

01

Метод построения явных решений интегральных уравнений с разностным ядром на конечном отрезке

© А.М. Радин

E-mail: amradin@mail.ru

Поступило в Редакцию 22 апреля 2002 г.

Предлагается метод построения в явном виде решений интегральных уравнений с разностным ядром на конечном отрезке. Рассмотрены уравнения с ядрами достаточно общего вида. Метод открывает перспективное направление по изучению и практическому применению решений данного класса уравнений.

Уравнением с разностным ядром на конечном отрезке называют уравнение вида:

$$\int_a^b K(x-t)g(t)dt = \lambda g(x) + f(x), \quad x \in [a, b],$$

где $K(x) \in L_1(a, b)$. Ряд уравнений физики и техники приводит к интегральным уравнениям с разностным ядром: задачи оптимального синтеза, рассеяние света в атмосфере, дифракция на ленте, цилиндре со щелью и сфере с отверстиями [1], движение крыла под водой. Эти же уравнения возникают и в важных математических вопросах: теория обратных задач, приведение к простейшему виду вольтерровских операторов, факторизация операторов. Таким образом, уравнения с разностным ядром имеют достаточно широкое применение. Подробная библиография по этим вопросам содержится, например, в обзоре [2] и в монографии [3].

В данной статье рассматривается уравнение первого рода:

$$\int_a^b K(x-t)g(t)dt = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

Наиболее полные к настоящему времени результаты относительно уравнения (1) содержатся в работах М.Г. Крейна [3]. По М.Г. Крейну для $g(t)$ из (1) с произвольной правой частью $f(x)$ можно записать явную формулу, если известно решение этого уравнения для $f(x) = 1$. Однако вопрос построения явного решения уравнения (1) для $f(x) = 1$ до настоящего времени остается открытым. Данная работа в известной степени восполняет этот пробел. Здесь развит метод построения явных решений уравнения (1) в ситуации достаточно общего положения. При этом нет необходимости полагать $f(x) = 1$. Для сокращения письма линейной заменой переменных приведем уравнение (1) к виду

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K(x-t)g(t)dt = f(x), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (2)$$

Допустим, что $K(z)$ представима на $[-\pi, \pi]$ своим рядом Фурье:

$$K(z) = \frac{1}{2} \pi \sum_n k_{n-\frac{1}{2}} \exp\left[i\left(n - \frac{1}{2}\right)z\right], \quad z \in [-\pi, \pi], \quad (3)$$

$$k_{n-\frac{1}{2}} = \int_{-\pi}^{\pi} K(z) \exp\left[-i\left(n - \frac{1}{2}\right)z\right] dz, \quad (4)$$

где $k_{n-\frac{1}{2}}$ при больших n имеют оценку

$$k_{n-\frac{1}{2}} = O\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^{-m-\alpha}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad m + \alpha \neq 0. \quad (5)$$

Подставим (3) в (2) и проинтегрируем, что приводит к следующему виду рассматриваемого уравнения:

$$\sum_n k_{n-\frac{1}{2}} \exp\left[i\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(t) \exp\left[i\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right] dt = f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (6)$$

На основании оценки (5) уравнение (6) можно продифференцировать m раз ($m = 0, 1, 2, \dots$). В результате получим

$$\sum_n \left[i\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]^m k_{n-\frac{1}{2}} \exp\left[i\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right] g_n = \frac{1}{\pi} f^{(m)}(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (7)$$

где

$$g_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(t) \exp\left[-i\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right] dt \quad (8)$$

— неизвестные коэффициенты. Введя обозначение

$$\left[i\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]^m k_{n-\frac{1}{2}} = x_n, \quad x_n g_n = y_n, \quad (9)$$

перепишем (7) в виде

$$\sum_n y_n \exp\left[i\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right] = \frac{1}{\pi} f^{(m)}(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (10)$$

После введения переменной ξ :

$$\xi = \exp(ix), \quad (11)$$

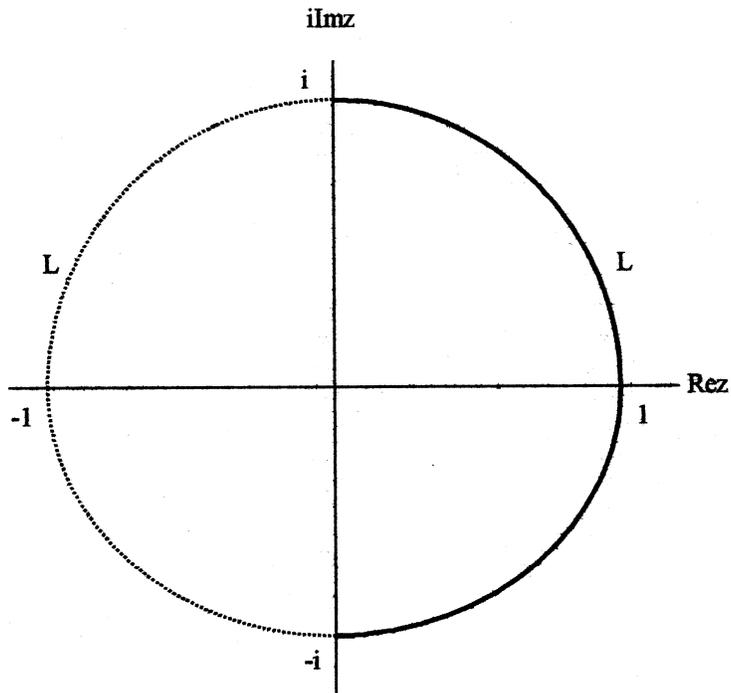
уравнение (10) принимает вид:

$$\sum_n y_n \xi^n = \frac{1}{\pi} f^{(m)}(\arg \xi) \exp\left(\frac{i}{2} \arg \xi\right) = F(\xi), \quad \xi \in L, \quad (12)$$

где L — правая дуга полуокружности единичного круга (см. рисунок). Уравнение (12) для неизвестных коэффициентов y_n легко сводится к классической задаче Римана [4] на дуге L путем представления ряда (12) в виде суммы двух функций $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$, которые являются предельными значениями некоторой аналитической функции $\Phi(z)$ изнутри и извне единичного круга соответственно:

$$\Phi^+(\xi) + \Phi^-(\xi) = F(\xi), \quad \xi \in L. \quad (13)$$

Выбор функций $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$ однозначно определяет поведение решения $\Phi(z)$ задачи Римана (13) на бесконечности. От этого выбора и от заданного характера убывания коэффициентов Фурье (5) ядра исходного уравнения (1) зависят как существование решения $g(t)$ этого уравнения, так и поведение его в окрестности концов ($t = \pm\pi/2$) интервала интегрирования. Обычно все эти условия определяются той физической или математической задачей, которая приводится к



уравнению (1), и, как правило, хорошо известны. Например, для решений $\Phi(z)$, ограниченных на бесконечности, функции $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$ нужно выбрать в виде:

$$\Phi^+(\xi) = \sum_{n \geq 1} y_n \xi^n, \quad \Phi^-(\xi) = \sum_{n < 1} y_n \xi^n, \quad \xi \in L, \quad (14)$$

а для решений, обращающихся на бесконечности в нуль, в виде

$$\Phi^+(\xi) = \sum_{n \geq 0} y_n \xi^n, \quad \Phi^-(\xi) = \sum_{n < 0} y_n \xi^n, \quad \xi \in L. \quad (15)$$

Следует отметить, что возможен выбор и других условий, когда, например, $\Phi(z)$ имеет полюса как в единичном круге, так и на бесконечности. Можно, конечно, поступить и наоборот: задать поведение

$g(t)$ в окрестности концов интервала и изучать решения уравнения (2) путем выбора $\Phi(z)$ с подходящим поведением на бесконечности в задаче Римана (13). Так как эта задача хорошо изучена [4–6], то выбор нужного варианта для представления ряда (12) в виде суммы функций $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$ для задачи Римана (13) вполне возможен.

Найдем, например, решения уравнения (2), когда для функций $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$ имеет место представление (15). Это соответствует решению задачи Римана (13), которое обращается в нуль на бесконечности. Согласно [4–6], это решение имеет вид:

$$\Phi(z) = \Phi_0^{(s)}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\xi)}{\Phi_0^{(s)}(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z} + C\delta_s^1 \right], \quad (16)$$

где C — произвольная константа, δ_s^1 — символ Кронекера, $\Phi_0^{(s)}(z)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) — решения соответствующих однородных задач Римана:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}, & \Phi_0^{(2)}(z) &= \sqrt{z^2 + 1}, \\ \Phi_0^{(3)}(z) &= \sqrt{\frac{z+i}{z-i}}, & \Phi_0^{(4)}(z) &= \sqrt{\frac{z-i}{z+i}}. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае $s = 2$ $F(\xi)$ должна удовлетворять условию

$$\int_L \frac{F(\xi)}{\sqrt{z^2 + 1}} d\xi = 0. \quad (18)$$

Во всех формулах ветвь квадратного корня фиксирована положительным значением на бесконечности.

После применения формул Сохоцкого [4–6] представление $\Phi(z)$ (16) позволяет восстановить значение ряда (12) на всей окружности $L + \bar{L}$ (см. рисунок) для всех рассматриваемых случаев ($s = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} \sum_n y_n^{(s)} \xi^n &= F(\xi), & \xi &\in L, \\ \sum_n y_n^{(s)} \xi^n &= \Phi_0^{(s)}(\xi) \left[\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{F(\tau)}{\Phi_0^{(s)}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + C\delta_s^1 \right], & \xi &\in \bar{L} \quad (s = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) находим коэффициенты $y_n^{(s)}$. Затем, используя (9), получаем коэффициенты Фурье $g_n^{(s)}$ функции $g(t)$, которая является решением исходного уравнения (2). В рассматриваемом случае имеем четыре набора коэффициентов для $g_n^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, 4$):

$$g_n^{(s)} = \frac{1}{2\pi [i(n - \frac{1}{2})]^m k_{n-\frac{1}{2}}} \left[\int_L F(\xi) \xi^{-n-1} d\xi + \frac{1}{\pi i} \int_L \Phi_0^{(s)}(\xi) \xi^{-n-1} d\xi \left(\int_L \frac{F(\tau)}{\Phi_0^{(s)}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + C\delta_s^1 \right) \right] \quad (s = 1, 2, 3, 4). \quad (20)$$

Следует отметить, что если некоторые коэффициенты Фурье $k_{n-\frac{1}{2}}$ ядра исходного уравнения обращаются в нуль, то это легко может быть учтено при постановке задачи Римана (13) и они в формуле (20) присутствовать не будут. Решения исходного уравнения (2) на основании представления (8) можно записать в виде одной из следующих формул:

$$g^{(s)}(t) = \sum_n g_{2n}^{(s)} \exp \left[i \left(2n - \frac{1}{2} \right) t \right] = \sum_n g_{2n+1}^{(s)} \exp \left[i \left(2n - \frac{1}{2} \right) t \right] \\ = \frac{1}{2} \sum_n g_n^{(s)} \exp \left[i \left(n - \frac{1}{2} \right) t \right], \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (s = 1, 2, 3, 4), \quad (21)$$

где коэффициенты $g_n^{(s)}$ определены выражением (20).

Оценим сходимость рядов (21). Как известно [4], особый интеграл по дуге L , входящий в формулу (20), имеет конечное значение в окрестности концов дуги L . Поэтому сходимость рядов (21) определяется характером поведения функций (17) из однородной задачи Римана в окрестности концов дуги L и показателем α из оценки (5) убывания коэффициентов Фурье ядра исходного уравнения (2). В результате получаем оценку, которая для случаев ($s = 1, 3, 4$) имеет вид:

$$g_n^{(s)} = O(n^{\alpha-\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \quad (s = 1, 3, 4). \quad (22)$$

Если же $s = 2$, то

$$g_n^{(2)} = O(n^{\alpha-\frac{3}{2}}), \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (23)$$

Таким образом, при $s = 1$ уравнение (2) имеет единственное интегрируемое решение $g(t)$, не ограниченное в окрестности концов интервала $t = \pm\pi/2$ в случае, если показатель α удовлетворяет условию (22). При $s = 2$ решение ограничено в окрестности концов интервала, если $0 \leq \alpha < 1/2$, и не ограничено, если $1/2 < \alpha < 1$. При $s = 2$ правая часть должна удовлетворять еще и условию разрешимости (18). В случаях ($s = 3, 4$) решение ограничено в окрестности одного конца и не ограничено в окрестности другого. Показатель α при этом должен удовлетворять такому же условию, как и в (22).

В заключение отметим, что предлагаемый метод позволяет строить явные решения интегральных уравнений с произвольными ядрами на конечном интервале, имеющими представление (3)–(5). Известные к настоящему времени результаты (основные из них приведены в [2–4]) являются частными случаями данного метода. Рассмотрим пример

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| g(t) dt = -1, \quad |x| \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (24)$$

Согласно [3], это уравнение имеет явное решение $g(t) = \text{const}/\sqrt{\cos(t)}$, что проверяется непосредственно. Решим это уравнение предлагаемым методом. Вычисляем коэффициенты Фурье ядра уравнения (24) согласно (4). Получающийся интеграл берется в явном виде. В результате получаем коэффициенты Фурье ядра уравнения (24)

$$k_{n-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| \exp \left[i \left(n - \frac{1}{2} \right) t \right] dt = \frac{(-1)^n 2 \ln 2}{\pi(2n-1)},$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25)$$

Таким образом, имеем $m = 1$, $\alpha = 0$, $f(x) = 1$, $F(x) = 0$. Ищем решение, не ограниченное в окрестности концов интервала $t = \pm\pi/2$. Это случай $s = 1$. Подставляя коэффициенты Фурье ядра из (25) в (20) и в (21), получаем точно такой же результат $g(t) = \text{const}/\sqrt{\cos(t)}$.

Автор выражает благодарность В.М. Бабичу, А.Б. Плаченову и другим сотрудникам дифракционного семинара ПОМИРАН им. В.А. Стеклова за обсуждение результатов.

Работа поддержана грантом ЕОО–3.2–164 Минобразования России.

Список литературы

- [1] *Радин А.М., Шестопалов В.П.* // ДАН СССР. 1973. Т. 212. № 4. С. 838–841.
- [2] *Сахнович Л.А.* // УФН. 1980. Т. 35. В. 4(214). С. 69–129.
- [3] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
- [4] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1963. 639 с.
- [5] *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнение типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
- [6] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.