01

Подход Эйлера и прямое тензорное исчисление в задаче о физической природе кориолисовых эффектов

© *М.Е. Подольский, С.В. Черенкова*

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
E-mail: svchpar@list.ru

Поступило в Редакцию 28 апреля 2014 г.

В связи с изучением гидродинамики движущихся каналов рассмотрена задача о моменте кориолисовых сил инерции. Решение выполнялось в пространственной постановке. Выяснен физический смысл полученных формул. С этой целью использовались эйлеровский подход к описанию кинематики и аппарат прямого тензорного исчисления. Работа явилась основой для распространения известного турбинного уравнения Эйлера на общий случай пространственного движения и уточнения условий применимости формулы Гаусса–Остроградского.

Кориолисово ускорение $\mathbf{a}_c$ и момент кориолисовых сил инерции точки $\mathbf{M}_c$ определяются известными формулами

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}, \qquad \mathbf{M}_c = -m\mathbf{r} \times \mathbf{a}_c. \tag{1}$$

Здесь m, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{w}$ — масса, радиус-вектор и вектор относительной скорости точки, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

В [1] было показано, что в силу тождества

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \tag{2}$$

имеет место формула

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{u} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{w}), \tag{3}$$

где

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{4}$$

— переносная скорость точки.

В [1] было показано также, что

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{u})}{d\mathbf{r}}. \tag{5}$$

Еще один способ доказательства справедливости формы (5), отличный от использованного в [1], приводится ниже.

Так как

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot E, \tag{6}$$

где E — единичный тензор, то

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = [(\mathbf{w} \cdot E) \times \boldsymbol{\omega}] \times \mathbf{r} = \mathbf{w} \cdot [(E \times \boldsymbol{\omega}] \times \mathbf{r}]. \tag{7}$$

Принимая во внимание, что $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от $\mathbf{r}$ и что, с учетом (3),

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} = \frac{d}{d\mathbf{r}}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -E \times \boldsymbol{\omega}, \tag{8}$$

из (7) получим

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{w} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \times \mathbf{r}.$$

А поскольку [2]

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = \frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{r})}{d\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}} \times \mathbf{u} = \frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{r})}{d\mathbf{r}} + E \times \mathbf{u},$$

то

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = -\mathbf{w} \cdot \frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{r})}{d\mathbf{r}} - \mathbf{w} \cdot E \times \mathbf{u},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{u})}{d\mathbf{r}} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$$

а это и есть формула (5).

Из (1), (3) и (5) вытекает формула (см. также [1])

$$\mathbf{M}_c = -m \left[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{u})}{d\mathbf{r}}\right]. \tag{9}$$

Ее правая часть состоит из двух слагаемых. По существу, из двух слагаемых состоит и правая часть фигурирующей в (1) формулы для $\mathbf{a}_c$, но если в этой формуле оба слагаемых равны друг другу, то в формуле (9) они разные.

Физическая (точнее, кинематическая) природа произведений $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}$ хорошо известна. Их появление в формуле для $\mathbf{a}_c$ объясняется двумя причинами. Во-первых, в результате вращения тела изменяется угловое положение линии действия вектора скорости; во-вторых, в процессе перемещения точки по телу изменяется ее переносная скорость.

В [3] и [4] на основе подхода Эйлера было показано, что для учета этих факторов, кроме указанной выше формулы (1), для $\mathbf{a}_c$ может быть использована формула

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}} + \mathbf{w} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}, \tag{10}$$

в которой первое слагаемое отвечает влиянию первого фактора, а второе — второго.

По аналогии с (10) можно получить формулу и для момента $\mathbf{M}_c$. Исходить будем из того, что момент сил инерции — это взятая со знаком минус производная по времени от кинетического момента. Поэтому причины возникновения $\mathbf{M}_c$ те же, что и в случае кориолисова ускорения, и, следовательно, формулу для $\mathbf{M}_c$ можно записать в виде

$$\mathbf{M}_c = -m\left[\mathbf{u} \cdot \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{w})}{d\mathbf{r}} + \mathbf{w} \cdot \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{u})}{d\mathbf{r}}\right]. \tag{11}$$

Поскольку, как показано в [3,4], в условиях расматриваемой задачи

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{w})}{d\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{w}),$$

то формула (11) полностью совпадает с (9).

Совпадение формул (11) и (9), во-первых, подтверждает правомерность физических трактовок, на основе которых была получена формула (11); во-вторых, оно свидетельствует об эффективности этих трактовок: второе слагаемое в (11) удалось записать сразу, без, в достаточной степени искусственных, преобразований, которые использовались при выводе (5).

Тот факт, что во втором слагаемом в формуле (11) скорость $\mathbf{w}$ скалярно умножается на производную $d(\mathbf{r} \times \mathbf{u})/(d\mathbf{r})$, имеет принципиальное значение, обеспечивая возможность дальнейших преобразований, в результате которых основное уравнение теории турбомашин (турбинное уравнение Эйлера) удается распространить на общий случай пространственного движения.

В этой же связи необходимо отметить, что анализ формулы (11) выявил (авторы предполагают это показать в следующей статье) один парадоксальный эффект, связанный с условиями применимости тензорного аналога формулы Гаусса–Остроградского. Значение этого результата определяется тем, что он позволяет избежать серьезных ошибок при выполнении гидродинамических расчетов движущихся каналов.

В заключение хотелось бы обратить винимание еще на одно обстоятельство — роль, которую в выяснении физического смысла кориолисовых эффектов сыграло сочетание подхода Эйлера и методов прямого тензорного исчисления.

Список литературы

[1] *Podolsky M.E.* Coriolis inertia forces in the problem of Euler's turbine equation // Proc. of XLI Summer School-Conference „Advanced Problems in Mechanics“. St. Peterburg, 2013. P. 439–443.

[2] *Подольский М.Е.* Физико-механические основы и некоторые инженерные приложения прямого тензорного исчисления. Монография. СПб.: Изд-во СПбГМТУ, 2011. 466 с.

[3] *Podolsky M.E.* Field description of rotational motion // Proc. of XLI Summer School-Conference „Advanced Problems in Mechanics“. St. Peterburg, 2013. P. 431–437.

[4] *Подольский М.Е.* О методе Эйлера в применении к кинетике и динамике твердого тела // Теория механизмов и машин. СПб., 2013. Т. 11. № 2 (22). С. 38–45.