01;03

Об условиях реализации внутреннего нелинейного резонанса при осцилляциях заряженной капли

© С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 24 мая 2002 г.

Для нелинейно осциллирующей заряженной капли, когда начальная деформация ее равновесной сферической формы определена суперпозицией нескольких мод, получено условие, накладываемое на частоты мод, при выполнении которого между модами имеет место резонансное взаимодействие. Показано, что при заряде капли, докритическом для реализации ее неустойчивости по отношению к собственному заряду, может иметь место не одна резонансная ситуация, как было известно ранее, но весьма значительное их количество.

1. Изучение нелинейного взаимодействия мод в заряженной капле представляет интерес в связи с многочисленными академическими и практическими приложениями этого объекта. При исследовании нелинейных капиллярных колебаний заряженной капли при начальном возмущении одной моды [1] выяснилось, что во втором порядке малости по амплитуде начального возмущения, когда заряд капли меньше критического в смысле устойчивости ее поверхности, имеет место внутренний нелинейный резонанс между четвертой и шестой модами, если их частоты удовлетворяют соотношению: $\omega_6^2 = 4 \cdot \omega_4^2$. Других резонансных ситуаций при докритическом заряде в [1] обнаружено не было. В [2] рассматривалась более общая задача, когда в начальный момент времени возмущение поверхности капли определялось возбуждением сразу двух мод, и было указано на асимметрию обнаруженного в [1] резонанса: резонансная раскачка четвертой моды имеет место только при начальном возбуждении одновременно четвертой и шестой мод, тогда как резонансное возбуждение шестой моды происходит при начальном возбуждении одной четвертой моды. В ситуации, когда начальная деформация равновесной формы определяется не одной

модой, но суперпозицией нескольких мод, полученное в [1] соотношение между частотами должно быть заменено на более общее, учитывающее тройные взаимодействия мод, что может привести к обнаружению других резонансных ситуаций при докритическом заряде капли. Следует отметить, что наличие резонансного обмена энергией между модами может привести к снижению критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду по сравнению с предсказаниями линейной теории. В этой связи обнаружение и исследование возможных резонансных взаимодействий мод представляется актуальным.

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения σ. Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен Q, а объем определяется объемом сферы с радиусом R. В начальный момент времени $t = 0$ сферическая форма капли претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды. Зададимся целью найти спектр возникающих капиллярных осцилляций капли (форму капли) в последующие моменты времени $t > 0$.

Пусть уравнение, описывающее поверхность капли, в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, имеет вид: $r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t)$, $|\xi| \ll 1$.

Математическая формулировка задачи выглядит следующим образом:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \qquad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$r \to 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \to 0; \qquad r \to \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \to 0;$$

$$r = 1 + \xi(\theta, t): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta};$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 = \operatorname{div}\mathbf{n}; \qquad \Phi(\mathbf{r}, \theta, t) = \Phi_s(t).$$

Учтем также условия сохранения полного заряда, объема капли и неподвижности ее центра масс:

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S(\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi)ds = Q, \quad S = [r = 1+\xi(\theta,t),\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi]$$

$$\int_V r^2dr\sin\theta d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi,\ V = [0 \leqslant r \leqslant 1+\xi(\theta,t), 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi]$$

$$\int_V \mathbf{e}_r\cdot r^3dr\cdot\sin\theta d\theta d\phi = 0.$$

Начальные условия задаются в виде деформации равновесной сферической формы капли и равенства нулю скорости движения поверхности

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = \xi_0P_0(\mu)+\xi_1P_1(\mu)+\varepsilon\sum_{1\in\Xi}h_iP_i(\mu);$$

$$\sum_{i\in\Xi}h_i = 1; \qquad \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t} = 0;$$

Ξ — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод; $\mu \equiv \cos\theta$; Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности капли; $\Phi(\mathbf{r},t)$ и $\psi(\mathbf{r},t)$ — потенциалы: электрический и поля скоростей; $\Phi_s(t)$ — постоянный вдоль поверхности капли электрический потенциал; ε — амплитуда начального возмущения; $P_i(\mu)$ — полиномы Лежандра порядка i; h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i-й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые из условий неизменности объема и неподвижности центра масс капли.

3. Решая задачу методом многих масштабов, получим выражение, описывающее изменение во времени формы поверхности капли:

$$r(\theta,t)\ 1+\varepsilon\left\{\sum_{i\in\Xi}M_i^{(1)}(t)\cdot P_i(\mu)\right\}+\varepsilon^2\left\{\sum_{n=0}^{\infty}M_n^{(2)}(t)\cdot P_n(\mu)\right\}+\mathrm{O}(\varepsilon^3); \quad (1)$$

$$M_i^{(1)}(t) = h_i \cos(\omega_i t); \quad M_0^{(2)})(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i\in\Xi}\frac{h_i}{(2i+1)}\big(1+\cos(2\omega_i t)\big);$$

$$M_1^{(2)}(t) = -\sum_{i\in\Xi}\frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)}\cos(\omega_i t)\cdot\cos(\omega_{i-1}t);$$

$$M_n^{(2)}(t) = \big[N_n(t) - N_n(0)\cdot\cos(\omega_n t)\big]; \qquad n \geqslant 2;$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{i\in\Xi}\sum_{j\in\Xi}h_i h_j\Big\{\lambda_{ijn}^{(+)}\cos\big((\omega_i+\omega_j)t\big) + \lambda_{ijn}^{(-)}\cos\big((\omega_i-\omega_j)t\big)\Big\};$$

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)\big[(n+2)-W\big]; \qquad W = \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\lambda_{ijn}^{(\pm)} \equiv \big[\gamma_{ijn} \pm \omega_i\omega_j\eta_{ijn}\big]\big[\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2\big]^{-1};$$

$$\gamma_{ijn} \equiv K_{ijn}\Big[\omega_i^2\cdot(n-i+1) + 2n\big[j(j+1)-1\big]$$

$$+\big[j(i+1) - i(2i-2n+7)+3\big]\cdot n\frac{W}{2}\Big] + \alpha_{ijn}\Big[\frac{1}{i}\omega_i^2 + n\frac{W}{2}\Big];$$

$$\eta_{ijn} \equiv K_{ijn}\Big(\frac{n}{2} - i + 1\Big) + \alpha_{ijn}\cdot\frac{1}{i}\Big(1+\frac{n}{2j}\Big);$$

$$K_{ijn} \equiv \big[C_{i0j0}^{n0}\big]^2; \qquad \alpha_{ijn} \equiv -\sqrt{i(i+1)j(j+1)}\,C_{i0j0}^{n0}C_{i(-1)j1}^{n0};$$

$$C_{i0j0}^{n0} \equiv \begin{cases} 0, \ \text{если} \ \ i+j+n = 2g+1, \ \ \text{где} \ \ g \ - \ \text{целое число}; \\ \dfrac{(-1)^{g-n}\sqrt{2n+1}g!}{(g-i)!\,(g-j)!\,(g-n)!}\left[\dfrac{(2g-2i)!\,(2g-2j)!\,(2g-2n)!}{(2g+1)!}\right]^{1/2}; \\ \quad \text{если} \ \ i+j+n = 2g; \end{cases}$$

$$C_{i(-1)j1}^{n0} \equiv \sqrt{2n+1}\,n!\left[\frac{(i+j-n)!\,i(i+1)}{(n+i-j)!\,(n-i+j)!\,(i+j+n+1)!\,j(j+1)}\right]^{1/2}$$

$$\times\sum_z\frac{(-1)^{i+1+z}(i+z-1)!\,(n+j-z+1)!}{z!\,(i-z+1)!\,(n-z)!\,(j-n+z-1)!}.$$

В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям z, для которых выражения под знаком факториала неотрицательны.

Отметим, что C_{i0j0}^{n0} и $C_{i(-1)j1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [3], которые отличны от нуля только, если нижние индексы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$|i-j| \leqslant n \leqslant (i+j); \qquad i+j+n=2g. \tag{2}$$

Поэтому во втором порядке малости будут возбуждаться колебания мод, номера которых удовлетворяют (2).

Из выражений для коэффициентов $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$ видно, что при выполнении для частот мод с номерами i, j, n одного из соотношений:

$$\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2 = 0, \tag{3}$$

где

$$\omega_m^2 = m(m-1)\left[(m+2) - \frac{Q^2}{4\pi}\right],$$

выражение для амплитуды n-й моды $M_n^{(2)}(t)$ будет содержать малый знаменатель. Напомним, что i и j есть номера мод из спектра мод, формирующих начальное возмущение равновесной сферической формы капли, а номер n определяется соотношениями (2) и соответствует моде, возбуждающейся во втором порядке малости из-за взаимодействия. В итоге, если любое из соотношений (3) выполняется при значении заряда капли, меньшем критического, то будет наблюдаться резонансная раскачка n-й моды колебаний ее поверхности.

Из (3) несложно получить приведенное в [1] резонансное соотношение частот шестой и четвертой мод: $\omega_6^2 = 4 \cdot \omega_4^2$. Для этого достаточно положить в (3) $i = j = 4$, $n = 6$. Иначе говоря, данная ситуация взаимодействия мод является вырожденной и соответствует двукратному взаимодействию четвертой моды с шестой.

Несложно видеть, что соотношение (3) может удовлетворяться при докритическом значении заряда (параметра W) для большого количества комбинаций частот. Так, например, для ситуации, когда $\omega_n = (\omega_i + \omega_j)$, начальное возбуждение третьей и четвертой мод приводит к резонансной раскачке пятой моды при $W \approx 3.62$ (критическое значение параметра W равно четырем); начальное возбуждение третьей и пятой мод приводит к резонансной раскачке шестой моды при $W \approx 3.21$, начальное возмущение одной девятой моды приводит к вырожденному взаимодействию с четырнадцатой модой и ее раскачке при $W \approx 2.42$. Перечень резонансно взаимодействующих мод можно продолжить, переходя к более высоким модам.

Имея в виду исследование критических условий неустойчивости капли по отношению к собственному заряду, более интересно рассмотреть возможность резонансного взаимодействия с перекачкой энергии от высоких мод к низким, а не наоборот, как это имело место в приведенных выше примерах. Для достижения указанной цели необходимо рассмотреть взаимодействие мод, когда $\omega_n = (\omega_i - \omega_j)$. Количество резонансов, реализующихся в такой ситуации, также велико. Так, резонансная раскачка третьей моды капиллярных осцилляций капли, несущей докритический заряд, имеет место в девяти случаях при последовательно уменьшающейся величине параметра W: от $W \approx 3.62$ при начальном возбуждении четвертой и пятой мод до $W \approx 0.19$ при начальном возбуждении двенадцатой и тринадцатой мод. Резонансная раскачка четвертой моды имеет место в четырех случаях при последовательно уменьшающейся величине параметра W: от $W \approx 3.62$ при начальном возбуждении третьей и пятой мод до $W \approx 0.61$ при начальном возбуждении шестой и восьмой мод.

Согласно существующим представлениям об обмене энергией резонансно взаимодействующих мод [4], перекачка энергии из высоких мод в низкие происходит с большей эффективностью, приводя к существенному увеличению амплитуд низких мод. Учитывая, что проведенные расчеты свидетельствуют о быстром снижении резонансного значения параметра W с ростом номеров начально возбужденных мод, можно ожидать, что для крупной заряженной капли при разумных в условиях грозового облака значениях заряда [5] реализация неустойчивости ее поверхности произойдет вследствие возбуждения в капле за счет ее столкновений с существенно более мелкими капельками высоких мод осцилляций [6]. Это обстоятельство позволяет снова вернуться к обсуждению физического механизма инициирования разряда молнии [7,8].

4. Заключение. Возможный механизм распада заряженной капли при малой величине собственного заряда может быть связан с нелинейной резонансной перекачкой энергии капиллярных осцилляций капли из высоких мод в низкие.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
[2] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 22. С. 76–83.
[3] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
[4] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
[5] *Облака* и облачная атмосфера. Справочник / И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[6] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 5. С. 22–27.
[7] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. В. 1. С. 60–63.
[8] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.