01

Релятивистские пондеромоторные силы в поле мощного лазерного излучения

© А.Х. Кастильо, В.П. Милантьев

Российский университет дружбы народов,
117198 Москва, Россия
e-mail: vmilantiev@sci.pfu.edu.ru

(Поступило в Редакцию 2 августа 2013 г.
В окончательной редакции 19 декабря 2013 г.)

Рассмотрено движение релятивистской заряженной частицы в поле мощного лазерного излучения в виде гауссова пучка произвольной моды. Использовано разложение вектора-потенциала поля излучения по малому параметру, которым служит отношение длины волны к сужению гауссова пучка. Отмечена особенность процедуры усреднения по фазам гауссовых пучков высоких мод. Получены усредненные уравнения движения частицы и общее выражение для пондеромоторной релятивистской силы в случае излучения круговой поляризации. Показано, что релятивистские эффекты ослабляют усредненное воздействие мощного лазерного излучения на частицу.

Введение

Усредненные силы, действующие на заряженную частицу в высокочастотном (ВЧ) электромагнитном поле, принято называть пондеромоторными. В работе [1] было показано, что в монохроматическом ВЧ-поле с напряженностью $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ на частицу с зарядом e массой m действует усредненная сила $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \equiv -\nabla \frac{e^2|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2}{4m\omega^2}$, получившая название силы Гапонова–Миллера. Выражение для этой силы справедливо при условии нерелятивистского движения частицы, при этом ВЧ-поле считается достаточно слабым. Это означает, что амплитуда осцилляторной скорости частицы в ВЧ-поле мала по сравнению со скоростью света c, так что параметр $g = e|\mathbf{E}|/mc\omega \ll 1$. В работе [2], по-видимому, впервые было дано релятивистское обобщение силы Гапонова–Миллера. Было показано, что пондеромоторная сила, как и в нерелятивистском приближении, имеет потенциальный характер с потенциалом $U = m^*c^2$, где $m^* = m\sqrt{1 + A^2}$ — „эффективная масса" частицы, при этом $A^2 = \left(\frac{e}{mc\omega}\right)^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle$. Угловые скобки означают усреднение по многим периодам колебаний. В дальнейшем проблема релятивистских пондеромоторных сил рассматривалась во многих работах [3–10]. Анализ структуры усредненных сил показал, что в некоторых условиях эти силы не имеют потенциального характера и могут зависеть от $\langle \mathbf{E}^4 \rangle$ [6]. Было показано также, что в поле мощного лазерного излучения пондеромоторная сила зависит от поляризации волны [5,10]. В работе [5] вектор напряженности электрического поля в нулевом приближении задавался в виде плоской волны, а в [10] — последовательно в приближении геометрической оптики. Между тем наиболее адекватным считается описание лазерного излучения в квазиоптическом приближении. В этом приближении лазерное излучение задается в виде гауссовых пучков, при этом наиболее изученным является случай гауссова пучка низшей моды [4]. В таком поле интенсивность излучения максимальна на оси пучка. Поэтому пондеромоторные силы уводят частицы от оси, что приводит к разбуханию ускоряемого пучка частиц в радиальном направлении. В этой связи представляет интерес движение частиц в поле гауссова пучка более высоких мод.

В приближении квазиоптики масштабы неоднородности вдоль и поперек направления распространения волны являются различными [11,12]. В качестве характерного поперечного масштаба принимается сужение пучка a — его размер в фокальной плоскости. В направлении распространения волны (оси z) характерным линейным масштабом является рэлеевская длина $z_R = ka^2/2$, определяющая дифракционное расплывание волнового пучка. Здесь $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ — волновое число, ω — частота волны, c — скорость света. Наиболее разработанной является теория гауссовых пучков в параксиальном приближении, когда характерный дифракционный угол [11,12]

$$\vartheta = \lambda/\pi a = a/z_R \ll 1.$$

Таким образом, в этом приближении существует малый параметр

$$\mu = 2/ka \ll 1, \tag{1}$$

при этом $a/z_R = \mu$.

Мощное лазерное излучение является импульсным, что обычно учитывается простым умножением выражения для гауссова пучка на некоторую импульсную функцию. Это возможно в случае импульсов, длина которых превышает рэлеевскую длину. Однако такая процедура недостаточно корректна в случае очень коротких импульсов (сильно сфокусированного излучения) [13,14].

В настоящей работе рассматривается релятивистское движение заряженной частицы в поле лазерного гауссова пучка произвольной моды в случае достаточно длинных импульсов. Проводится усреднение уравнений движения по методу Боголюбова и указываются особенности усреднения в случае лазерного излучения высших мод. Получено выражение для усредненной силы, из которого следует, что при последовательном учете релятивистских эффектов воздействие на частицу мощного лазерного излучения заметно ослабляется.

Поле лазерного излучения

Поле лазерного излучения в вакууме обычно описывается с помощью вектора-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющего волновому уравнению [15]:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

при условии кулоновской калибровки

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{2a}$$

Вектор-потенциал электромагнитного излучения, распространяющегося в вакууме в направлении оси z, будем представлять в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \big(\mathbf{A}_0(\mathbf{r})/2\big)\exp(i\theta) + c.c. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда, $\theta = kz - \omega t$ — фаза волны, сокращение $c.c.$ обозначает комплексно сопряженные величины.

Компоненты векторов магнитного и электрического полей определяются с помощью известных формул [15]

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

С учетом (3) из волнового уравнения (2) следует уравнение для комплексной амплитуды $\mathbf{A}_0$ [11]

$$\Delta_\perp\mathbf{A}_0 + 2ik\frac{\partial\mathbf{A}_0}{\partial z} + \frac{\partial^2\mathbf{A}_0}{\partial z^2} = 0.$$

Здесь $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по поперечным координатам (x, y). Чтобы определить относительный порядок членов этого уравнения, введем безразмерные пространственные координаты $(X, Y, Z) = (x/a, y/a, z/z_R)$. Тогда с учетом определения (1) уравнение для комплексной амплитуды $\mathbf{A}_0$ принимает вид

$$\Delta_\perp\mathbf{A}_0 + 4i\frac{\partial\mathbf{A}_0}{\partial Z} + \mu^2\frac{\partial^2\mathbf{A}_0}{\partial Z^2} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по поперечным координатам (X, Y). Видно, что последний член в уравнении (4) является малым порядка μ^2 по сравнению с предыдущими членами. Из уравнения (4) следует, что вектор $\mathbf{A}_0$ можно представлять в виде разложения по четным степеням параметра μ:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^0 + \mu^2\mathbf{A}_0^2 + \ldots$$

В нулевом приближении лазерное излучение можно рассматривать как поперечные электромагнитные волны. Поэтому вектор $\mathbf{A}_0^0$ имеет только поперечные компоненты $\mathbf{A}_0^0 \equiv \mathbf{A}_{0\perp}^0$, а продольная составляющая отсутствует: $A_{0z}^0 = 0$. В общем уравнение (4) следует рассматривать как уравнение для поперечных составляющих вектора $\mathbf{A}_0$ не только в нулевом, но и в последующих приближениях. Это связано с тем, что должно соблюдаться условие кулоновской калибровки (2a). Из этого условия при заданных компонентах $\mathbf{A}_{-\perp}^0, \mathbf{A}_{0\perp}^2$ последовательными приближениями можно определить продольные компоненты вектора-потенциала.

Таким образом, согласно (4), вектор $\mathbf{A}_{0\perp}^0$ в нулевом приближении описывается параболическим уравнением

$$\Delta_\perp\mathbf{A}_{0\perp}^0 + 4i\frac{\partial\mathbf{A}_{0\perp}^0}{\partial Z} = 0.$$

В аксиально-симметричном случае это уравнение имеет решение в виде гауссова пучка m-й моды [12]:

$$\mathbf{A}_{0\perp}^0 \to \mathbf{A}_{0\perp m}^0(r, z) = \frac{\mathbf{A}_{0m}^0(0)}{(1 + iZ)^{m+1}} L_m(\xi)\exp(-\xi).$$

Здесь $\mathbf{A}_{0m}^0(0)$ — амплитуда поля в фокусе на оси пучка (оси z), $Z \equiv z/z_R$ — безразмерная дифракционная длина, параметр $\xi = \rho^2/(1 + iZ)$, $\rho \equiv r/a$, r — расстояние от оси пучка, $L_m(\xi)$ — полином Лагерра порядка m. Таким образом, с учетом определения (3) получаем, что гауссов пучок m-й моды в нулевом приближении описывается формулой

$$\mathbf{A}_{\perp m}^0(r, z, t) = \{\mathbf{A}_m(r, z)/2\}\exp(i\psi_m) + c.c. \tag{5}$$

Здесь комплексная амплитуда m-й моды

$$\mathbf{A}_m(r, z) = \frac{\mathbf{A}_{0m}^0(0)}{(1 + Z^2)^{(m+1)/2}} L_m(\xi)\exp\{-\rho^2/(1 + Z^2)\}, \tag{5a}$$

фаза

$$\psi_m = \theta + \rho^2 Z/(1 + Z^2) - (m + 1)\chi. \tag{5b}$$

$$\chi = \operatorname{arctg} Z.$$

Полином Лагерра порядка m в общем определяется формулой [16]

$$L_m(\xi) = \sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\Gamma^2(m + 1)}{\Gamma^2(s + 1)\Gamma(m - s + 1)}\xi^s,$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция. Поскольку аргумент $\xi = \frac{\rho^2}{(1+Z^2)^{1/2}}\exp(-i\chi)$ является комплексным, то в каждом члене полинома Лагерра содержится фазовый множитель. Поэтому формулу (5) необходимо уточнить:

$$\mathbf{A}_{\perp m}^0(r, z, t) = \sum_{s=0}^{m}\{\mathbf{A}_{ms}(r, z)/2\}\exp(i\psi_{ms}) + c.c. \tag{6}$$

Здесь введены действительные амплитуды

$$\mathbf{A}_{ms}(r, z) = \frac{\mathbf{A}^0_{0m}(0)}{(1+Z^2)^{(m+1)/2}} \frac{(-1)^s\Gamma^2(m+1)}{\Gamma^2(s+1)\Gamma(m-s+1)}$$

$$\times \frac{\rho^{2s}}{(1+Z^2)^{s/2}} \exp\{-\rho^2/(1+Z^2)\}, \qquad (6a)$$

фазы

$$\psi_{ms} = \psi_m - s\chi. \qquad (6b)$$

Рассмотрим теперь условие калибровки (2a), предполагая, что продольная составляющая вектора-потенциала имеет вид, аналогичный (6):

$$\nabla_\perp \mathbf{A}_{\perp ms} + i\mathbf{A}_{\perp ms}\nabla_\perp\psi_{ms} + \frac{\partial A_{z\,ms}}{\partial z}$$

$$+ ik\{1 + o(\mu^2)\}A_{z\,ms} = 0. \qquad (7)$$

Отсюда следует, что продольную составляющую вектора-потенциала можно представлять в виде разложений по нечетным степеням параметра μ:

$$A_{z\,ms} = \mu A^1_{z\,ms} + \mu^3 A^3_{z\,ms} + \ldots$$

В частности,

$$A^1_{zm}(r, z, t) = \sum_{s=0}^{m}\{A^z_{ms}(r, z)/2\}\exp(i\psi_{ms}) + c.c., \qquad (8)$$

где комплексные амплитуды

$$A^z_{ms} = \frac{i}{k}\{\nabla_\perp \mathbf{A}_{ms} + i\mathbf{A}_{ms}\nabla_\perp\psi_m\}.$$

Будем далее рассматривать излучение круговой поляризации. В этом случае, согласно (6), можно положить

$$A^0_{mx}(r, z, t) = \sum_{s=0}^{m} A_{ms}(r, z)\sin\psi_{ms},$$

$$A^0_{my}(r, z, t) = \sum_{s=0}^{m} A_{ms}(r, z)\cos\psi_{ms}. \qquad (9)$$

Действительные амплитуды $A_{ms}(r, z)$ определяются формулой (6a). Выражение для продольной составляющей вектора-потенциала в первом приближении следует из (8):

$$A^1_{zm}(r, z, t) = \sum_{s=0}^{m}\{A^z_{1ms}(r, z)\cos\psi_{ms} + A^z_{2ms}(r, z)\sin\psi_{ms}\}, \qquad (10)$$

где

$$A^z_{1ms} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial A_{ms}}{\partial x} - A_{ms}\frac{\partial\psi_m}{\partial y}\right),$$

$$A^z_{2ms} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial A_{ms}}{\partial y} + A_{ms}\frac{\partial\psi_m}{\partial x}\right). \qquad (10a)$$

Таким образом, вектор-петенциал в нулевом приближении имеет компоненты $\mathbf{A}^0_m = (A^0_{mx}, A^0_{my}, 0)$, а в первом приближении $\mathbf{A}^1_m = (0, 0, A^1_{zm})$.

Наличие малого параметра μ означает, что комплексные амплитуды вектора-потенциала $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ мало изменяются на расстоянии порядка сужения пучка a и рэлеевской длины z_R. При этом предполагается, что фаза волны $\theta = kz - \omega t$ является „быстро“ меняющейся величиной. Это позволяет разделить движение частицы на быстрые осцилляции в поле волны и медленное усредненное движение.

Уравнения движения заряженной частицы

В случае мощного лазерного излучения параметр $g = e|\mathbf{E}|/mc\omega$, возникающий в уравнениях движения частицы, не является малым, и может даже превышать единицу. Например, в случае излучения с длиной волны $\lambda = 1$ мкм и интенсивностью около 10^{18} Вт/см^2 параметр $g \approx 1$. Поэтому процедура усреднения уравнений движения частицы возможна с помощью разложений лишь по параметру μ. В уравнениях движения параметр g определяет „большую“ амплитуду быстрых осцилляций частицы. В этом случае непосредственно проводить усреднение нельзя [17]. Надо сначала в правой части уравнений движения исключить „большие“ быстро осциллирующие члены [10]. Для этого необходимо ввести замену вектора импульса $\mathbf{p}$, означающую переход к обобщенному вектору импульса [16]:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} + \mathbf{p}_E. \qquad (11)$$

Здесь $\mathbf{p}_E \equiv \frac{e}{c}\mathbf{A}$ — вектор импульса, приобретаемого частицей в поле волны. Компоненты вектора-потенциала задаются формулами (9), (10). Хотя продольная составляющая (10) на порядок меньше поперечных компонент, но в целях единообразия удобно использовать общее определение (11). В этом случае уравнения движения частицы принимают вид

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = -\frac{1}{2m\gamma}\nabla\mathbf{p}^2_E + \frac{1}{m\gamma}(\boldsymbol{\pi}\nabla\mathbf{p}_E + [\boldsymbol{\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{p}_E]). \qquad (12)$$

Здесь релятивистский фактор

$$\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/(mc)^2}. \qquad (13)$$

Отметим, что правая часть уравнений (12) не представляет собой силу, действующую на частицу. Однако усредненные по быстрым осцилляциям поля излучения значения истинного и обобщенного импульсов частицы совпадают: $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\boldsymbol{\pi}}$. Поэтому правую часть уравнения для усредненного обобщенного импульса можно рассматривать как усредненную (пондеромоторную) силу, действующую на частицу в поле мощного излучения.

Учитывая формулы (9), (10), запишем уравнения (12) в явном виде

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}_\perp}{dt} = -\frac{1}{2m\gamma}\nabla_\perp|p_m^E|^2 + \frac{1}{m\gamma}\sum_{s=0}^{m}\{(\pi_x\sin\psi_{ms}+\pi_y\cos\psi_{ms})\nabla_\perp p_{ms}^E + p_{ms}^E(\pi_x\cos\psi_{ms}-\pi_y\sin\psi_{ms})\nabla_\perp\psi_m\} + o(\mu^2), \quad (14)$$

$$\frac{d\pi_z}{dt} = -\frac{1}{2m\gamma}\frac{\partial|p_m^E|^2}{\partial z} + \frac{k\pi_z}{m\gamma}\sum_{s=0}^{m}(-p_{1ms}^z\sin\psi_{ms} + p_{2ms}^z\cos\psi_{ms}) + \frac{1}{m\gamma}\sum_{s=0}^{m}\left\{(\pi_x\sin\psi_{ms}+\pi_y\cos\psi_{ms})\frac{\partial p_{ms}^E}{\partial z} + p_{ms}^E(\pi_x\cos\psi_{ms}-\pi_y\sin\psi_{ms})\frac{\partial\psi_{ms}}{\partial z}\right\} + o(\mu^3). \quad (15)$$

Для радиуса-вектора частицы имеем уравнение

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\boldsymbol{\pi}_\perp - \mathbf{p}_E)/m\gamma. \quad (16)$$

В этих уравнениях введены обозначения

$$\boldsymbol{\pi}_\perp \equiv (\pi_x, \pi_y),$$

$$\mathbf{p}_m^E = \frac{eA_m(0)}{c(1+Z^2)^{(m+1)/2}}L_m(\xi)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right\},$$

$$p_{ms}^E = \frac{eA_{ms}}{c}, \quad p_{1,2ms}^z = eA_{1,2ms}^z/c,$$

$$|p_m^E|^2 \equiv p_m^E p_m^{E^*} \equiv \sum_{s=0}^{m}\sum_{s'=0}^{m} p_{ms}^E p_{ms'}^E\cos(s-s').$$

Система уравнений (14)–(15) должна быть дополнена уравнением для парциальных фаз ψ_{ms}, определяемых соотношением (6b):

$$\frac{d\psi_{ms}}{dt} = -\omega\left(1-\frac{v_z}{c}\right) - \frac{m+s+1}{(1+Z^2)z_R}v_z + \rho^2\frac{1-Z^2}{(1+Z^2)^2 z_R}v_z + \frac{2Z}{1+Z^2}\boldsymbol{\rho}\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \quad (17)$$

Для усреднения уравнений движения по быстрым осцилляциям необходимо считать фазы ψ_{ms} быстро меняющимися переменными. В этом случае первый член в уравнении (17) должен быть „большим" [17]. Однако при релятивистском движении частицы разность $1 - v_z/c$ может быть малой, но такой малой, чтобы сохранялось быстрое изменение фаз. Поэтому при достаточно „большой" частоте волны следует полагать [4], что разность $\left|1-\frac{v_z}{c}\right| \geq \mu$. Тогда первый член остается „большим", порядка $1/\mu$, а фазы ψ_{ms} можно рассматривать как быстро меняющиеся переменные. Остальные члены в уравнении (17) являются поправочными: второй и третий — порядка μ^2, а последний — порядка μ.

Разность $1-\frac{v_z}{c}$ можно представить в виде $1-\frac{v_z}{c} = \frac{G}{\gamma}$, где величина $G \equiv \gamma - \frac{p_z}{mc}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{eE_z^1}{mc\gamma}G - \frac{1}{m^2c\gamma}(\boldsymbol{\pi}_\perp - \mathbf{p}_\perp^E)\nabla_\perp p_z^E - \frac{1}{m^2c\gamma}\sum_{s=0}^{m}\left\{(\pi_x - p_x^E)\sin\psi_{ms} + (\pi_y - p_x^E)\cos\psi_{ms}\right\}\frac{\partial p_{ms}^E}{\partial z}. \quad (18)$$

Здесь $E_z^1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_{zm}^1(r,z,t)}{\partial t}$ — продольное электрическое поле, $p_z^E \equiv eA_{zm}^1/c$. Видно, что в нулевом приближении величина G не зависит от быстрых фаз и является „медленно" меняющейся величиной.

Входящий в уравнения движения частицы релятивистский фактор (13) с учетом замены (11) определяется формулой

$$\gamma = \gamma_0\sqrt{\frac{1 - 2\sum_{s=0}^{m}\{p_{ms}^E(\pi_x\sin\psi_{ms}+\pi_y\cos\psi_{ms}) + }{+\,\pi_z(p_{ms}^{z1}\cos\psi_{ms} + p_{ms}^{z2}\sin\psi_{ms})\}/(m\gamma_0 c)^2}},$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{1 + (\boldsymbol{\pi}^2 + |p_m^E|^2)/(mc)^2}. \quad (19)$$

Величина γ_0 является „медленно" меняющейся, тогда как фактор γ содержит быстро осциллирующие слагаемые. Обычно при рассмотрении релятивистского движения частицы в поле волны полагают, что $\gamma \cong \gamma_0$ [4]. Однако в общем это неверно. Можно представить выражение (19) в виде биномиального разложения. Ограничимся далее лишь первым членом этого разложения, что фактически означает учет слаборелятивистских добавок. В этом случае

$$\gamma \approx \gamma_0\left\{1 - \sum_{s=0}^{m}\{p_{ms}^E[(\pi_x\sin\psi_{ms}+\pi_y\cos\psi_{ms}) + \pi_z(p_{ms}^{z1}\cos\psi_{ms} + p_{ms}^{z2}\sin\psi_{ms})]/(m\gamma_0 c)^2\right\}. \quad (19a)$$

Легко найти, что изменение энергии частицы описывается уравнением

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\omega}{\gamma(mc)^2}\left\{\pi_x p_x^E - \pi_y p_y^E - \pi_z\sum_{s=0}^{m}(p_{1ms}^z\sin\psi_{ms} - p_{2ms}^z\cos\psi_{ms})\right\} + o(\mu^2). \quad (20)$$

Уравнение для продольного движения частицы (15) не отличается по форме от уравнений (14) для поперечного движения. Однако между ними имеется существенное различие. Это связно с тем, что в квазиоптическом приближении производные по поперечным и продольным координатам имеют разный порядок. Поэтому при описании поперечного движения существенны члены первого приближения, тогда как в уравнении (15) необходимо использовать второе приближение в разложениях по степеням параметра μ. Другая особенность заключается в том, что в последнем члене в уравнении (15) содержится „большая“ быстро осциллирующая часть, пропорциональная амплитуде поля волны, поскольку $\frac{\partial \psi_{ms}}{\partial z} = k\{1 + o(\mu^2)\}$. В этом случае проводить усреднение уравнений движения по быстрым осцилляциям в общем невозможно [17], и необходимо сначала исключить „большие“ быстро осциллирующие члены [10]. Таким образом, продольное движение частицы в поле мощности излучения требует отдельного рассмотрения. Чтобы исключить в уравнении (15) быстро осциллирующие члены в „большой“ амплитудой, надо использовать уравнение (17), включая в него величину $G \equiv \gamma - \frac{p_z}{mc}$. Тогда вместо компоненты импульса π_z автоматически возникает новая переменная продольного импульса

$$\Pi_z = \pi_z + \frac{\boldsymbol{\pi}_\perp \mathbf{p}_\perp^E}{mcG}, \tag{21}$$

где $\mathbf{p}_\perp^E \equiv \frac{e}{c}\mathbf{A}_\perp$. Компоненты вектора-потенциала определяются формулами (9). Уравнение для величины Π_z оказывается довольно сложным. Однако если считать, что движение частицы в поперечной плоскости является слаборелятивистским, то задача существенно упрощается. В этом случае второй член в (21) следует рассматривать как осциллирующую добавку к продольному импульсу частицы, эволюция которого описывается уравнением (15).

Пондеромоторная сила мощного лазерного излучения

Система уравнений движения частицы вместе с уравнением (17) имеет стандартный вид для проведения усреднения по быстрой фазе по методу Боголюбова [17]. По этому методу проводится замена переменных: „точные“ динамические переменные частицы представляются в виде суммы сглаженных величин и быстро осциллирующих добавок с малыми амплитудами, порядка $\mu, \mu^2, \ldots$:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P} + \mu \mathbf{g}_{1p}(\mathbf{P}, \mathbf{R}, \alpha_{ms}) + \mu^2 \mathbf{g}_{2p}(\mathbf{P}, \mathbf{R}, \alpha_{ms}) + \ldots,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mu \mathbf{g}_{1r} + \mu^2 \mathbf{g}_{2r} + \ldots$$

Аналогичная замена производится для парциальных фаз

$$\psi_{ms} = \alpha_{ms} + \mu g_{1s}(\mathbf{P}, \mathbf{R}, \alpha_{ms}) + \mu^2 g_{2s} + \ldots$$

и для релятивистского фактора (полной энергии)

$$\gamma = \Gamma_0 + \mu g_{1\gamma} + \mu^2 g_{2\gamma} + \ldots$$

Сглаженными считаются усредненные по быстрой фазе величины: $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{r}}$, $\mathbf{P} = \bar{\boldsymbol{\pi}}$.

В результате усреднения получаются уравнения для сглаженных переменных $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, α_{ms}, не содержащих быстрых фаз, и явные выражения для быстро осциллирующих добавок в соответствующем приближении $\mathbf{g}_{ir}, \mathbf{g}_{ip}, g_{js}$. Далее рассмотрим лишь уравнения эволюции сглаженных компонентов вектора импульса, из которых следуют формулы для компонентов пондеромоторной силы. Выражения для быстро осциллирующих добавок не приводятся, поскольку они имеют довольно громоздкий вид.

Уравнения (14), (15) уже содержат „постоянные“ слагаемые, не зависящие от фаз. Последовательно проводя вычисления с учетом разложения (19a), получаем усредненные уравнения движения частицы

$$\frac{d\mathbf{P}_\perp}{dt} = -\frac{1}{2m\Gamma_0}\left\{1 - \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{2(m\Gamma_0 c)^2}\right\}\nabla_\perp |P_m^E|^2 + o(\mu^2). \tag{22}$$

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{1}{2m\Gamma_0}\left\{1 - \frac{\mathbf{P}_\perp^2}{2(m\Gamma_0 c)^2}\right\}\frac{\partial |P_m^E|^2}{\partial R_z} + o(\mu^3).$$

Оператор $\nabla_\perp$ и интенсивность поля излучения $|P_m^E|^2$ зависят от сглаженных координат $\mathbf{R}$, определяемых уравнениями

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V},$$

при этом по определению $\mathbf{V} = \mathbf{P}/m\Gamma_0$,

$$\Gamma_0 = \sqrt{1 + [\mathbf{P}^2 + |P_m^E(\mathbf{R})|^2]/(mc)^2}.$$

В уравнении для продольного движения опущены члены, считающиеся малыми в рассматриваемом случае слаборелятивистского движения в поперечной плоскости. Правые части уравнений (22) представляют собой искомые выражения для компонентов пондеромоторной силы. Обратим внимание, что в случае слабого электромагнитного поля усредненная сила является эффектом второго порядка в теории возмущений [1,6,7]. Усредненная сила мощного лазерного пучка в поперечном направлении есть эффект первого приближения, а в продольном направлении — эффект второго приближения.

Используем дальше соотношение $\Gamma_0 = \Gamma_E \Gamma_V$, где $\Gamma_V \equiv \equiv 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$, $\Gamma_E \equiv \sqrt{1 + |P_m^E|^2/(mc)^2}$. Тогда уравнения (22) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{mc^2}{\Gamma_V}\left\{1 - \frac{\mathbf{P}_\perp^2}{2(m\Gamma_0 c)^2}\right\}\nabla\Gamma_E. \tag{23}$$

Уравнения (23) отличаются от уравнений, полученных в работе [4], множителем с фигурными скобками. Этот множитель достаточно мал, однако вместе с релятивистским фактором Γ_V он указывает на ослабление усредненного воздействия лазерного излучения на частицу. Отметим, что в работе [4] фактор Γ_V неверно определяется как $\Gamma_V \equiv 1/\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}$.

Из уравнений (22) непосредственно следует, что средняя энергия системы „частица + излучение“ сохраняется с точностью до членов второго порядка

$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{P}^2/(mc)^2 + |P_m^E|^2/(mc)^2\} \equiv \frac{d\Gamma_0}{dt} = o(\mu^2). \qquad (24)$$

Такое уравнение в рассматриваемом приближении вытекает также при усреднении уравнения (20). Уравнение (24), собственно, служит основанием возможности ускорения частицы, инжектируемой в фокусе расходящегося лазерного гауссова излучения произвольной моды. Если же частица инжектируется в сходящийся гауссов пучок, то она в нем тормозится.

Заключение

Рассмотрено усредненное движение релятивистской заряженной частицы в поле мощного лазерного гауссова излучения произвольной моды. Специфика расчета заключается в том, что усреднение проводится по порциальным фазам гауссова пучка, зависящим от структуры его амплитуды. Показано, что при усреднении уравнения движения частицы в направлении распространения волны возникает трудность, связанная с наличием быстро осциллирующих членов с большой амплитудой. Эту трудность можно обойти, предполагая, что движение частицы в поперечной плоскости является слаборелятивистским, что вполне естественно для задач ускорения. Чтобы фаза волны была быстрой переменной, по которой можно проводить усреднение, необходимо считать, что скорость продольного движения не слишком близка к скорости света. При указанных предположениях получено выражение для релятивистской пондеромоторной силы, указывающее на ослабление усредненного воздействия на частицу мощного лазерного излучения. Отметим, что возможность ускорения частицы лазерным гауссовым излучением зависит от способа инжекции частицы в пучок. При инжекции в фокусе расходящегося гауссова пучка частица ускоряется, а при инжекции в сходящийся пучок частица тормозится. Это может быть использовано для генерации излучения.

Согласно формулам (22), пондеромоторная сила пропорциональна градиентам интенсивности гауссова излучения, которые пропорциональны интенсивности. Это согласуется с экспериментальными результатами [18]. Вместе с тем в силу гауссова характера изменения амплитуды поля действие усредненной силы заметно проявляется лишь на расстояниях порядка сужения пучка и рэлеевской длины.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 13-02-00645).

Список литературы

[1] *Гапонов А.В., Миллер М.А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 242–243; *Миллер М.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. С. 110–123.

[2] *Kibble T.* // Phys. Rev. 1966. Vol. 150. P. 1060–1069.

[3] *Bauer D., Mulser P., Steeb W.-H.* // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4622–4525.

[4] *Quesnel B., Mora P.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58 (3). P. 3719–3732.

[5] *Таранухин В.Д.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 117 (3). С. 511–516.

[6] *Серов А.В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 119 (1). С. 27–34; *Квантовая* электроника. 1999. Т. 26 (2). С. 179–182.

[7] *Битук Д.Р., Федоров М.В.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 4 (10). С. 1198–1209.

[8] *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* // Квант. электрон. 2009. Т. 39 (1). С. 68–72.

[9] *Милантьев В.П., Шаар Я.Н.* // ЖТФ. 2000. Т. 70 (8). С. 100–103.

[10] *Милантьев В.П., Кастильо А.Х.* // ЖЭТФ. 2013. Т. 143 (4). С. 642–651.

[11] *Davis L.W.* // Phys. Rev. A. 1979. Vol. 19 (3). P. 1177–1179.

[12] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.

[13] *Esarey E., Leemans W.D.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59 (1). P. 1082–1095.

[14] *Бочкарев С.Г., Быченков В.Ю.* // Квант. электрон. 2007. Т. 37 (3). С. 273–284.

[15] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 504 с.

[16] *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. С. 239.

[17] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

[18] *Асеев С.А., Миронов Б.Н., Миногин В.Г., Чекалин С.В.* // ЖЭТФ. 2011. Т. 139 (5). С. 894–898.