01

Взаимодействие простой волны Прандтля–Майера со слабо завихренным слоем

© А.В. Омельченко

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: vmu@peterlink.ru

В окончательной редакции 23 мая 2002 г.

Решается задача взаимодействия центрированной волны разрежения со сдвиговым слоем для случая, когда завихренность потока в сдвиговом слое мала. Решение ищется в виде асимптотического ряда по малому параметру задачи. Система, получаемая в нулевом приближении, описывает течение в простой волне. С использованием метода деформированных координат строится равномерно пригодное разложение первого порядка.

В рамках модели идеального совершенного газа рассматривается взаимодействие изэнтропической центрированной волны разрежения *1* с вихревым (сдвиговым) слоем *2* конечной толщины (рис. 1). Область взаимодействия ограничена слева слабым разрывом $A_1A_2A_3$, являющимся продолжением слабого разрыва OA_1, разделяющего равномерное течение и волну Прандтля–Майера, снизу — исходящим из точки A_1 пересечения слабых разрывов OA_1 и QA_1 слабым разрывом $A_1F_1C_1$. Числа Маха M_1 и M_2 в областях под и над сдвиговым слоем, распределение числа Маха $M(y)$ поперек этого слоя, а также угол φ_2 наклона, замыкающего простую волну слабого разрыва OB_1, считаются заданными.

Взаимодействие простой волны со сдвиговым слоем встречается при описании сверхзвуковых струйных течений [2], взаимодействия скачков уплотнения с простыми волнами [3], а также в задачах внешней аэродинамики [4,5]. Малость завихренности сдвигового слоя в этих задачах часто дает основание ею пренебречь и считать течение потенциальным. Однако данное предположение приводит к физически некорректным следствиям (см., например, [4]) и не позволяет адекватно описать картину течения [2]. Основная цель представленной работы состоит

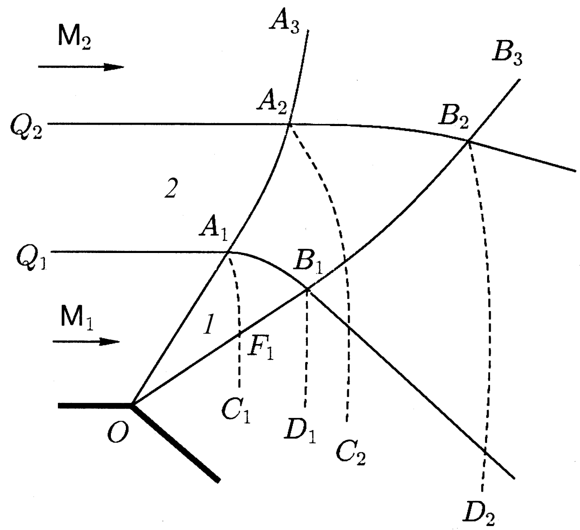

Рис. 1. Схема взаимодействия центрированной волны разрежения со сдвиговым слоем.

в получении аналитического решения, учитывающего завихренность потока, на основе асимптотического разложения газодинамических функций по малому параметру $\delta = \max\limits_{y} |M(y) - M_1|/M_1$, характеризующему величину завихренности потока в сдвиговом слое *2*.

Течение в области взаимодействия описывается системой уравнений Эйлера. Удобно от этой системы перейти к продолженной системе [1], которая для случая плоского сверхзвукового потока имеет следующий вид:

$$\frac{\partial P_{1,2}}{\partial x} + \mathrm{tg}(\vartheta \pm \alpha)\frac{\partial P_{1,2}}{\partial y} = \pm\frac{\psi}{\cos^2(\vartheta \pm \alpha)}$$

$$\times \left[-M^2 P_{1,2}^2 - (2\mu - M^2)P_1 P_2 + 2\mu P_{1,2} P_3\right]$$

$$\pm Z\left[\frac{-2P_1 P_2 \cos\alpha}{\cos(\vartheta - \alpha)\cos(\vartheta + \alpha)} + \frac{P_1 P_3}{\cos(\vartheta + \alpha)\cos\vartheta} + \frac{P_2 P_3}{\cos(\vartheta - \alpha)\cos\vartheta}\right],$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial x} + \operatorname{tg}\vartheta\,\frac{\partial P_3}{\partial y} = \frac{P_3}{2\Gamma(M)\cos^2\vartheta}\,(P_2 - P_1),$$

$$\Gamma(M) = \frac{\gamma M^2}{A}, \qquad A = \sqrt{M^2 - 1}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{P_2\operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) - P_1\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)}{2\Gamma(M)},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \nu\left[-P_3\operatorname{tg}\vartheta + \frac{P_2\operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) - P_1\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)}{2}\right],$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{P_1 - P_2}{2\Gamma(M)}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \nu\left[P_3 - \frac{P_1 + P_2}{2}\right], \quad \nu = \frac{\mu}{(1+\varepsilon)M}.$$

Здесь ϑ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс, $\alpha = \operatorname{arscin}(1/M)$, γ — показатель адиабаты,

$$Z = \frac{(M^2 - 2)}{2(M^2 - 1)}\,\frac{\mu}{(1+\varepsilon)M^3}, \qquad \psi = \frac{1}{2(1+\varepsilon)M^2\sqrt{M^2 - 1}},$$

$$\mu = 1 + \varepsilon(M^2 - 1), \qquad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Входящие в (1) функции

$$P_{1,2} = \frac{\partial\ln p}{\partial y} \pm \Gamma(M)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}, \qquad P_3 = \frac{\partial\ln p}{\partial y} + \frac{(1+\varepsilon)M^2}{\mu}\,\frac{\partial\ln M}{\partial y}$$

характеризуют интенсивность малых возмущений, распространяющихся вдоль характеристик первого (P_1) и второго (P_2) семейств, а также вдоль линий тока (P_3). Так, в простой волне Прандтля–Майера $P_2 = P_3 = 0$, а

$$P_1 = \frac{2(1+\varepsilon)\sqrt{M^2 - 1}\cos^2(\vartheta + \alpha)}{x - c}. \tag{2}$$

Константа c меняется при переходе от одной характеристики первого семейства к другой. В центрированной волне эта величина постоянна во всей волне и равна абсциссе x_0 центра (x_0, y_0) волны. Для волны *1* на рис. 1 $x_0 = y_0 = 0$. В параллельном оси абсцисс сдвиговом слое *2* функции $P_1 = P_2 = 0$, а P_3 пропорциональна величине завихренности:

$$P_3(y) = \frac{-1}{(\gamma - 1)} \frac{dS(y)}{dy} = \frac{(1+\varepsilon)M(y)}{\mu(y)} \frac{dM(y)}{dy}. \tag{3}$$

Здесь $M(y)$ и $S(y)$ — распределение числа Маха и энтропии в сдвиговом слое.

Будем искать решение в области взаимодействия в виде

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k f^{(k)}, \quad \delta \to 0, \quad f \in \{A, \vartheta, P_1, P_2, P_3\}. \tag{4}$$

В нулевом приближении система (1) описывает течение в центрированной волне Прандтля–Майера, в которой $P_2^{(0)} = P_3^{(0)} = 0$, функция $P_1^{(0)}$ определяется по формуле (2), а $\nu^{(0)}$ и $A^{(0)}$ связаны с числом Маха M_1 в равномерном потоке до волны *1* и полярным углом φ соотношениями

$$\vartheta^{(0)} + \omega(M^{(0)}) = \omega(M_1), \qquad A^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{tg}\big(\sqrt{\varepsilon}\,[g(M_1) - \varphi]\big).$$

Перейдем в системе (1) к полярной системе координат, подставим в (1) ряды (4) и приравняем члены с одинаковыми степенями δ. В результате для функций $f^{(1)}$ получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial \varphi} - r \operatorname{ctg}(\varphi - \vartheta^{(0)}) \frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial r} = \alpha_3(\varphi) P_3^{(1)}, \\
\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \varphi} - r \operatorname{ctg}\big(\varphi + \alpha^{(0)} - \vartheta^{(0)}\big) \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} = \alpha_{22}(\varphi) P_2^{(1)} + \alpha_{23}(\varphi) P_3^{(1)}, \\
\frac{D^{(1)}}{r} \frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial r} = \alpha_{\vartheta 2}(\varphi) P_2^{(1)}, \quad D^{(1)} = \vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2}, \\
\frac{D^{(1)}}{r} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial r} = \alpha_{A2}(\varphi) P_2^{(1)} + \alpha_{A3}(\varphi) P_3^{(1)}, \\
\frac{D^{(1)}}{r} \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} = \alpha_{11}(\varphi) + \alpha_{12}(\varphi) P_2^{(1)} \\
+ \alpha_{13}(\varphi) P_3^{(1)} + \alpha_{1\vartheta}(\varphi) \vartheta^{(1)} + \alpha_{1A}(\varphi) A^{(1)}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Как и исходная система (1), система (5) записана в инвариантах [1]. Кроме того, матрица правой части (5) является треугольной. Отмеченные обстоятельства позволяют получить аналитическое решение системы (5), последовательно, одно за другим решая входящие в нее линейные неоднородные уравнения в частных производных первого порядка относительно функций $P_3^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, $\vartheta^{(1)}$, $A^{(1)}$ и $P_1^{(1)}$.

Следует отметить, что область взаимодействия неограниченна по r. Последнее обстоятельство является причиной неравномерности полученного асимптотического разложения. Действительно, в результате интегрирования последних трех уравнений системы (5) вдоль характеристик первого семейства в выражениях для $\vartheta^{(1)}$, $A^{(1)}$ и $P_1^{(1)}$ появляются секулярные члены вида $r\alpha(\varphi)$. Последнее делает разложение непригодным на больших расстояниях от стенки.

Для получения равномерно пригодного первого приближения воспользуемся методом деформируемых координат [6,7]. Перейдем от (r, φ) к деформированным переменным (s, t) по формулам

$$\varphi = s + \delta\varphi_2(s, t) + \ldots, \qquad r = t.$$

В результате такого перехода уравнение для $\vartheta^{(1)}$ запишется так:

$$\frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\frac{\partial\vartheta^{(0)}}{\partial s} - \frac{1}{t}\frac{\partial\vartheta^{(0)}}{\partial s}\left(\varphi_2 - \vartheta^{(1)} + \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2}\right) = \alpha_{\vartheta 2}(\varphi)P_2^{(1)}.$$

Выбирая φ_2 из условия

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{t}\left(\varphi_2 - \vartheta^{(1)} + \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2}\right) = 0, \tag{6}$$

получаем, что

$$\frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vartheta^{(1)} = \vartheta^{(1)}(s).$$

При этом функция $\vartheta^{(0)} + \delta\vartheta^{(1)}$ останется постоянной в области над вихревым слоем. Равенство (6) можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\varphi_2) = \vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \Longrightarrow \varphi_2(s, t) = \frac{1}{t}\tilde{\varphi}(s) + \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2}\right]dt.$$

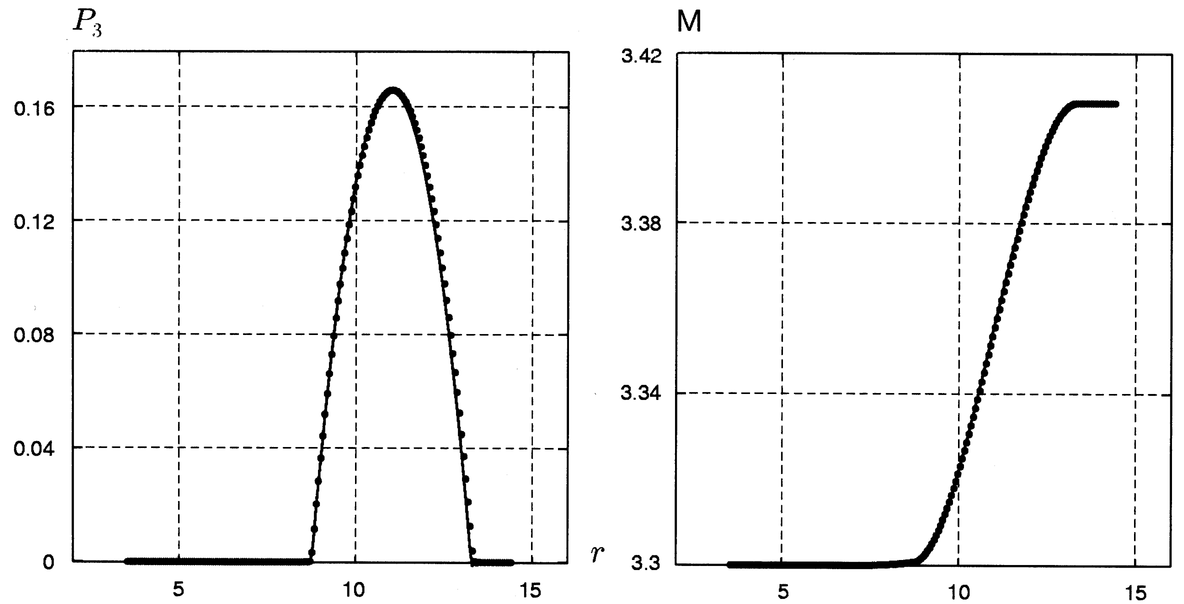

Рис. 2. Сравнение аналитических и численных результатов.

При $t = t_0$ имеем течение в простой волне, в которой $\varphi = s$. Поэтому в последнем равенстве произвольную функцию $\tilde{\varphi}(s)$ следует взять тождественно равной нулю. При таком выборе $\tilde{\varphi}(s)$ параметрическая переменная s определяется следующим неявным соотношением:

$$\varphi = s + \frac{\delta}{t} \int_{t_0}^{t} \left[\vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \right] dt + O(\delta^2). \tag{7}$$

На рис. 2 представлены результаты расчетов распределения завихренности P_3 и числа Маха M на замыкающей характеристике OB_3 волны, полученные для случая $M_1 = 3$, $M_2 = 3.1$, $M_{w1} = 3.3$, а также распределения по кубической параболе профиля скорости в вихревом слое. При таких начальных условиях параметр $\delta = 0.033$. Сплошным кривым на рис. 2 отвечают данные, полученные с использованием асимптотического разложения, а кривым, построенным точками, — значения, рассчитанные с помощью метода характеристик. Как видно из рисунка, уже первое приближение дает неплохое совпадение с точным расчетом — максимальная относительная погрешность в определении числа Маха составляет величину порядка 10^{-4}. Интересно, что увеличение завихренности не приводит к катастрофическому росту погрешности. Так, при числе Маха $M_2 = 4$ параметр δ оказывается равным 0.33, а максимальная относительная погрешность в определении M составляет величину порядка 10^{-2}.

Заключение. В работе показано, что рассматриваемая задача относится к классу сингулярно возмущенных задач вихревой газовой динамики. С использованием метода деформируемых координат получено равномерно пригодное первое приближение.

Автор благодарен Э.А. Троппу за критические замечания, инициировавшие данное исследование, а также В.Р. Мешкову за помощь в проведении численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект N 99–785) и РФФИ (проект N 00–15–96106).

Список литературы

[1] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
[2] *Медведев А.Е., Фомин В.М.* // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 3. С. 52–58.
[3] *Li H., Ben-Dor G.* // AIAA Journal. 1996. V. 34. N 2. P. 418–421.
[4] *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Иностранная лит-ра, 1962.
[5] *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
[6] *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
[7] *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механизме жидкости. М.: Мир, 1967.