Журнал технической физики, 2014, том 84, вып. 8

06

Излучающие и поглощающие свойства среды на основе массива не взаимодействующих нанотрубок

© Н.Р. Садыков

Снежинский физико-технический институт — филиал НИЯУ МИФИ,
456770, Снежинск, Челябинская область, Россия
e-mail: n.r.sadykov@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 20 сентября 2013 г.)

Рассмотрено механизм возбуждения нелинейной среды на основе массива нанотрубок типа „зигзаг". Показано, что, несмотря на эквидистантный спектр уединенной нанотрубки при наличии возбуждения системы, возможен механизм генерации терагерцового излучения. При отсутствии накачки среды за счет большого значения силы осциллятора система проявляет хорошие поглощающие свойства.

Введение

Совокупность большого числа уникальных свойств углеродных нанотрубок (CN) в сочетании с их геометрическими размерами делает нанотрубки перспективными при рассмотрении задачи генерации СВЧ- и терагерцового излучения [1–14]. Терагерцовое (ТГц) излучение, как правило, имеет низкую выходную мощность и пиковую интенсивность генерируемого излучения. Типичные значения энергии генерируемых ТГц-импульсов лежат в диапазоне от пико- до наноджоулей, средней мощности — от нано- до микроватт, напряженности электромагнитного поля — от нескольких единиц до нескольких десятков kV/cm. Лишь на уникальных источниках ТГц-излучения удается достичь амплитуд напряженности электромагнитного поля в несколько сотен kV/cm [15]. Поэтому задача по исследованию процессов генерации ТГц-излучения при напряженности поля масштаба $\sim 10\,\text{kV/cm}$я вляется актуальной. Такие величины напряженности поля излучения были исследованы в работах [10–12,16,17]. В [10] теоретически предсказан и численно промоделирован процесс генерации ТГц-излучения с длиной волны $\lambda \approx 1\,\text{mm}$. В основе процесса лежит эффект периодической нелинейной зависимости тока в нанотрубках в переменном (быстро осциллирующем) электрическом поле при наличии постоянного (или нестационарного, т. е. при наличии электрических импульсов) электрического поля [14] (случай, когда нанотрубка аппроксимируется свернутой в геликоиду атомной цепочкой, см. [18]). В работе [11,16] на основе результатов работы [10], в частности, исследована задача по генерации субмиллиметрового излучения при воздействии на систему параллельно ориентированных углеродных нанотрубок (УНТ) двухчастотного углекислотного лазерного излучения (CO_2-лазер) при наличии постоянного (или нестационарного) поля. В работе [12] (см. также [13,17]) предложен механизм генерации с помощью нестационарного электрического поля (можно использовать электрические импульсы [19,20]) в волноводе с коротким передним фронтом ($\Delta T \approx 10^{-10}\,\text{s}$). В результате такого „мгновенного" включения „электрического поля" возникают колебания в электрическом колебательном контуре, где частота колебаний определяется величиной кинетической индуктивности и квантовой электрической емкостью [21,22].

В настоящей работе рассмотрим механизм возбуждения нелинейной среды на основе массива параллельно ориентированных невзаимодействующих нанотрубок типа „зигзага" для генерации ТГц-излучения. Исследуем влияние эквидистантного спектра уединенной нанотрубки на излучающие и поглощающие свойства системы из УНТ.

Система материальных уравнений в среде на основе массива нанотрубок

В [4] было показано, что в УНТ типа зигзаг с металлическим типом проводимости при выполнении условий $a\partial^2\tilde{\alpha}/\partial z^2 \ll \partial\tilde{\alpha}/\partial z$, $a\partial^2\tilde{\beta}/\partial z^2 \ll \partial\tilde{\beta}/\partial z$ вблизи поверхности Ферми уровни энергии не зависят от величины продольного электрического поля E_z

$$\bar{\varepsilon}_k = \sqrt{3}\pi\gamma_0 a(1+2k)/4L, \tag{1}$$

где $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\ldots,\ eE_zL/(2\sqrt{3}\gamma_0) \ll 1$; L — длина нанотрубки, γ_0 — интеграл перескока; $a = \sqrt{3}b$, $b = 0.142\,\text{nm}$ — расстояние между атомами углерода в графене. Было также показано, что, несмотря на то, что волновая функция зависит от E_z, значение матричного элемента дипольного момента $(d_z)_{k,k-1}$ также не зависит от величины продольного поля

$$(d_z)_{k,k-1} = \langle k|\hat{d_z}|k-1\rangle = e(z)_{k,k-1},$$
$$(z)_{k,k-1} = -2L/\pi^2, \tag{2}$$

где индекс „z" у оператора дипольного момента означает z-компоненту. Из (1) видно, что спектр УНТ является эквидистантным. Из квантовой механики известно [23], что в случае линейного осциллятора излучение может только поглощаться. Это связано с тем, что спектр энергий линейного осциллятора эквидистантный, а вероятности перехода $n \to n+1$ и $n \to n-1$ с поглощением пропорциональны соответственно величинам

$(n+1)|E(\omega_{n+1,n})|^2$ и $n|E(\omega_{n,n-1})|^2$. У уединенной УНТ спектр также квазидистантный вблизи поверхности Ферми. В настоящей работе покажем, что в нашем случае (ТГц-излучение) при определенных значениях накачки в системе на основе массива УНТ из-за большого значения силы осциллятора („силы“ перехода) можно рассмотреть задачу генерирования когерентного излучения в результате многокаскадных переходов. В этом случае становится актуальной задача создания условий для эффективной накачки квантовой системы. При отсутствии накачки систему на основе массива нанотрубок за счет наличия эквидистантного спектра отдельных нанотрубок можно также использовать как поглощающую систему для излучения в ТГц-диапазоне. Сначала исходя из полученных выше результатов рассмотрим задачу генерации излучения из предположения, что уже произведена накачка системы.

Пусть УНТ в пространстве ориентированы вдоль нестационарного электрического поля произвольным образом с постоянной объемной концентрацией (с объемной долей c_0). Для оценки процесса усиления излучения воспользуемся системой материальных уравнений в резонаторе для двухуровневой системы с разностью энергий состояний $\hbar\Omega = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0$, где $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_0$ — уровни энергий соответственно состояний $|1>$, $|0>$. Для описания процесса усиления в резонаторе в приближении медленно меняющихся комплексных амплитуд воспользуемся уравнением для компоненты поля излучения E_z и системой двух материальных уравнений (для поляризации P_z и величины разности населенностей N [24] (см. также [4])

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{1}{2\tau_c}\tilde{E} = i\frac{\omega}{2\varepsilon\varepsilon_0}\tilde{P},$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N-N_0}{T_1} = \frac{2}{\hbar\Omega}E_z\frac{\partial P_z}{dt},$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \left(\frac{1}{T_2} - i(\Omega-\omega)\right)\tilde{P} = -i\frac{|d_{1,0}|^2}{3\hbar}N\tilde{E}, \qquad (3)$$

$$P_z = \frac{1}{2}\tilde{P}\exp(-i\Omega t) + \text{комп. сопр.},$$

$$E_z = \frac{1}{2}\tilde{E}\exp(-i\omega t) + \text{комп. сопр.},$$

где выражение компл. сопр. означает комплексно сопряженная величина, $d_{1,0}$ — матричный элемент дипольного момента, ε, ε_0 — соответственно электрическая проницаемость и электрическая постоянная, в уравнениях (3) в отличие от [24] существует связь между индукцией и поляризацией $D_z = \varepsilon\varepsilon_0 E_z + P_z$. В уравнениях (3) в соответствии с [4] введены обозначения

$$d_{1,0} = e(z)_{1,0} = -\frac{2eL}{\pi^2},$$

$$\hbar\Omega = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0 = \sqrt{3}\pi\gamma_0 a/(2L), \qquad (4)$$

L — длина нанотрубки. В рассматриваемой задаче в (3), как будет показано ниже, имеет место соотношение $\partial P_z/\partial t \gg P_z/T_2$. Поэтому в (3) при $\omega = \Omega$ в левой части для уравнения поляризации можно пренебречь слагаемым $\sim \tilde{P}/T_2$. В этом случае при значениях радиуса $R = 10^{-9}$ m и длины $L = 10^{-7}$ m нанотрубок, объемной доле наночастиц $c_0 = 10^{-5}$ (если расстояние между центрами масштаба длины УНТ, то взаимодействием между нанотрубками можно пренебречь [13]; поэтому при оценке можно было бы использовать величину $c_0 = 10^{-3}$) концентрация наночастиц будет $K = c_0/(\pi R^2 L) \approx 3\cdot 10^{19}\,\text{m}^{-3}$. Предполагая, что для одного электрона в рассматриваемом состоянии инверсия состояний равна $N = 0.1$, получаем для полной инверсии населенностей системы значение $N = 6\cdot 10^{18}\,\text{m}^{-3}$ (в одном состоянии два электрона). Предполагая, что $\omega = \Omega$, с учетом $\Delta\bar{\varepsilon}_{1,0} = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0 = \sqrt{3}\pi\gamma_0 a/(2L) = 1.81\cdot 10^{-2}\,\text{eV}$ из (3) получаем величину коэффициента усиления ТГц-излучения в резонаторе

$$\Theta_1 = |d_{1,0}|[\omega N/(3\hbar\varepsilon\varepsilon_0)]^{1/2} \approx 8.4\cdot 10^{11}\,\text{c}^{-1}, \qquad (5)$$

где имеет место соотношение $\partial P_z/\partial t \gg P_z/T_2$, $\hbar\omega = \Delta\bar{\varepsilon}_{1,0} = 1.81\cdot 10^{-2}\,\text{eV}$. Применительно к задаче усиления излучения коэффициент усиления будет порядка $\Gamma = \Theta_1/c \approx 2.8\cdot 10^3\,\text{m}^{-1} = 2.8\,\text{mm}^{-1}$, где длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega \approx 0.065\,\text{mm} = 65\,\mu\text{m}$. Видно, что условие приближения медленно меняющейся амплитуды $\lambda\Gamma \ll 1$ пока выполняется. Если положить, что $c_0 = 10^{-3}$, то получаем, что $K \approx 3\cdot 10^{21}\,\text{m}^{-3}$, $N = 6\cdot 10^{20}\,\text{m}^{-3}$, $\Gamma \approx 28\,\text{mm}^{-1}$. Видно, что в этом случае приближение медленно меняющейся амплитуды не выполняется. При $c_0 = 10^{-5}$ запасенная энергия будет порядка $\Pi = N\hbar\omega/2 \approx 8.7\cdot 10^{-3}\,\text{J/m}^3$. За счет возможности многокаскадных переходов величину Π можно увеличить на порядок.

Накачка нелинейной среды на основе массива невзаимодействующих нанотрубок

Основной проблемой в задаче генерирования монохроматического излучения является создание условий для эффективной накачки среды. Обсудим возможность создания таких условий для среды на основе массива параллельно ориентированных вдоль нестационарного электрического поля невзаимодействующих нанотрубок.

Рассматриваемый ниже подход сильно перекликается с генерацией излучения с помощью квантовых каскадных лазеров [25], где роль элементов квантовой слоистой гетероструктуры (квантовыми ямами) могут быть периодически чередующиеся массивы УНТ, которые будут выполнять роль активной области. В квантовых ямах сила осциллятора („сила“ перехода) является большой величиной [25]: электрон, помещенный в яму, может поглощать электромагнитную волну почти так же, как электрон при циклотронном резонансе (сила осциллятора близка к единице). Предложения по созданию внутризонных лазеров на квантовых ямах за счет туннельной инжекции — туннелирования электронов через потенциальный барьер между квантовыми ямами появились в 70 гг. [26] (в [27] было показано, что в случае одной квантовой ямы на периоде невозможно создание условий на рабочем переходе, т. е. инверсия обнаружена не была). Идея, предложенная в [26], в модифицированном виде и используется в квантовых каскадных лазерах (ККЛ). ККЛ лазер был создан, когда было осознано, что для возникновения инверсии необходимо использовать сверхрешетки с периодом, состоящем из нескольких ям. Среди направлений по созданию ИК-лазеров следует выделить два направления: создание ККЛ на межподзонных переходах [28,29], создание ИК-лазеров на межподзонных переходах на межзонных переходах на основе полупроводниковых гетероструктур с квантовыми ямами и сверхрешетками типа II [30].

Приступим к обсуждению создания условий для эффективной накачки среды на основе массива невзаимодействующих УНТ. Пусть нанотрубки распределены с постоянной объемной концентрацией c_0. В случае УНТ, так же как и в квантовых ямах [25], сила осциллятора будет большой величиной. Из (П 2.4) и (П 2.6) следует, что со временем величина N стремится к нулю, т. е. невозможно с помощью двухуровневой системы произвести накачку среды на основе массива УНТ. Это означает, что для накачки системы с помощью излучения необходима трехуровневая система.

Трехуровневую систему можно было бы реализовать следующим образом. Рассмотрим для УНТ длиной $L_1 = 10^{-6}$ m вынужденный переход с уровня $|k = 0\rangle$ на уровень $|k = \nu\rangle$, где в дальнейшем $\nu = 10$. В соответствии с (4) энергия перехода для УНТ составит $\varepsilon^{(1)}_{\nu,0} = \sqrt{3}\pi\gamma_0 a\nu/(2L_1) = 1.81 \cdot 10^{-2}$ eV. Из (П 4) следует, что время накачки ν-го уровня

$$\Delta t_{0\to\nu} \approx T_2 \frac{[N_0N_1]^{1/2}}{2\varphi_{0\nu}}, \tag{6}$$

где в (П 4) $\partial N/\partial t \approx N_0/\Delta t_{0\to\nu}$.

При $\varepsilon_0|\tilde{E}_{0\nu}|^2 = 20\,\mathrm{J/m^3}$ ($\varphi_{0\nu} = 3.5 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$), $T_2 = 10^{-10}$ s, $N_0 = 6 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^{-3}}$, $\hbar\omega \approx 1.81 \cdot 10^{-2}$ eV время накачки $\Delta t - 0 \to \nu \approx 10^{-13}$ s. Такое малое время накачки ν-го уровня позволяет считать, что для уединенной УНТ этот уровень является возбужденным, например, с вероятностью 0.5. Покажем, что, несмотря на то, что у УНТ энергетический спектр у УНТ типа зигзаг является эквидистантным [23], время перехода электрона за счет поглощения излучения на верхний уровень $|\nu + 1\rangle$ будет значительно больше времени перехода на нижний уровень $|\nu - 1\rangle$. Это, в свою очередь, будет означать, что в случае накаченной среды на основе массива нанотрубок будут в основном происходить многокаскадные переходы с верхних (возбужденных) уровней на нижние. Из (6) следует, что время перехода $\Delta t_{\nu\to\nu+1}$ на вышележащий уровень

$$\Delta t_{\nu\to\nu+1} \approx T_2 \frac{[N_0N_1]^{1/2}}{2\varphi_{\nu,\nu+1}}, \tag{7}$$

где $\varphi_{\nu,\nu+1} \ll \varphi_{0,\nu}$. Из (П 6) следует, что время перехода $\Delta t_{\nu\to\nu-1}$ на нижележащий уровень

$$\Delta t_{\nu\to\nu-1} \sim \frac{1}{\omega}\frac{[N_0N_1]^{1/2}}{2\varphi_{\nu,\nu-1}}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что время перехода на вышележащий уровень больше времени перехода на нижележащий уровень в число раз

$$\Delta t_{\nu\to\nu+1}/\Delta t_{\nu\to\nu-1} \propto \omega T_2. \tag{9}$$

При $T_2 = 10^{-10}$ s, $\hbar\omega \approx 1.81 \cdot 10^{-3}$ eV, $\varepsilon = 1$ из (9) следует $\Delta t_{\nu\to\nu+1}/\Delta t_{\nu\to\nu-1} \approx \omega T_2 \approx 160$. Равенство (9) означает, что процессы индуцированного перехода на нижележащие уровни будут доминировать над переходами на вышележащие уровни, т. е. возможен процесс усиления по аналогии со случаем с не эквидистантным спектром.

Поглощающие свойства массива углеродных нанотрубок

Рассмотрим состоящую из массива не взаимодействующих УНТ [13] квантовую систему, которая находится в невозбужденном состоянии ($N < 0$). Покажем, что в этом случае система обладает хорошими поглощающими свойствами. Рассмотрим уравнение для матрицы плотности

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [\hat{H}, \rho], \tag{10}$$

где левая часть (10) является коммутатором оператора плотности и гамильтониана $\hat{H}$. Предположим, что взаимодействие происходит между соседними уровнями. С учетом (4) из (10) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\rho_{nn}}{\partial t} + i\hbar\frac{\rho_{nn} - \rho^{(0)}_{nn}}{T_1} &= dE_z(\rho_{n+1,n} - \rho_{n,n-1}) \\ &\times \exp(-i\Omega t) + \text{компл. сопр.}, \\ i\hbar\frac{\partial\rho_{n+1,n}}{\partial t} + i\hbar\frac{\rho_{n+1,n}}{T_2} &= \hbar\Omega\rho_{n+1,n} \\ &- E_z(\rho_{n+1,n+1} - \rho_{nn})\exp(i\Omega t), \\ i\hbar\frac{\partial\rho_{n,n-1}}{\partial t} + i\hbar\frac{\rho_{n,n-1}}{T_2} &= \hbar\Omega\rho_{n,n-1} \\ &- E_z(\rho_{nn} - \rho_{n-1,n-1})\exp(i\Omega t), \end{aligned} \tag{11}$$

где $d = d_{n,n-1}$.

Из второго и третьего уравнений (11) следует

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{\partial\rho_{n+1,n} - \rho_{n,n-1}}{\partial t} + i\hbar\frac{\rho_{n+1,n} - \rho_{n,n-1}}{T_2} \\ &= -\hbar\Omega(\rho_{n+1,n} - \rho_{n,n-1}) \\ &- dE_z(\rho_{n+1,n+1} - 2\rho_{n,n} + \rho_{n-1,n-1})\exp(i\Omega t). \end{aligned} \tag{12}$$

В соответствии с (П1) $\tilde{E} \sim \exp(i\Theta_2 t)$, где величина $\tilde{E}$ определена в (3). При $N < 0$ (12) следует

$$\rho_{n+1,n} - \rho_{n,n-1} = \frac{d\tilde{E}\exp[i(\Omega - \omega + \Theta_2)t]}{2i\hbar\left(\frac{1}{T_2} + i(\Omega - \omega + \Theta_2)\right)} \times (\rho_{n+1,n+1} - 2\rho_{n,n} + \rho_{n-1,n-1}), \quad (13)$$

где $\Theta_2 = |d|[\omega|N|/(6\hbar\varepsilon\varepsilon_0)]^{1/2}$, $\Theta_2 \ll \omega$.

Из (11) и (13) следует

$$\frac{\partial\rho_{nn}}{\partial t} + \frac{\rho_{nn} - \rho_{nn}^{(0)}}{T_1} = \frac{1}{\hbar^2}|d|^2|E|^2 \times \frac{1/T_2(\rho_{n+1,n+1} - 2\rho_{n,n} + \rho_{n-1,n-1})}{(1/T_2)^2 + (\Omega - \omega + \Theta_2)^2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно рассматривать как дифференциально-разностное уравнение [13] для диагональных элементов матрицы плотности в „энергетическом пространстве“ с постоянным шагом

$$\Delta\overline{\varepsilon} = \Delta\overline{\varepsilon}_{k,k-1} = \overline{\varepsilon}_k - \overline{\varepsilon}_{k-1} = \sqrt{3}\pi\gamma_0 a/(2L)$$

вдоль „энергетической координаты“ $\overline{\varepsilon}$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{y - y^{(0)}}{T_1} = D\frac{\partial^2 y}{\partial\overline{\varepsilon}^2}, \quad (15)$$

где $y^{(0)} \propto \exp(-E/(kT))$, „коэффициент диффузии“ D имеет вид

$$D = \frac{|dE|^2(\Delta\overline{\varepsilon})^2}{\hbar^2}\frac{2/T_2}{(1/T_2)^2 + (\Omega - \omega + \Theta_2)^2}. \quad (16)$$

В случае когда нелинейная среда на основе массива УНТ находится в невозбужденном состоянии, в (15) и (16) можно считать, что $\Theta_2 = |d|[\omega|N_0|/(6\hbar\varepsilon\varepsilon_0)]^{1/2} = \mathrm{const}$. В этом случае фундаментальное решение уравнения (15) имеет вид (функция Грина)

$$G(t, \overline{\varepsilon}) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\overline{\varepsilon}^2}{4Dt} - \frac{t}{T_1}\right), \quad (17)$$

где $\theta(t)$ функция Хевисайда.

Из (15) (или (17)) видно, что при симметричном возбуждении уровней энергии относительно какого-либо уровня $|\nu\rangle$, где $\nu \gg 1$, функция $y(t, \overline{\varepsilon})$ будет симметричной относительно уровня энергии $\overline{\varepsilon}_\nu$. Это, в свою очередь, означает, что в рассматриваемой системе при выполнении условия $N \approx N_0 = \mathrm{const}$ интеграл $\int t d\overline{\varepsilon}$ по всей энергетической области не будет меняться со временем, т. е. полная энергия системы будет сохраняться. Это означает, что в системе из массива УНТ не будет происходить генерация излучения, т. е. система будет поглощающей. Из (3) и (П3) при $T_1 \approx T_2$ следует, что условие $N \approx N_0$ эквивалентно условию $\varepsilon\varepsilon_0|\tilde{E}|^2 \ll \hbar\Omega|N_0|$.

Обсуждение результатов

Из полученных в настоящей работе результатов совместно с результатами [4] следует, что систему на основе массива не взаимодействующих УНТ можно рассматривать как усиливающую, так и поглощающую среды. Поглощение может происходить в случае слабого излучения $\varepsilon\varepsilon_0|\tilde{E}|^2 \ll \hbar\Omega|N_0|$ при отсутствии накачки за счет взаимной компенсации процесса излучения и процесса поглощения. Усиление излучения в работе рассмотрено в среде на основе изолированных параллельно ориентированных УНТ. С точки зрения усиления ТГц-излучения данная задача представляет интерес для каскадных лазеров [25–30,32]. В этом случае элементами квантовой слоистой гетероструктуры (квантовыми ямами) могут быть периодически чередующиеся массивы УНТ, которые будут выполнять роль активной области. В таких квантовых ямах сила осциллятора („сила“ перехода) является большой величиной. При этом имеющаяся не эквидистантность спектра для излучения с энергией перехода $\hbar\omega \approx 0.001\,\mathrm{eV}$ не будет влиять на эффективность „лазерного“ перехода: время перехода электрона за счет поглощения излучения на верхний уровень $|\nu + 1\rangle$ будет значительно больше времени перехода на нижний уровень $|\nu - 1\rangle$, т. е. в случае накаченной среды на основе массива нанотрубок будут в основном происходить многокаскадные переходы с верхних (возбужденных) уровней на нижние.

Приложение

Из (3) следует, что при $N < 0$, $\omega = \Omega$

$$\tilde{P} \sim \exp(-i\Theta_2 t), \qquad \tilde{E} \sim \exp(-i\Theta_2 t),$$

$$\Theta_2 = |d_{k,k-1}|[\omega|N|/(6\hbar\varepsilon\varepsilon_0)]^{1/2},$$

$$\tilde{P} = \left[d_{k,k-1}^2 N(\Theta_2 - i/T_2)\right] / \left[3\hbar(\Theta_2^2 + T_2^{-2})\right]\tilde{E}, \quad (\Pi\,1)$$

причем $1/T_2 \ll \Theta_2 \ll \omega$. Тогда

$$E_z\frac{\partial P_z}{\partial t} = -\frac{\omega + \Theta_2}{T_2}\frac{|d_{k,k-1}|^2 N}{6\hbar(\Theta_2^2 + T_2^{-2})}|\tilde{E}|^2. \quad (\Pi\,2)$$

С учетом соотношения $N/(1/T_2^2 + \Theta_2^2) \approx 3\hbar\varepsilon\varepsilon_0/(\omega|d_{k,k-1}|^2)$ из (П 2) следует

$$E_z\frac{\partial P_z}{\partial t} = \frac{\omega + \Theta_2}{2\omega T_2}\varepsilon\varepsilon_0|\tilde{E}|^2. \quad (\Pi\,3)$$

Из (37) и (П 3) для случая $N < 0$ следует $\Delta t_{0\to\nu} \approx T_2\frac{[N_0 N_1]^{1/2}}{2\varphi_{0\nu}}$, где имеет место

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N - N_0}{T_1} = \frac{4}{T_2}\varphi + \frac{4}{T_2}\frac{\varphi}{\sqrt{N_1}}\sqrt{|N|}, \quad \varphi = \frac{\varepsilon\varepsilon_0|\tilde{E}|^2}{4\hbar\omega}, \quad (\Pi\,4)$$

$$N_1 = \frac{6\varepsilon\varepsilon_0\hbar\omega}{|d_{k,k-1}|^2}, \qquad \frac{4}{T_2}\frac{\varphi}{\sqrt{N_1}} = \frac{4\theta_2}{\omega T_2}\omega.$$

Из (3) с учетом (П 1) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2\frac{\varphi}{T_2} - \frac{\varphi}{\tau_c} - 2\frac{\Theta_1}{\omega T_2}\varphi, \qquad N < 0, \tag{П 5}$$

где при выводе (П 5) учтено, что в случае $\tilde{P} \sim \sim \exp(-i\Theta_2 t)$ в правой части первого уравнения нужно ω заменить на $(\omega + \Theta_2)$.

Рассмотрим случай $N \geq 0$. В этом случае из (37) с учетом (39) получаем

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N - N_0}{T_1} = -4\omega\frac{\varphi}{\sqrt{N_1}}\sqrt{N}, \tag{П 6}$$

где имеет место

$$\tilde{P} \propto \exp(i\Theta_1 t), \quad \partial\varphi/\partial t = 2\varphi/\Theta_2 - \varphi/\tau_c,$$

$$\Theta_2 = \frac{\omega}{\sqrt{N_1}}\sqrt{N}. \tag{П 7}$$

Из (П 6) и (П 7) с учетом (5) при выполнении условий $N \geq 0$, $T_1 \to \infty$, $\tau_c \to \infty$ следует закон сохранения энергии $\varphi + N/2 = \text{const}$. Закон сохранения также следует из (П 4) и (П 5) при выполнении условия $N < 0$.

Список литературы

[1] *Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., Lakhtakia A., Yevtushenko O.M., Gusakov A.V.* // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 60. N 24. P. 17136–17149.
[2] *Kibis O.V., Portnoi M.E.* // Tech. Phys. Lett. 2005. N 31. P. 671–672.
[3] *Kibis O.V., Kibis O.V., Parfitt D.G.W., Portnoi M.E.* // Phys. Rev. B. 2005. V. 71. N 3. P. 035 411(1–5).
[4] *Садыков Н.Р. Скоркин Н.А.* // ЖТФ. Т. 83. Вып. 5. С. 1–5.
[5] *Batrakov K.G., Kibis O.V., Kuzhir P.P., da Costa M.R., Portnoi M.E.* // J. Nanophotonics. 2010. Vol. 4. P. 041 665-1–041 665-12.
[6] *Shuba M.V., Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., Thomson C., Lakhtakia A.* // Phys. Rev. B. 2009. Vo. 79. N 15. P. 155 403(17).
[7] *Садыков Н.Р.* // ТМФ. 2013 (принят в печать).
[8] *Kibis O.V., da Costa M.R., Portnoi M.E.* // Nano Lett. 2007. Vol. 7. P. 3414–3417.
[9] *Portnoi M.E., Kibis O.V., da Costa M.R.* // Superlattices and Microstructures. 2008. Vol. 43. P. 399–407.
[10] *Садыков Н.Р., Скоркин Н.А.* // ФТП. 2012. Т. 46. Вып. 2. С. 168–173.
[11] *Садыков Н.Р., Скоркин Н.А., Ахлюстина Е.А.* // ФТП. 2013. Т. 47. Вып. 9. С. 1258–1263.
[12] *Садыков Н.Р., Скоркин Н.А.* // Оптика атмосферы и океана. 2012. Т. 25. No 4. С. 344–348.
[13] *Садыков Н.Р., Скоркин Н.А.* // Оптика атмосферы и океана. 2013. Т. 26. № 2. С. 160–165.
[14] *Белоненко М.Б., Глазов С.Ю., Мещеряков Н.Е.* // ФТП. 2010. Т. 44. Вып. 9. С. 1248–1253.
[15] *Гарнов С.В., Щербаков И.А.* // УФН. 2011. Т. 181. № 1. С. 97–102.
[16] *Садыков Н.Р., Скоркин Н.А.* // ФТП. 2012. 2012. Т. 46. Вып. 6. С. 809–814.
[17] *Садыков Н.Р., Скоркин Н.А.* // ФТП. 2012. Т. 46. Вып. 8. С. 1043–1048.
[18] *Slepyan G.Ya., Shuba M.V., Maksimenko S.A.* // Phys.Rev. B. 1998. Vol. 57. P. 9485–9497.
[19] *Месяц Г.А., Яландин М.И.* // УФН. 2005. Т. 175. № 3. С. 225–246.
[20] *Месяц Г.А.* // УФН. 2006. Т. 176. № 10. С. 1070–1091.
[21] *Дьячков П.Н.* Электронные свойства и применение нанотрубок. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. 488 с.
[22] *Slepyan G.Ya., Shuba M.V., Maksimenko S.A., Lakhtakia A.* // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 73. P. 195 416.
[23] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 8. Квантовая механика. М.: Мир, 1966. С. 528.
[24] *Пантел Р., Путхов Г.* Основы квантовой электроники. М.: Мир, 1972. 384 с.
[25] *West L.C., Eglash S.J.* // Appl. Phys. Lett. 1985. Vol. 47. P. 1257–1260.
[26] *Казаринов Р.Ф., Сурис Р.А.* // ФТП. 1971. Т. 5. С. 997–800.
[27] *Helm M., England P., Colas E., DeRosa F., Allen S.J.* // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63. P. 74–77.
[28] *Казаринов Р.Ф., Сурис Р.А.* // ФТП 1972. Т. 6. Вып. 1. С. 148–162.
[29] *Faist J., Capasso E., Sivico D.* // Science. 1994. Vol. 264. P. 553–556.
[30] *Zhang D., Yang R.Q., Lin C.-H.* et al. // Appl. Phys. Lett. 1998. Vol. 72. N 18. P. 2220–2222.
[31] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
[32] *Gmachl C., Tredicucci A., Sivco D.L., Hutchinson A.L., Capasso F., Cho A.Y.* // Science. 1999. Vol. 286. P. 749–752.