точки конденсаторов (обычно — в центре) важно для практических условий их использования в области больших электротепловых нагрузок.



**Рис. 1.** Стационарное температурное состояние центра диэлектрика  $\vartheta_m = f(\beta)$ . Стрелками обозначены динамические переходы при изменении параметра нагрузки  $\beta$ .

Для выяснения этого вопроса в соответствии с [1] рассмотрим (рис. 1) сечение поверхности стационарных состояний  $\vartheta_m(\beta, V_0)$  при  $V_0 = -5$ , приведенное для наглядности в координатах  $(\ln(\vartheta_m - V_0 + 1), \beta)$ . Безразмерные параметры  $\beta$  и  $V_0$  имеют следующие значения:

$$\beta = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon''_{\max} (E \cdot h)^2}{\lambda} \frac{\beta_d \cdot W}{k T_g^2}, \quad (1)$$

$$V_0 = \frac{T_0 - T_g}{k T_g^2} \cdot \beta_d \cdot W, \quad (2)$$

где  $\omega, E$  — соответственно частота и напряженность приложенного поля,  $h$  — полутолщина конденсатора,  $\varepsilon''_{\max}$  — максимальное значение фактора потерь при температуре  $T_g$ ,  $\beta_d$  и  $W$  — параметр распределения времен релаксации и энергия активации,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности диэлектрика,  $T_0$  — температура стенки конденсатора.

Неоднозначность зависимости  $\vartheta_m(\beta)$  определяется величиной температуры стенки  $V_0$ . При  $V_0 \geq 0$  неоднозначность исчезает [1]. Ветвь 1–2 зависимости  $\vartheta_m(\beta)$  является неустойчивой, а ветви 2–3 и 0–1 — устойчивыми, что можно показать, исследуя соответствующие линеаризованные решения уравнения теплопроводности. Указанные обстоятельства действительно соответствуют экспериментальным фактам.

Если конденсатор находился до включения нагрузки  $\beta$  при безразмерной температуре окружающей среды (стенки)  $V_0 = -5$ , то при включении номинальной нагрузки  $\beta_n$  температура вырастает до значения  $\vartheta_n^{(0)}$ . Далее, приложив нагрузку  $\beta_1^* > \beta_1$ , система перейдет в верхнее температурное устойчивое состояние  $\vartheta_1^*$ . Переход на верхнюю ветвь из точки  $(\beta_n, \vartheta_n^{(0)})$  также может быть осуществлен благодаря температурному возмущению в центре конденсатора в течение достаточно длительного периода, при этом амплитуда возмущения должна быть  $\Delta\vartheta > \vartheta_n^{(1)} - \vartheta_n^{(0)}$ . Обратные переходы  $\vartheta_n^{(1)} \rightarrow \vartheta_n^{(0)}$  и  $(\beta_1^*, \vartheta_1^*) \rightarrow (\beta_2^*, \vartheta_2^*)$  осуществляется соответственно при  $\Delta\vartheta < -(\vartheta_n^{(1)} - \vartheta_n^{(0)})$  или  $\beta_2^* < \beta_2$ .

Оценку характерных времен указанных переходов проведем на основе следующих соображений. Исходная модель сводится к краевой задаче 1 рода с источником тепловыделения  $q(u)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \cdot q(u) = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ u|_{\pm 1} = V_0, \\ u(0, x) = V_0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $q(u) = e^{-|u|}(2 - e^{-|u|})$ ,  $\tau = \lambda/\rho C_p \cdot t$  — безразмерное время,  $\rho$ ,  $C_p$  — соответственно плотность и теплоемкость диэлектрика.

Пусть  $u_0$  и  $\lambda_0$  — первая функция и первое собственное число стационарной краевой задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей (3). Введем интегральное преобразование осреднения по пространству  $\Omega$  (толщине) диэлектрика [2]:

$$\bar{U}(\tau) = L(u) = \frac{1}{mes\Omega} \int_{mes\Omega} V_0(x) \cdot u(x, t) dx, \quad (4)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in C_{t,x}^{1,2}$ .

Задача (3) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка относительно некоторой средней температуры  $\bar{U}$ :

$$\frac{d\bar{U}(\tau)}{d\tau} = \beta \overline{q(U(\tau))} - \lambda_0 \cdot (\bar{U}(\tau) - V_0), \quad (5)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями:

$$\bar{U}(t)|_{\pm 1} = V_0, \quad \bar{U}_0(0) = \overline{U_0(x)}. \quad (6)$$

Можно показать, что соотношение  $\overline{q(U)} = q(\bar{U})$  точно выполняется для линейных источников  $q(u)$ . Чем существеннее нелинейность источника, тем больше погрешность решения (5), использующего равенство  $\overline{q(U)} = q(\bar{U})$ . Для минимизации указанной погрешности можно рассмотреть стационарную задачу для амплитуды профиля температуры  $U_m$ . В этом случае параметр нагрузки  $\beta = \beta(U_m)$ :

$$\beta(U_m) = \frac{1}{2} \left[ \int_{V_0}^{U_m} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\int_{\vartheta}^{U_m} q(y) dy}} \right]^2. \quad (7)$$

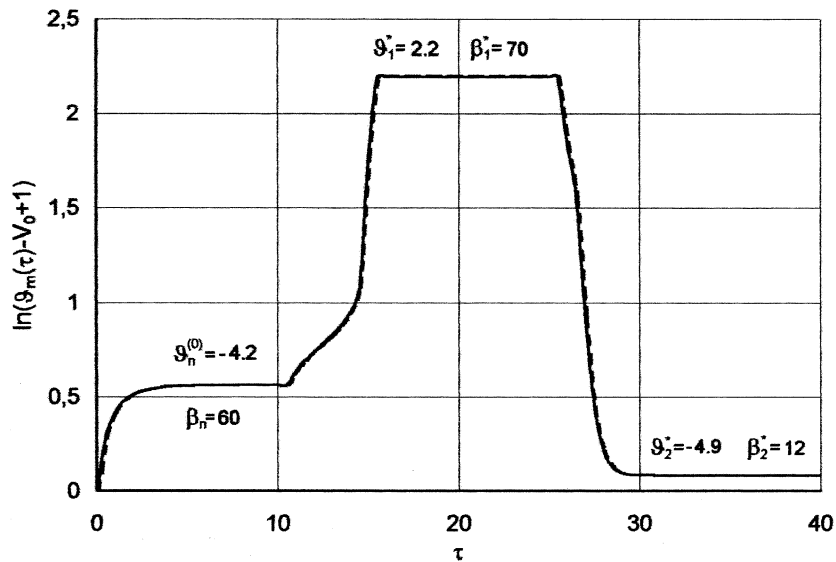
Используя приведенные выше соображения определим  $\overline{q(U_m)} = \lambda_0(U_m - V_0)/\beta(U_m)$ . Тогда динамику  $U_m(t)$  можно оценить из следующего интегрального соотношения:

$$\tau \approx \int_{\bar{U}_0}^{U_m(\tau)} \frac{dU_m}{\left[ \frac{\beta}{\beta(U_m)} - 1 \right] (U_m - V_0) \cdot \lambda_0}. \quad (8)$$

Таким образом, нелинейная нестационарная задача для  $u(x, \tau)$  свелась к задаче  $U_m(\tau)$  в виде (8).

Приведем некоторые результаты решения (8) для оценки времени переходов, обсуждавшихся на рис. 1.

Например, для переходов вдоль ветви 0–1 оценка следующая.



**Рис. 2.** Динамика температурных переходов. Устанавливающиеся стационарные состояния имеют соответствующие значения  $\vartheta$  и  $\beta$ .

Разлагая в ряд ( $\vartheta_m$ ) до величин второго порядка имеем оценку для  $\tau$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(\vartheta_m) = \tau_1(\vartheta_m) + \tau_2(\vartheta_m) \\ \tau_1(\vartheta_m) = \frac{1}{\lambda_0} \ln \frac{\vartheta_n^{(0)} - V_0}{\vartheta_n^{(0)} - \vartheta_m(\tau)} \\ \tau_2(\vartheta_m) = \frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{\vartheta_n^{(0)} - V_0}{(\vartheta_1 - \vartheta_n^{(0)})} \\ \quad \times \ln \left[ \frac{(\vartheta_n^{(0)} - V_0)}{\vartheta_n^{(0)} - \vartheta_m(\tau)} \cdot \frac{2(\vartheta_1 - \vartheta_n^{(0)}) + (\vartheta_n^{(0)} - \vartheta_m(\tau))}{2(\vartheta_1 - \vartheta_n^{(0)}) + (\vartheta_n^{(0)} - V_0)} \right] \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Видно, что характерное время перехода зависит нелинейно от двух параметров надкритичности:  $(\vartheta_n^{(0)} - V_0)$  и  $(\vartheta_1 - \vartheta_n^{(0)})$ . Полагая, что

процесс перехода заканчивается практически при  $\vartheta^*$  такой, что

$$\gamma \approx \frac{\vartheta_{st} - \vartheta^*}{\vartheta_{st} - V_0} = 0.01, \quad (10)$$

где  $\vartheta_{st}$  — установившееся стационарное значение температуры, имеем для предельного перехода  $0 \rightarrow 1$   $\beta = \beta_1$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_N^{(0)}$ . Раскрывая неопределенность в (9), получаем

$$\tau_{0 \rightarrow 1} \approx \frac{1}{\lambda_0} \left[ \ln \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \right], \quad \gamma \ll 1. \quad (11)$$

Переходы остального типа оцениваются аналогично описанному подходу.

На рис. 2 приведены графики решений  $\vartheta_m(\tau)$  переходов в соответствии с предложенной методикой осреднения для  $u(x, \tau)$  (4)–(8). Здесь же приведены данные численного решения нелинейного уравнения теплопроводности (3), выполненного на ЭВМ по неявной разностной схеме [3].

Из графиков рис. 2 видно хорошее соответствие решений, полученных по предложенному методу осреднения нелинейной задачи для максимальной температуры (в центре конденсатора) и данных численного эксперимента.

В заключение следует отметить, что предложенная методика оценки динамики температуры применима к конденсаторам прямоугольной и цилиндрической форм.

## Список литературы

- [1] Емельянов О.А. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 16. С. 32–39.
- [2] Вольперт А.И., Худяев С.И. // Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 394 с.
- [3] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов В.А., Михайлов А.П. // Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.