04,06

Генерация электрических волн терагерцевых частот поступательным движением полярона в диэлектрической нанонити

© К.В. Городнов, З.П. Мастропас, Э.Н. Мясников

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: alhimik_kg@mail.ru

(Поступила в Редакцию 1 июля 2013 г.)

Теоретически исследован квазиклассический случай движения локализованного электрического заряда в цилиндрической нанонити с учетом временной дисперсии диэлектрической проницаемости. К системе приложено сильное электрическое поле, что позволяет поддерживать скорость заряда постоянной. Проанализированы зависимости потенциала от времени для различных значений скорости заряда и приведено сравнение результатов, полученных численным и аналитическим методами. Получено соотношение, выражающее мощность, выделяемую системой при излучении фононов.

1. Введение

Фундаментальным, имманентным свойством любой диэлектрической среды является наличие в ней собственных поляризационных колебаний. Иными словами, диэлектрическая среда представляет собой систему осцилляторов электрического поля. Тогда воздействие на диэлектрик всякого внешнего электрического поля приводит к взаимодействию этого поля с упомянутыми выше осцилляциями.

Подобный эффект взаимодействия поля локализованного заряда со средой впервые был обнаружен при экспериментальном исследовании потерь энергии заряда, движущегося в диэлектрической пленке Al_2O_3, представляющей собой покрытие катодов в лампах с холодными катодами, и исследовано в работе Фейнмана и Торнбера [1]. Потери энергии, обнаруженные экспериментально, были весьма велики, что позволило сделать вывод о формировании вокруг движущегося заряда оболочки, создаваемой поляризационным зарядом среды. То есть было доказано, что носитель заряда находится в поляронном состоянии, а потеря энергии происходит за счет излучения фононов. Движение заряда с постоянной скоростью возможно, когда к среде приложено сильное внешнее электрическое поле (порядка 10^6 V/cm), которое компенсирует потери энергии, вызванные излучением фононов.

Проблема резонансного взаимодействия поля локализованного заряда с собственными поляризационными колебаниями изотропной диэлектрической среды представляется чрезвычайно важной, поскольку возникающие в результате осцилляции лежат в терагерцевом диапазоне частот. Существует целый ряд работ, посвященный данному эффекту, например [2,3] и другие. Одна из моделей генератора электрических волн терагерцевых частот была предложена нами в [4,5]. В настоящей работе продолжено теоретическое исследование, основы которого были заложены в упомянутых статьях. Здесь изложены результаты численного расчета зависимости потенциала, генерируемого поляроном на поверхности нанонити, которые представляются значительно более точными по сравнению с [4,5]. Более высокая точность достигнута благодаря новому подходу к подсчету значений потенциала. Кроме того, здесь приводится аналитический вид зависимости потенциала от координаты и сравнение результатов численного и аналитического интегрирования, чего ранее сделано не было, а также произведен расчет мощности электрического поля, расходуемой на поддержание постоянной скорости полярона.

2. Генерация электрических волн локализованным зарядом

Пусть вдоль оси диэлектрической нанонити радиуса R движется локализованный заряд q со скоростью v, значительно превосходящей скорость распространения поляризационных колебаний в материале, из которого построена нанонить. Для описания движения заряда зададим декартову систему координат таким образом, чтобы ось Oz совпадала с осью нанонити и была сонаправлена с вектором скорости заряда, а оси Ox и Oy, следовательно, перпендикулярны последнему. Уравнение движения свободного заряда может быть записано как

$$\rho_0(\mathbf{r}, t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt). \tag{1}$$

Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей заряд, не является постоянной величиной. Она зависит от частоты действующего поля и волнового вектора $\mathbf{k}$. Известно [6,7], что зависимость диэлектрической проницаемости от ω имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_\parallel^2}{\omega^2 - \omega_\perp^2}. \tag{2}$$

Здесь $\omega_\parallel$ и $\omega_\perp$ — продольная и поперечная частоты поляризационных колебаний среды, а ε_∞ — значение диэлектрической проницаемости на частотах $\omega \ll \omega_\parallel, \omega_\perp$.

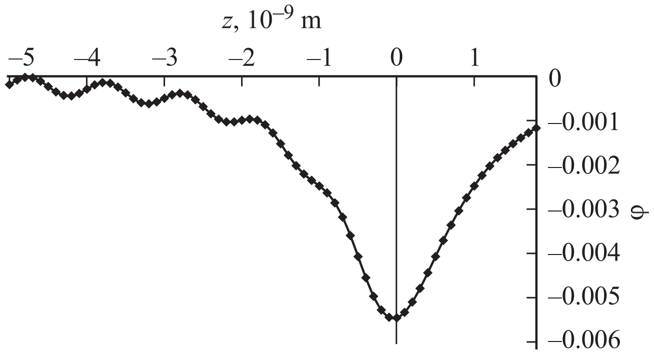

Рис. 1. Зависимость $\varphi(z)$ при $v = 10^3$ m/s.

Фурье-образ [8] функции (1) $\rho_0(\mathbf{r}, t) \to \rho_0(\mathbf{k}, \omega)$ связан простым соотношением с плотностью заряда в диэлектрической среде $\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\rho_0(\mathbf{k},\omega)}{\varepsilon(\omega)}$. Используя правила интегрирования δ-функций, найдем $\rho_0(\mathbf{k}, \omega)$ из соотношения (1)

$$\rho_0(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi q \delta(\omega - k_z v). \quad (3)$$

Поделив равенство (3) на равенство (2), получим

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\varepsilon_\infty} 2\pi q \delta(\omega - k_z v). \quad (4)$$

Выражение (4) позволяет установить вид зависимости плотности заряда в среде от координат и времени путем обратного Фурье-преобразования. Интегрируя (4) по переменным ω и k_z с использованием леммы Жордана [8], получим

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{q\delta(x)\delta(y)}{\varepsilon_\infty} \frac{\omega_\perp^2 - \omega_\parallel^2}{v\omega_\parallel} \sin \omega_\parallel \left(\frac{z}{v} - t\right). \quad (5)$$

Для момента времени $t = 0$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{q(\omega_\perp^2 - \omega_\parallel^2)}{v\varepsilon_\infty\omega_\parallel} \delta(x)\delta(y) \sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v} z\right). \quad (6)$$

Потенциал связан с плотностью заряда соотношением

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (7)$$

Подставив в (7) правую часть уравнения (6), получим

$$\varphi(z) = \frac{q(\omega_\perp^2 - \omega_\parallel^2)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty v\omega_\parallel} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v} z'\right) dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}. \quad (8)$$

При решении задачи на плоскости, перпендикулярной оси Ox (вполне естественно $x = 0$, $y = R$), уравнение (8) примет вид

$$\varphi(z) = \frac{q\omega_\parallel(\omega_\parallel^2 - \omega_\perp^2)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty v\omega_\parallel^2} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v} z'\right) dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}}. \quad (9)$$

Для построения графика зависимости $\varphi(z)$ используем методы численного интегрирования. Для того чтобы выяснить характер зависимости потенциала от координаты, достаточно знать значения подынтегрального выражения в безразмерном виде, поскольку множитель $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty}$ — суть константа. А безразмерная постоянная $\frac{\omega_\parallel^2 - \omega_\perp^2}{\omega_\parallel^2}$ является параметром среды. Поскольку из соотношения Лиддена–Сакса–Теллера $\frac{\omega_\parallel^2}{\omega_\perp^2} \gg 1$ [7] напрямую следует, что $\omega_\parallel^2$ значительно превосходит $\omega_\perp^2$, то величину $\frac{\omega_\parallel^2 - \omega_\perp^2}{\omega_\parallel^2}$ можно положить равной 0.1. Таким образом, заменим $\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v} z'\right)dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}}$ на интегральную сумму, приведя предварительно все ее члены к безразмерному виду

$$f = 0.1 \sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v} z'\right) \frac{\omega_\parallel}{v} \Delta z'}{\sqrt{\left(R\frac{\omega_\parallel}{v}\right)^2 + \left(\frac{\omega_\parallel}{v}(z - z')\right)^2}}. \quad (10)$$

Каждое отдельное значение функции, стоящей под знаком суммы в (10), вычисляется для фиксированного z и изменяющегося z'. Для расчетов примем, в качестве начальных, следующие значения параметров: $R = 1$ nm, $v = 1000$ m/s, $\omega_\parallel = 2\pi\nu$, где $\nu = 10^{12}$ Hz. В результате построения получим график, представленный на рис. 1.

Из графика с очевидностью следует, что локализованный заряд, находясь в процессе движения в точке с координатами (0, 0, 0), должен генерировать позади себя колебания потенциала электрического поля, в то время как впереди колебаний не наблюдается и потенциал просто убывает.

3. Зависимость характера колебаний от скорости движения заряда

Большой интерес представляет влияние скорости движения заряда на характеристики генерируемых электрических волн: амплитуду и длину волны, поскольку это, с одной стороны, позволит выяснить значение энергии, расходуемое на генерацию волн, а с другой — установить, наблюдаются подобные колебания потенциала при любых скоростях или же существуют некоторые предельные значения (если модель верна, то, очевидно, такой границей будет скорость распространения поляризационных колебаний в среде) скорости заряда.

Построим график зависимости $\varphi(z)$, используя тот же алгоритм, но положив значение скорости $v = 10^4$ m/s. Вид такого графика приведен на рис. 2.

Таким образом, становится очевидно, что с увеличением скорости длина волны и особенно амплитуда увеличиваются. Построим для большей наглядности графики зависимости $\varphi(z)$ для скоростей $v = 10^4$ m/s и $v = 5 \cdot 10^4$ m/s в одной системе координат (рис. 3).

Данная модель предполагает наличие нижней границы эффекта. Действительно, пусть скорость принимает значение $\upsilon = 300$ m/s. График представлен на рис. 4.

Следует отметить отдельно, что, по-видимому, существует и верхняя граница рассматриваемого эффекта. Построим график для $\upsilon = 10^6$ m/s (рис. 5).

Очевидно, для данного значения скорости колебания не наблюдаются. Подведем краткий итог сказанному выше: локализованный заряд, двигаясь вдоль оси нанонити, должен генерировать электрические волны на ее поверхности. Вид колебаний зависит от скорости заряда — с увеличением скорости амплитуда и длина волны увеличиваются. У данного эффекта существуют верхняя и нижняя границы, накладываемые значением скорости.

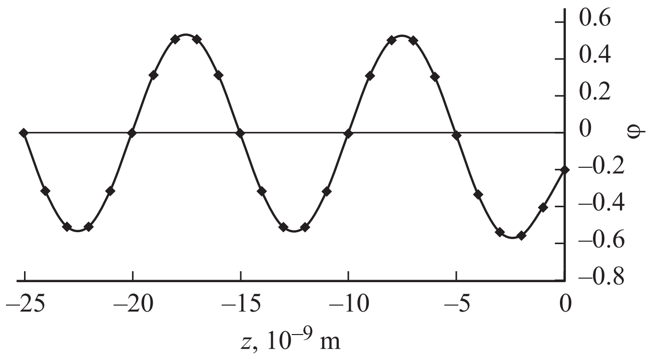

Рис. 2. Зависимость $\varphi(z)$ при $\upsilon = 10^4$ m/s.

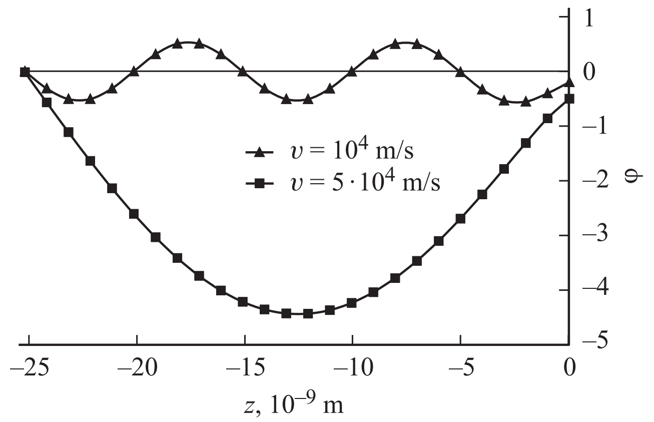

Рис. 3. Зависимость $\varphi(z)$ при $\upsilon = 10^4$ и $5 \cdot 10^4$ m/s.

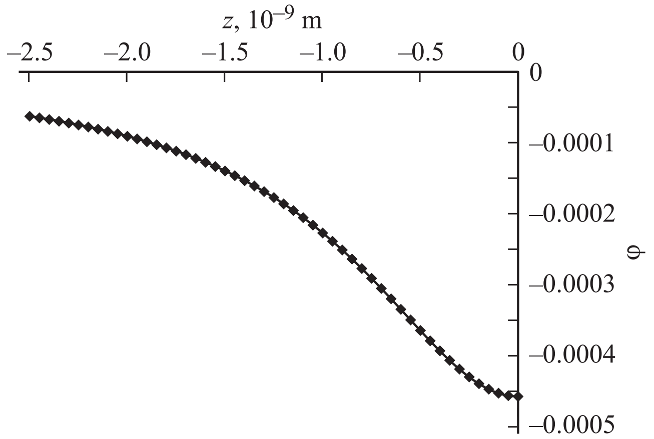

Рис. 4. Зависимость $\varphi(z)$ при $\upsilon = 3 \cdot 10^2$ m/s.

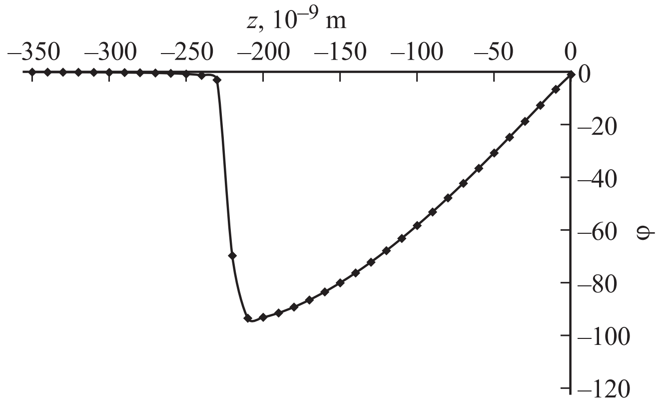

Рис. 5. Зависимость $\varphi(z)$ при $\upsilon = 10^6$ m/s.

4. Добавка от локализованного заряда

Помимо поляризационного заряда, за счет которого и возникают рассматриваемые осцилляции, свой вклад в суммарное значение потенциала вносит локализованный заряд. Добавка от локализованного заряда может быть получена довольно просто

$$\varphi'(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty} \int\limits_0^\infty \frac{dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}}. \tag{11}$$

Найти явный вид выражения (11) не представляет трудности

$$\varphi'(z) = \frac{q\omega_\parallel}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty \upsilon} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \tag{12}$$

Таким образом, для того чтобы найти вид потенциала с учетом локализованного заряда, необходимо сложить равенства (9) и (12). Заменив интеграл в (9) на сумму, окончательно получим

$$\varphi + \varphi' = \frac{q\omega_\parallel}{\upsilon 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(R\,\frac{\omega_\parallel}{\upsilon}\right)^2 + \left(z\,\frac{\omega_\parallel}{\upsilon}\right)^2}} + \frac{\omega_\parallel^2 - \omega_\perp^2}{\omega_\parallel^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{\upsilon}\,z'\right) \frac{\omega_\parallel}{\upsilon}\,\Delta z'}{\sqrt{\left(R\,\frac{\omega_\parallel}{\upsilon}\right)^2 + \left(\frac{\omega_\parallel}{\upsilon}\,(z - z')\right)^2}} \right). \tag{13}$$

Выражение в скобках соотношения (13) вновь безразмерно. Можно построить график зависимости общего потенциала $\varphi + \varphi'$ от координаты z (рис. 6).

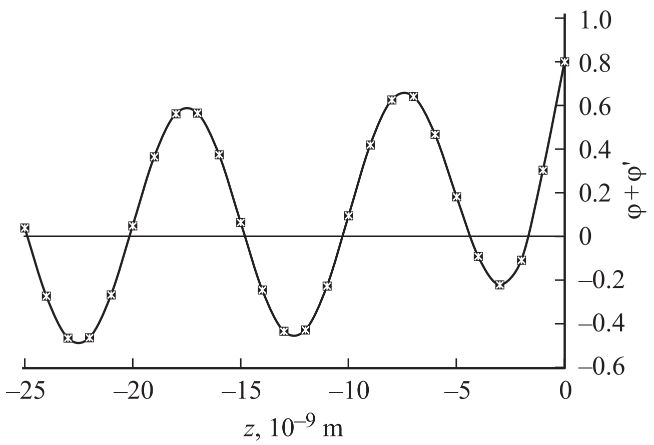

Рис. 6. Зависимость $\varphi(z)+\varphi'(z)$ при $v=10^4$ m/s.

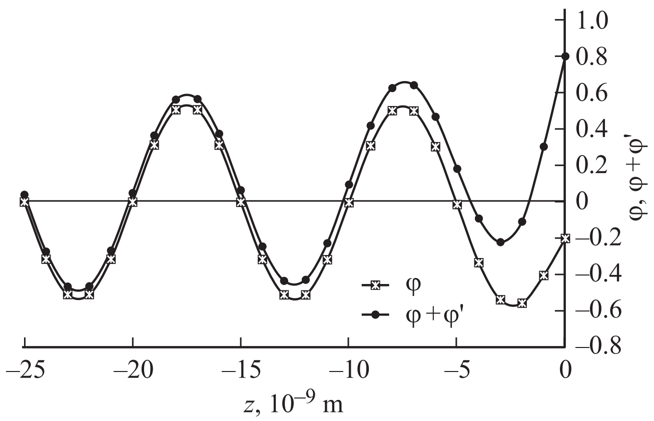

Рис. 7. Зависимость $\varphi(z)$ и $\varphi(z)+\varphi'(z)$ при $v=10^4$ m/s.

Поскольку добавка от локализованного заряда, как видно из графика, не влияет на колебательный характер потенциала, то эффект должен наблюдаться несмотря на эту добавку. Полезно сравнить вид кривых φ и $\varphi+\varphi'$. Это сделано на рис. 7. Колебания с учетом добавки и без нее фактически совпадают по фазе.

5. Явный вид зависимости потенциала от координаты

Задача нахождения явного вида интеграла в уравнении (9) не вполне тривиальна. Возникает ряд математических трудностей при использовании традиционных методов интегрирования, включая методы теории вычетов: при решении вычетов целочисленных порядков попросту не получается. Не приводят к окончательному результату ни замена переменной, ни интегрирование по частям, ни другие методы. Тем не менее, как будет показано ниже, эта задача может быть решена.

Запишем отдельно интеграл из уравнения (9)

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z'\right)dz'}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}}. \tag{14}$$

Произведем замену переменной: $n=z-z'$, тогда $z'=z-n$, а $dz'=-dn$. Перепишем интеграл (14) с учетом этой замены

$$-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}(z-n)\right)dn}{\sqrt{R^2+n^2}}. \tag{15}$$

Раскрывая скобки в аргументе синуса в (15), получим

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z-\frac{\omega_\parallel}{v}n\right)dn}{\sqrt{R^2+n^2}}. \tag{16}$$

Выражение (16) легко может быть представлено как

$$\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z\right)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\omega_\parallel}{v}n\right)dn}{\sqrt{R^2+n^2}}-\cos\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z\right)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}n\right)dn}{\sqrt{R^2+n^2}}. \tag{17}$$

Вид интегралов в (17) схож с (14), но не тождественен ему — в подкоренном выражении отсутствует квадрат разности. Результат интегрирования в обоих случаях выражения (17) известен [9]

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos(xy)dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=K_0(\alpha y), \tag{I}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin(xy)dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=\frac{\pi}{2}\left[I_0(\alpha y)-L_0(\alpha y)\right]. \tag{II}$$

Здесь I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно, а L_0 — модифицированная функция Струве. Надо заметить, что на переменные в (I) и (II) накладываются ограничения $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ и $y>0$, которые в нашем случае естественным образом удовлетворяются. Соотнося параметры из (I), (II) и (17), окончательно получим

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z'\right)dz}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}}=\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z\right)K_0\left(\frac{\omega_\parallel}{v}R\right)$$
$$-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z\right)\left[I_0\left(\frac{\omega_\parallel}{v}R\right)-L_0\left(\frac{\omega_\parallel}{v}R\right)\right]. \tag{18}$$

Значения функций I_0, K_0 и L_0 для некоторых значений аргумента рассчитаны в [10].

Построим график зависимости $\varphi(z)$, используя равенство (18) с учетом коэффициента $\frac{\omega_\parallel^2-\omega_\perp^2}{\omega_\parallel^2}=0.1$. Скорость будем полагать равной $v=2\pi\cdot10^3$ m/s. Такое

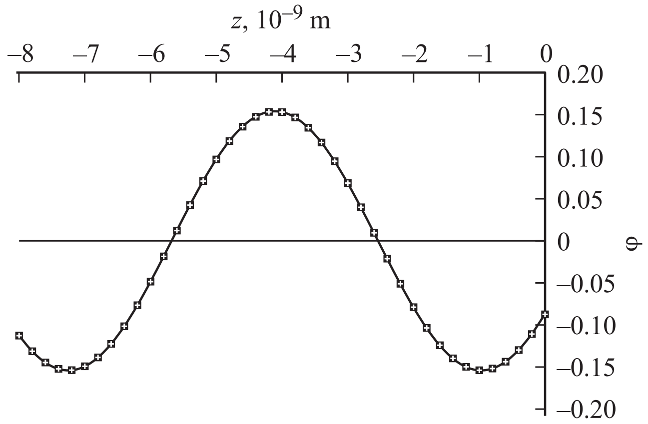

Рис. 8. Зависимость $\varphi(z)$, полученная путем аналитического интегрирования при $v = 2\pi \cdot 10^3$ m/s.

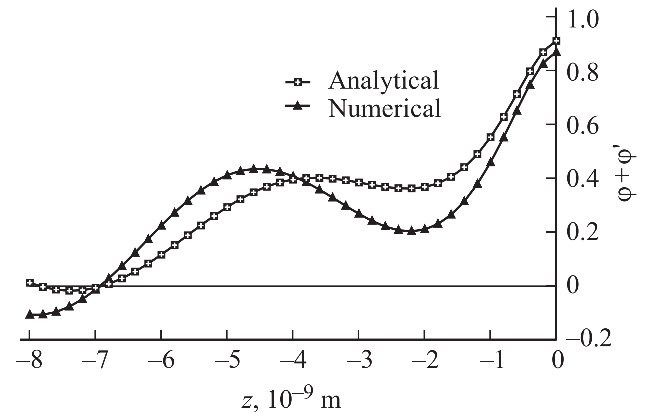

Рис. 9. Зависимости $\varphi(z) + \varphi'(z)$, полученные путем численного и аналитического интегрирования при $v = 2\pi \cdot 10^3$ m/s.

„странное“ значение скорости выбрано исключительно с целью получить единицу в качестве аргумента функций I_0, K_0 и L_0, поскольку величины этих функций для данного аргумента известны [10].

На рис. 8 представлен вид функции (18). Ее осциллирующий характер вполне очевиден, но особый интерес, конечно, представляет сравнение вида потенциала, полученного в результате аналитического интегрирования, с тем, что дает численный расчет. Построим в одних осях координат эти две функции для значения скорости $v = 2\pi \cdot 10^3$ m/s. Для полноты картины учтем вклад, вносимый локализованным зарядом (рис. 9). На рис. 9 видно некоторое расхождение в фазе колебаний и амплитуде, однако в целом можно утверждать, что оба метода дают схожие результаты.

6. Расчет мощности, выделяемой при движении полярона

Нахождение мощности, которая выделяется при равномерном движении локализованного заряда в нанонити, представляется крайне важной задачей, поскольку это позволит установить значение мощности электрического поля, необходимое для поддержания постоянной скорости полярона. Кроме того, выделяемая мощность при таком движении может быть установлена в эксперименте, что позволит эмпирически проверить предложенную модель.

Напряженность электрического поля можно найти как $E = -\operatorname{grad}\varphi$. Применяя этот закон к (9), получим

$$E = -\frac{q\omega_\parallel}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty v}\,\frac{(\omega_\parallel^2 - \omega_\perp^2)}{\omega_\parallel^2}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(z - z')\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z'\right)dz}{\sqrt{\left(R^2 + (z - z')^2\right)^3}}. \tag{19}$$

Сила, действующая со стороны электрического поля на поляризационный заряд со стороны локализованного, есть произведение напряженности поля локализованного заряда на поляризационный заряд. Следует заметить, что поляризационный заряд равен по величине локализованному, т. е. $F = qE$. Используя (19), в явном виде запишем

$$F = -\frac{q^2\omega_\parallel}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty v}\,\frac{(\omega_\parallel^2 - \omega_\perp^2)}{\omega_\parallel^2}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(z - z')\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z'\right)dz}{\sqrt{\left(R^2 + (z - z')^2\right)^3}}. \tag{20}$$

Для того чтобы найти мощность, теперь достаточно умножить (20) на скорость заряда

$$P = -\frac{q^2\omega_\parallel}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\infty}\,\frac{(\omega_\parallel^2 - \omega_\perp^2)}{\omega_\parallel^2}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(z - z')\sin\left(\frac{\omega_\parallel}{v}z'\right)dz}{\sqrt{\left(R^2 + (z - z')^2\right)^3}}. \tag{21}$$

Подставляя, с учетом того, что заряд находится в точке $(0, 0, 0)$, в формулу (21) величины: $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $\varepsilon_\infty = 10$, а скорость полагая $v = 10^3$ m/s, легко получить значение мощности $P = 0.3$ MeV/s.

7. Заключение

Предложенное в настоящей работе теоретическое исследование показывает, что локализованный заряд, двигаясь поступательно вдоль оси диэлектрической нанонити, должен генерировать колебания потенциала. Построенные по уравнениям (10) и (13) графики демонстрируют, что амплитуда и длина волны таких электрических волн увеличиваются с ростом скорости заряда. Полученные численными методами результаты в целом коррелируют с установленной в работе аналитической зависимостью (17). Используя уравнение (9) и общеизвестные соотношения между потенциалом, напряженностью, силой и мощностью, получено равенство (21), которое позволяет вычислить мощность, выделяемую при движении локализованного заряда с постоянной скоростью.

Список литературы

[1] K.K. Thornber, R.P. Feynman. Phys. Rev. B **1**, 4099 (1970).
[2] Э.Н. Мясников, А.Э. Мясникова, З.П. Мастропас. ЖЭТФ **129**, *3*, 548 (2006).
[3] Э.Н. Мясников, З.П. Мастропас. ФТТ **51**, 966 (2009).
[4] К.В. Городнов. Сб. науч. тр. по матер. Междунар. науч.-практ. конф. „Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте" **8**, 56 (2011).
[5] К.В. Городнов. Тр. VII Всерос. науч. конф. молодых ученых и студентов „Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах" **2**, 24 (2010).
[6] А.С. Давыдов. Теория твердого тела. Наука, М. (1976). 640 с.
[7] А.С. Давыдов, Э.Н. Мясников. ДАН СССР **173**, 1040 (1967).
[8] А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функции комплексной переменной. Наука, М. (1979). 320 с.
[9] Г. Бэйтмен, А. Эрдейн. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Наука, М. (1969). 344 с.
[10] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Наука, М. (1979). 832 с.