

05
Спектр нормальных волн в одномерных магнонных кристаллах

© Н.Ю. Григорьева, Б.А. Калинин

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: natalygri69@gmail.com

(Поступила в Редакцию 22 апреля 2014 г.)

Построена общая теория спектра нормальных волн, распространяющихся в магнитных структурах с периодически модулированными параметрами. На основе метода тензорных функций Грина, теории спин-волновых мод и теоремы Флоке–Блоха записан общий вид дисперсионной зависимости для дипольно-обменных спиновых волн, распространяющихся в одномерном магнонном кристалле, образованном произвольной пространственной периодической модуляцией всех магнитных и геометрических параметров, входящих в уравнения Максвелла и уравнение Ландау–Лифшица. Предложен оригинальный способ учета произвольного профиля модуляции выбранных параметров. На простейшем примере описания экспериментального спектра динамического магнонного кристалла продемонстрирована эффективность теории.

Работа поддержана грантами РФФИ и Министерства образования и науки РФ.

1. Введение

В последние годы возрос интерес к изучению искусственно созданных наноразмерных магнитных периодических структур — магнонных кристаллов [1–9]. Этот интерес обусловлен широкими возможностями статического и динамического управления дисперсионными характеристиками магнитных волноведущих структур. Статическое управление может осуществляться с помощью создания постоянных вариаций магнитных, электрических и геометрических параметров структуры вдоль направления распространения спиновой волны [1–7]. При динамическом управлении изменение параметров волноведущей структуры осуществляется непосредственно во время распространения спиновой волны [8,9] путем создания изменяющихся во времени периодических неоднородностей. В обоих случаях наличие периодической вариации одного или нескольких параметров волноведущей структуры приводит к новым физическим эффектам [5–8].

Обзор литературы показывает, что теоретическому описанию распространения спиновых волн в магнонных кристаллах посвящено большое количество работ [10–17]. Однако в большинстве из них авторы обычно рассматривают периодическое изменение одного или максимум двух параметров вдоль направления распространения спиновой волны, используя при этом ряд приближений [11–14]. Это связано с трудностями расчета в рамках теории плоских волн, обычно используемой авторами. Рассмотрение волноведущей структуры при модуляции только одного параметра позволяет выявить основные закономерности распространения спиновых волн в некоторых частных практически важных случаях.

В последние годы появилось большое количество экспериментальных работ, которые показывают, что простые теории не могут описать все особенности распространения спиновых волн в реальных магнонных

кристаллах. Дело в том, что на практике обычно реализуются случаи, когда модуляция одного из параметров сопровождается модуляцией нескольких других параметров волноведущей структуры [14,18].

В настоящей работе предложен наиболее общий подход к описанию фундаментальных процессов распространения спиновых волн в волноведущих структурах с периодически пространственно-модулированными параметрами. Полученные в рамках теории спин-волновых мод точные дисперсионные соотношения описывают спектр нормальных мод в одномерных магнонных кристаллах любой природы. Общее решение представлено в матричной форме, удобной для дальнейшего анализа методом теории возмущений. В качестве примера дано описание спектра спиновых волн в динамическом магнонном кристалле, экспериментально исследованном в работе [9].

2. Описание теоретической модели

Рассмотрим периодически модулированный анизотропный ферритовый волновод толщиной L и шириной w (рис. 1). Волновод считается немагнитным до насыщения внешним магнитным полем \mathbf{H}_0 произвольного, но заданного направления. Направление внутреннего магнитного поля определяется равновесными углами φ и θ и совпадает с направлением равновесной намагниченности внутри волновода. Пространственная периодическая модуляция параметров осуществляется вдоль оси волновода ξ .

В рамках феноменологического подхода спектр нормальных волн в рассматриваемой волноведущей структуре может быть описан путем совместного интегрирования уравнения движения намагниченности Ландау–Лифшица (без учета диссипации энергии) и системы уравнений Максвелла с учетом соответствующих электродинамических и обменных граничных условий. Для

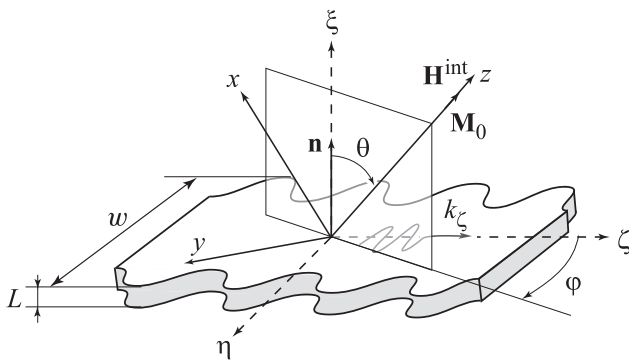


Рис. 1. Геометрия волноведущей структуры.

удобства дальнейшего рассмотрения наряду с системой координат $\xi\eta\zeta$, связанной с геометрией волновода, введем систему координат $x y z$, ось z которой совпадает с направлением равновесной намагниченности.

В гауссовой системе единиц уравнение движения намагниченности Ландау–Лифшица без учета диссипации записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}^{eff}(\mathbf{r}, t)], \quad (1)$$

где γ — гиромагнитное отношение для спина электрона, а эффективное магнитное поле $\mathbf{H}^{eff}(\mathbf{r}, t)$ включает в себя постоянное внутреннее магнитное поле $\mathbf{H}^{int}(\mathbf{r})$, поле неоднородного обменного взаимодействия $\mathbf{h}^{ex}(\mathbf{r}, t)$, переменное дипольное поле $\mathbf{h}^d(\mathbf{r}, t)$ и поле магнитной кристаллографической анизотропии $\mathbf{H}^a(\mathbf{r}, t)$. В случае рассмотрения структуры с периодически модулированными параметрами все компоненты эффективного магнитного поля и постоянная составляющая намагниченности $M_0(\mathbf{r})$ являются периодическими функциями ξ .

Поле неоднородного обменного взаимодействия в рамках феноменологического подхода может быть записано как

$$\mathbf{H}^{ex}(\mathbf{r}, t) = (\nabla \alpha(\mathbf{r}) \nabla) \mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где $\alpha(\mathbf{r}) = 2A(\mathbf{r})/M_0^2(\mathbf{r})$, $\sqrt{\alpha(\mathbf{r})}$ — обменная длина, а $A(\mathbf{r})$ — константа обменной жесткости.

В рамках метода тензорных функций Грина [19] решение уравнений Максвелла с соответствующими электродинамическими граничными условиями может быть представлено в виде интегральной связи переменного дипольного поля и намагниченности

$$\mathbf{h}^d(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{G}}^{\xi\eta\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{m}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3)$$

Тензорная функция Грина $\hat{\mathbf{G}}^{\xi\eta\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является характеристикой волноведущей структуры, зависящей только от геометрии волновода и диэлектрических свойств волноведущей среды. Поскольку тензорная функция Грина находится из решения уравнений Максвелла с соответствующими

электродинамическими граничными условиями, она не зависит от параметров, описывающих спин-волновую динамику, и ее периодическая вариация может быть обусловлена только периодическим изменением среды распространения электромагнитных волн. В качестве примеров назовем модуляцию геометрических размеров волновода, периодическое изменение диэлектрической проницаемости волновода или окружающей его среды, наличие или отсутствие металлических экранов вдоль направления распространения волны и др. Заметим, что в рамках описываемого здесь подхода все эти виды периодичности могут быть легко включены в рассмотрение. Более того, во многих случаях можно использовать уже известные функции Грина, вводя в готовые выражения периодичность изменения соответствующих параметров и геометрических размеров.

При линейном анализе поле магнитной кристаллографической анизотропии $\mathbf{H}^a(\mathbf{r}, t)$ выражается через сумму тензоров размагничивающих факторов всех видов анизотропии $\hat{\mathbf{N}}^a(\mathbf{r})$, присутствующих в структуре.

Решение уравнения движения намагниченности (1) будем искать в виде монохроматических волн $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$. Тогда после стандартной процедуры линеаризации получим следующее уравнение для амплитуды переменной намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$:

$$i\omega \mathbf{m}(\mathbf{r}) = -\gamma \left[\mathbf{m}(\mathbf{r}) \times \left(\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}) \mathbf{M}_0(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{N}}^a(\mathbf{r}) \mathbf{M}_0(\mathbf{r}) \right) \right] - \gamma \left[\mathbf{M}_0(\mathbf{r}) \times \left((\nabla \alpha(\mathbf{r}) \nabla) \mathbf{m}(\mathbf{r}) \right) + \mathbf{m}(\mathbf{r}) \left((\nabla \alpha(\mathbf{r}) \nabla) \mathbf{M}_0(\mathbf{r}) \right) \right] - \gamma \left[\mathbf{M}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}^d(\mathbf{r}) \right] + \gamma \left[\mathbf{M}_0(\mathbf{r}) \times \left(\hat{\mathbf{N}}^a(\mathbf{r}) \mathbf{m}(\mathbf{r}) \right) \right], \quad (4)$$

где $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r})$ — тензор размагничивающих факторов формы образца.

Векторное интегродифференциальное уравнение (4) записано в системе координат $x y z$, в которой вектор переменной намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ вследствие линейности задачи имеет только две компоненты: m_x и m_y . Переход от системы координат $\xi\eta\zeta$ к системе $x y z$ осуществляется с помощью последовательного применения ортогональных преобразований поворота вокруг осей ξ и η на углы ϕ и $(\theta - \pi/2)$ (см., например, [16]).

Для учета пространственной периодичности нормальных мод в периодически модулированном волноводе спиновых волн используем теорему Флоке–Блоха для уравнений с периодическими коэффициентами. При этом решение для переменной намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ и выражения для переменного дипольного поля $\mathbf{h}^d(\mathbf{r})$ могут быть представлены в виде произведения огибающей $\exp(-ik_\zeta \xi)$ и соответствующей периодической функции $\mathbf{f}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_k(\xi, \eta, \zeta + m\Lambda)$ [20]. Здесь Λ — период структуры. В свою очередь периодические функции $\mathbf{f}_k(\mathbf{r})$ могут быть разложены в ряд по пространственным

гармоникам

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = e^{-ik_\xi \xi} \mathbf{m}_k(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-iK_m \xi} \mathbf{m}(\xi, \eta; K_m),$$

$$\mathbf{h}^d(\mathbf{r}) = e^{-ik_\xi \xi} \mathbf{H}_k^d(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-iK_m \xi} \mathbf{h}^d(\xi, \eta; K_m), \quad (5)$$

где $K_m = k_\xi + k_m = k_\xi + 2m\pi/\Lambda$ — волновые векторы соответствующих пространственных гармоник, а k_ξ принимает значения в первой зоне Бриллюэна. Следует отметить, что пространственные гармоники сами по себе не являются решениями уравнения движения намагниченности. Решением является только их суперпозиция (5).

Следующим стандартным этапом решения системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами является разложение всех пространственно-периодических коэффициентов уравнения в ряд по пространственным гармоникам

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_{m'}(\xi, \eta) e^{-ik_{m'} \xi},$$

$$\mathbf{F}_{m'}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \mathbf{F}(\mathbf{r}) e^{ik_{m'} \xi} d\xi. \quad (6)$$

Здесь под $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ понимаются все пространственно-периодические коэффициенты в уравнении (4). В общем случае Фурье-амплитуды $\mathbf{F}_{m'}(\xi, \eta)$ могут быть получены либо аналитически путем прямого интегрирования по периоду структуры, либо численными методами (например, с помощью быстрого Фурье-преобразования).

Для простоты последующего изложения допустим, что изменения параметров структуры происходят с одним периодом и только по оси волновода, а в поперечном сечении волновода вариации отсутствуют. Тогда коэффициенты разложения $\mathbf{F}_{m'}(\xi, \eta) \equiv \mathbf{F}_{m'}$. Для основных типов периодичности (синусоида, меандр, трапеция) Фурье-коэффициенты $\mathbf{F}_{m'}$ хорошо известны.

3. Теория спин-волновых мод для одномерного магнитного кристалла

Напомним, что в рамках стандартной теории спин-волновых мод решение уравнения движения для Фурье-амплитуд переменной намагниченности $\mathbf{m}(\xi, \eta; K_m)$ ищется в виде разложения по собственным функциям линейного дифференциального матричного оператора [16,19]. Эти функции (спин-волновые моды) образуют полный ортонормированный базис и удовлетворяют обменным граничным условиям рассматриваемой задачи. В этом случае решение задачи о нахождении спектра нормальных волн в магнитной волноведущей структуре

сводится к нахождению собственных чисел системы линейных алгебраических уравнений.

Подставив (5) и (6) в систему уравнений (4), получим следующую систему уравнений для пространственных гармоник переменной намагниченности $\mathbf{m}(\xi, \eta; K_m)$:

$$\hat{\mathbf{W}}\mathbf{m}_m(\xi, \eta) + \sum_{m'} \hat{\mathbf{T}}_{mm'} \mathbf{m}_{m'}(\xi, \eta) - \sum_{m'} \hat{\mathbf{F}}_{mm'} \mathbf{m}_{m'}(\xi, \eta) + \sum_{m'} \hat{\mathbf{N}}_{mm'}^a \mathbf{m}_{m'}(\xi, \eta) = \gamma \sum_{m'} M_{m-m'}^0 \int_{L_1}^{L_2} \int_{w_1}^{w_2} \hat{\mathbf{G}}_{xy}(\xi, \xi', \eta, \eta'; K_{m'}) \mathbf{m}_{m'}(\xi', \eta') d\xi' d\eta'. \quad (7)$$

Здесь $\hat{\mathbf{W}}$ включает в себя недиагональные частотно-зависимые члены

$$\hat{\mathbf{W}} = i\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\hat{\mathbf{T}}_{mm'}$ учитывает влияние статических магнитных полей

$$\hat{\mathbf{T}}_{mm'} = \gamma \left[H_{m-m'} + H_{m-m'}^{\text{demag}}(\xi, \eta) + H_{m-m'}^a \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\hat{\mathbf{F}}_{mm'}$ содержит члены, описывающие неоднородное обменное взаимодействие,

$$\hat{\mathbf{F}}_{mm'} = \gamma \sum_{m''} M_{m-m''}^0 \alpha_{m''-m'} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - (k_{m'} + k_\xi)(k_{m''} + k_\xi) + (k_m - k_{m'}) (k_m - k_{m''}) \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\hat{\mathbf{N}}_{mm'}^a$ учитывает влияние магнитной кристаллографической анизотропии

$$\hat{\mathbf{N}}_{mm'}^a = \gamma \sum_{m''} M_{m-m''}^0 \begin{pmatrix} N_{m''-m'}^{axx} & N_{m''-m'}^{axy} \\ N_{m''-m'}^{ayx} & N_{m''-m'}^{ayy} \end{pmatrix}.$$

Тензорная функция Грина $\hat{\mathbf{G}}_{xy}(\xi, \xi', \eta, \eta'; K_{m'})$ в (7) является двумерной частью полной функции Грина $\hat{\mathbf{G}}_{xyz}(\xi, \xi', \eta, \eta'; K_{m'})$ в системе координат xuz , полученной из $\hat{\mathbf{G}}_{\xi\eta\xi}(\xi, \xi', \eta, \eta'; K_{m'})$ при помощи соответствующих преобразований поворота на углы φ и $(\theta - \pi/2)$ [16]. Поле анизотропии формы и постоянное поле магнитной кристаллографической анизотропии находятся следующим образом:

$$H_m^{\text{demag}}(\xi, \eta) + -\frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda G_{zz}(\xi, \eta, \xi) M_z^0(\xi) e^{ik_m \xi} d\xi,$$

$$H_m^a = -\frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \hat{N}_{zz}^0(\xi) M_z^0(\xi) e^{ik_m \xi} d\xi.$$

В том случае, когда рассматриваемый одномерный магнетонный кристалл образуется вследствие периодической модуляции только магнитных параметров структуры, тензорная функция Грина $\mathbf{G}_{xyz}(\xi, \xi', \eta, \eta'; K_{m'})$ в (7) является периодическим аналогом тензорной функции Грина $\hat{\mathbf{G}}_{xyz}(\xi, \xi', \eta, \eta, k_\xi)$, полученной для соответствующей регулярной однородной магнитной волноведущей структуры. Если же магнетонный кристалл образуется посредством пространственной модуляций геометрических или электрофизических параметров структуры, то задача усложняется. В этом случае для нахождения тензорной функции Грина $\mathbf{G}_{xyz}(\xi, \xi', \eta, \eta'; K_{m'})$ следует строго решать уравнения Максвелла с периодическими электродинамическими граничными условиями.

Очевидно, что система интегродифференциальных уравнений (7) не может быть однозначно решена без введения дополнительных граничных условий. В рамках феноменологического подхода вводятся так называемые обменные граничные условия. Наиболее общий вид имеют смешанные обменные граничные условия Радо–Уиртмена, которые для случая периодически модулированной волноведущей структуры могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}(\xi, \eta; K_m)}{\partial n} + p \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}(\xi, \eta; K_m)) \mathbf{n} \times \mathbf{M}_0 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_0) \mathbf{n} \times \mathbf{m}(\xi, \eta; K_m) \right] \Big|_S = 0 \quad (8)$$

где p — параметр закрепления поверхностных спинов, феноменологически учитывающий разницу сил, действующих на спины внутри ферромагнетика и на его поверхности. В общем случае величина параметра закрепления поверхностных спинов также может периодически изменяться вдоль оси волновода. В этом случае граничные условия (8) становятся периодическими.

Согласно теории спин-волновых мод [21], решение интегродифференциального уравнения (7) ищется в виде разложения поперечного распределения переменной намагниченности в ряд по ортогональным векторным функциям $\mathbf{S}_{nq}^p(\xi, \eta)$ — спин-волновым модам. В случае описания одномерного магнетонного кристалла такая процедура должна быть проделана для каждой пространственной гармоники m в разложении (5), а именно

$$\mathbf{m}_m(\xi, \eta) = M_0 \sum_{n,q} [m_{mnq}^x \mathbf{S}_{nq}^x(\xi, \eta) + m_{mnq}^y \mathbf{S}_{nq}^y(\xi, \eta)]. \quad (9)$$

Здесь m_{mnq}^p — амплитуды спин-волновых мод. Индексы n и q нумеруют функции в разложении неоднородной переменной намагниченности по толщине и ширине соответственно. Индекс m нумерует пространственные гармоники. Векторные функции $\mathbf{S}_{nq}^p(\xi, \eta)$ являются собственными функциями дифференциального матричного оператора $\hat{\mathbf{F}}_{mm'}$ и удовлетворяют обменным граничным условиям (8).

Подставляя разложение (9) в (7) и используя условие ортогональности функций $\mathbf{S}_{nq}^p(\xi, \eta)$, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{D}_{nn,qq}^{mm} \mathbf{m}_{mnq} + \sum_{n' \neq n} \sum_{q' \neq q} \mathbf{R}_{nn',qq'}^{mm} \mathbf{m}_{mn'q'} + \sum_{m' \neq m} \sum_{n'} \sum_{q'} \mathbf{L}_{nn',qq'}^{mm'} \mathbf{m}_{m'n'q'} = 0. \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{D}_{nn,qq}^{mm}$, $\mathbf{R}_{nn',qq'}^{mm}$, $\mathbf{L}_{nn',qq'}^{mm'}$ — квадратные матрицы вида

$$\mathbf{D}_{nn,qq}^{mm} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{11} & \mathbf{D}^{12} \\ \mathbf{D}^{21} & \mathbf{D}^{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{nn',qq'}^{mm} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{11} & \mathbf{R}^{12} \\ \mathbf{R}^{21} & \mathbf{R}^{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{nn',qq'}^{mm'} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{11} & \mathbf{L}^{12} \\ \mathbf{L}^{21} & \mathbf{L}^{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{11} &= H_{nn,qq}^{mm} + F_{nn,qq}^{mm} + {}^{xx}N_{nn,qq}^{mm} - {}^{xx}G_{nn,qq}^{mm}, \\ \mathbf{D}^{12} &= -i\omega/\gamma M_0 + {}^{xy}N_{nn,qq}^{mm} - {}^{xy}G_{nn,qq}^{mm}, \\ \mathbf{D}^{21} &= i\omega/\gamma M_0 + {}^{yx}N_{nn,qq}^{mm} - {}^{yx}G_{nn,qq}^{mm}, \\ \mathbf{D}^{22} &= H_{nn,qq}^{mm} + F_{nn,qq}^{mm} + {}^{yy}N_{nn,qq}^{mm} - {}^{yy}G_{nn,qq}^{mm}, \\ \mathbf{R}^{11} &= H_{nn',qq'}^{mm} - {}^{xx}G_{nn',qq'}^{mm}, \quad \mathbf{R}^{12} = -{}^{xy}G_{nn',qq'}^{mm}, \\ \mathbf{R}^{21} &= -{}^{yx}G_{nn',qq'}^{mm}, \quad \mathbf{R}^{22} = H_{nn',qq'}^{mm} - {}^{yy}G_{nn',qq'}^{mm}, \\ \mathbf{L}^{11} &= H_{nn',qq'}^{mm'} + F_{nn',qq'}^{mm'} + {}^{xx}N_{nn',qq'}^{mm'} - {}^{xx}G_{nn',qq'}^{mm'}, \\ \mathbf{L}^{12} &= {}^{xy}N_{nn',qq'}^{mm'} - {}^{xy}G_{nn',qq'}^{mm'}, \quad \mathbf{L}^{21} = {}^{yx}N_{nn',qq'}^{mm'} - {}^{yx}G_{nn',qq'}^{mm'}, \\ \mathbf{L}^{22} &= H_{nn',qq'}^{mm'} + F_{nn',qq'}^{mm'} + {}^{yy}N_{nn',qq'}^{mm'} - {}^{yy}G_{nn',qq'}^{mm'}, \end{aligned}$$

где матричные элементы записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{nn',qq'}^{mm'} &= \delta_{mm'} \delta_{qq'} H_{m-m}^{\text{ext}} + \delta_{mm'} \delta_{qq'} H_{m-m}^a + \delta_{nn'} \frac{1}{w} \int_{w_1}^{w_2} H_{m-m'}^{\text{demag}}(\eta) \Phi_q(\eta) \Phi_{q'}(\eta) d\eta, \\ F_{nn',qq'}^{mm'} &= \delta_{nn'} \delta_{qq'} \sum_{m''} M_{m-m''}^0 \alpha_{m''-m'} \\ &\times [k_n^2 + \kappa_q^2 + (k_{m'} + k_\xi)(k_{n''} + k_\xi) - (k_m - k_{m'})(k_m - k_{m''})], \\ {}^{\alpha\beta}N_{nn',qq'}^{mm'} &= \delta_{nn'} \delta_{qq'} \sum_{m''} M_{m-m''}^0 N_{m''-m}^{\alpha\beta}, \\ {}^{\alpha\beta}G_{nn',qq'}^{mm'} &= \frac{M_{m-m''}^0}{wL} \int_{L_1}^{L_2} \int_{L_1}^{L_2} \int_{w_1}^{w_2} \int_{w_1}^{w_2} \Phi_{n'q'}(\xi, \eta) \Phi_{nq}(\xi', \eta') \\ &\times G_{m'}^{\alpha\beta}(\xi, \xi', \eta, \eta', K_{m'}) d\eta d\eta' d\xi d\xi'. \end{aligned}$$

Явный вид функций $\Phi_{nq}(\xi, \eta)$, удовлетворяющих смешанным обменным граничным условиям Радо–Уиртмена, приведен в работе [21].

Система уравнений (10) точно описывает распространение спиновых волн в одномерном магнетонном кристалле, образованном периодической модуляцией любых магнитных параметров ферритового волновода. Решения данной системы уравнений позволяют получить поперечное распределение переменной намагниченности, а приравнивание к нулю детерминанта коэффициентов системы дает дисперсионное уравнение для спиновых волн в периодически модулированном ферритовом волноводе. Система уравнений (10) в общем случае является бесконечной. Однако в каждом конкретном случае эта система может быть приведена к конечной форме путем отбрасывания членов высших порядков малости в рядах теории возмущений по пространственным гармоникам и спин-волновым модам. Удобство такого представления заключается в том, что при расчетах не нужно ограничиваться первым борновским приближением, как это обычно делается в других теоретических подходах (см., например, [11,12]). Отсюда следует, что любой профиль периодической модуляции может быть описан с помощью учета достаточного количества пространственных гармоник в Фурье-разложении периодических коэффициентов уравнения.

4. Спектр спиновых волн

В рамках теории спин-волновых мод спектр спиновых волн представляет собой набор собственных значений бесконечной линейной системы уравнений (10), а дисперсионное соотношение может быть записано в виде равенства нулю детерминанта бесконечной блочной матрицы коэффициентов

$$\det \left[\mathbf{D}_{nn,qq}^{mm} + \sum_{n' \neq n \text{ or } q' \neq q} \mathbf{R}_{nn',qq'}^{mm} + \sum_{m' \neq m} \sum_{n'} \sum_{q'} \mathbf{L}_{nn',qq'}^{mm'} \right] = 0. \quad (11)$$

Квадратные матрицы $\mathbf{D}_{nn,qq}^{mm}$, $\mathbf{R}_{nn',qq'}^{mm}$, $\mathbf{L}_{nn',qq'}^{mm'}$ имеют ясный физический смысл. Матрицы $\mathbf{D}_{nn,qq}^{mm}$ описывают спектр спиновых волн регулярного волновода в диагональном приближении. Диагональное приближение в данном случае обусловлено учетом диполь-дипольного и обменного взаимодействий внутри ферритового волновода, а также влиянием объемной и поверхностной магнитной кристаллографической анизотропии. Из условия равенства нулю определителя этих матриц можно получить спектр невзаимодействующих спин-волновых мод. Матрицы $\mathbf{R}_{nn',qq'}^{mm}$ учитывают межмодовое диполь-дипольное взаимодействие, обуславливающее возникновение в зонах пересечения дисперсионных кривых их дипольного расталкивания. Таким образом, блок матрицы (11) при $m = 0$ дает полный дипольно-обменный спектр спиновых волн регулярного ферритового волновода.

Матрицы $\mathbf{L}_{nn',qq'}^{mm'}$ учитывают изменения спектра спиновых волн при наличии периодических вариаций магнитных параметров структуры. Как известно, любые

периодические вариации вдоль направления распространения волны дают сильное отражение сигнала при длинах волн, кратных периоду структуры. Это приводит к образованию запрещенных зон в спектре спиновых волн на границах зон Бриллюэна или, другими словами, к образованию дипольных щелей, обусловленных диполь-дипольным взаимодействием пространственных гармоник. Матрицы $\mathbf{L}_{nn',qq'}^{mm'}$ как раз и описывают этот тип диполь-дипольного взаимодействия.

Отдельные матричные элементы, входящие в блоки матрицы (11), описывают вклады различных видов взаимодействий в энергию спиновой волны. Так, матричный элемент $H_{nn',qq'}^{mm'}$ описывает вклад зеемановской энергии и ее периодических вариаций и учитывает пространственно неоднородный характер размагничивающего поля в волноводах прямоугольного сечения. Матричный элемент $F_{nn',qq'}^{mm'}$ учитывает вклад неоднородного обменного взаимодействия и описывает влияние периодической вариации обменного члена на дипольное расталкивание пространственных гармоник. Матричный элемент ${}^{\alpha\beta}N_{nn',qq'}^{mm'}$ описывает эффекты, связанные с наличием в структуре магнитной кристаллографической анизотропии. Наконец, матричный элемент ${}^{\alpha\beta}G_{nn',qq'}^{mm'}$ описывает вклад диполь-дипольного взаимодействия, а также все явления, связанные с периодической вариацией геометрических и электрофизических свойств волноводного канала.

Подводя итог, отметим, что дисперсионное соотношение (11) полностью описывает линейный спектр спиновых волн в одномерном магнетонном кристалле любой природы. Точное дисперсионное соотношение (11) позволяет учесть как диполь-дипольное и обменное взаимодействие, так и влияние объемной и поверхностной магнитной кристаллографической анизотропии на спектр спиновых волн в периодически модулированном волноводе. Кроме того, интегральная форма матричных элементов позволяет учесть неоднородность пространственного распределения отдельных составляющих эффективного магнитного поля по поперечному сечению волновода, а включение в рассмотрение большого числа пространственных гармоник позволяет описать практически любой профиль модуляции выбранных параметров.

5. Пример практического использования теории

Как показал обзор литературы, экспериментальных данных по исследованию линейных дисперсионных характеристик магнетонных кристаллов очень немного. Для демонстрации работы представленной теории воспользуемся результатами исследования спектра спиновых волн одномерного магнетонного кристалла, образованного периодической модуляцией внешнего магнитного поля, из работы [9]. Экспериментальное исследование в [9] проводилось на пленке железо-иттриевого

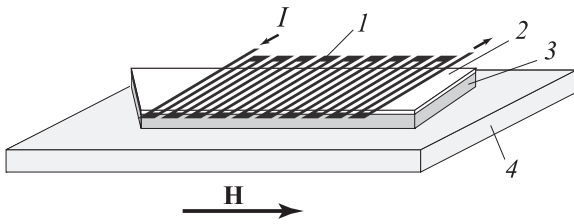


Рис. 2. Схема динамического магнного кристалла, исследуемого в работе [9]. 1 — металлический меандр с постоянным током $I = 0.5$ А, создающий модуляцию магнитного поля, 2 — диэлектрический зазор, 3 — пленка ЖИГ, 4 — диэлектрическая подложка.

граната (ЖИГ) толщиной $5 \mu\text{m}$ с намагниченностью насыщения 1750 Г. Приложенное вдоль направления распространения спиновых волн постоянное магнитное поле 1625 Ое было промодулировано дополнительным пространственно-периодическим полем амплитудой 4 Ое с периодом $300 \mu\text{m}$. Периодическое магнитное поле создавалось постоянным электрическим током в проводнике в виде меандра, расположенном в непосредственной близости от поверхности пленки ЖИГ (на расстоянии порядка $100 \mu\text{m}$). На рис. 2 представлено схематическое изображение объекта исследований.

Расчет дисперсионных характеристик (рис. 3) проводился нами исходя из уравнения (7), где единственным периодическим коэффициентом была модуляция внешнего магнитного поля вдоль направления намагничивания

$$H_0^Z(\mathbf{r}) = \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} H_{m'}^Z(\xi, \eta) e^{-ik_{m'}\xi}, \quad (12)$$

причем считалось, что модуляция не зависит от поперечных координат $H_{m'}^Z(\xi, \eta) \equiv H_{m'}^Z$.

Как известно, система плоских проводников с током не может создать в структуре модуляцию магнитного поля строго синусоидальной формы. Поэтому при описании экспериментальных данных нами были рассмотрены три случая периодической модуляции: синусоидальная форма, форма меандра и трапециевидная форма модулирующего поля. Фурье-амплитуды для первых двух случаев были обычными, а для трапециевидной формы модуляции Фурье-амплитуды $H_{m'}^Z$ описывались следующим выражением:

$$H_{m'}^Z = i \frac{\delta H \Lambda}{2a\pi^2(m')^2} \sin\left(\frac{2m'a\pi}{\Lambda}\right) (1 - (-1)^{m'}), \quad (13)$$

где δH — амплитуда модуляции, a/Λ — степень трапецидальности (при $a/\Lambda \rightarrow 0$ форма модуляции переходит в модуляцию в виде меандра).

В этом случае матричные элементы матриц \mathbf{D}_{mn}^{mm} и $\mathbf{R}_{nn'}^{mm}$ в (11) могут быть найдены из соответствующих матричных элементов в [19] при замене $k_\xi \rightarrow K_m$, а единственная ненулевая компонента в матрицах $\mathbf{L}_{nn'}^{mm'}$,

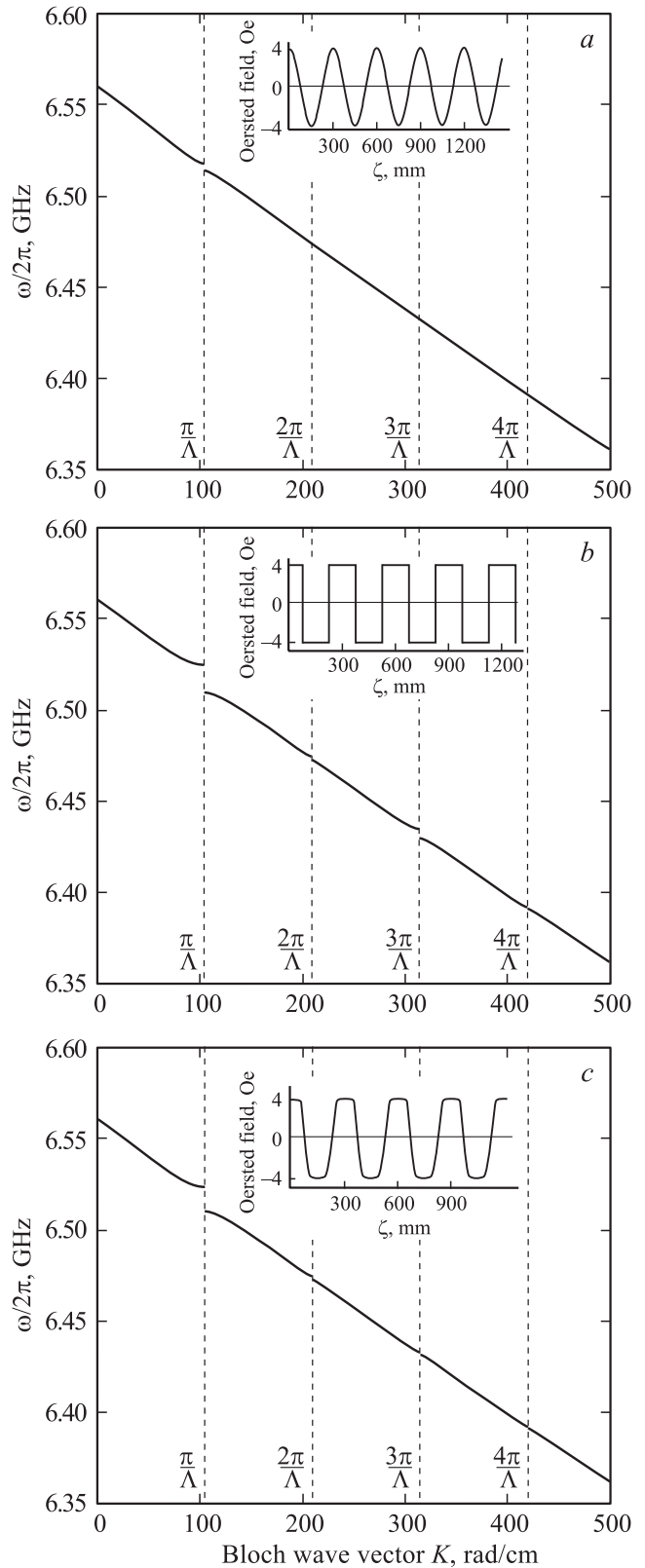


Рис. 3. Спектр спиновых волн динамического магнного кристалла при трех различных профилях модуляции внешнего магнитного поля. *a* — синусоидальный, *b* — в виде меандра, *c* — трапецидальный. На вставках представлена форма модулирующего поля.

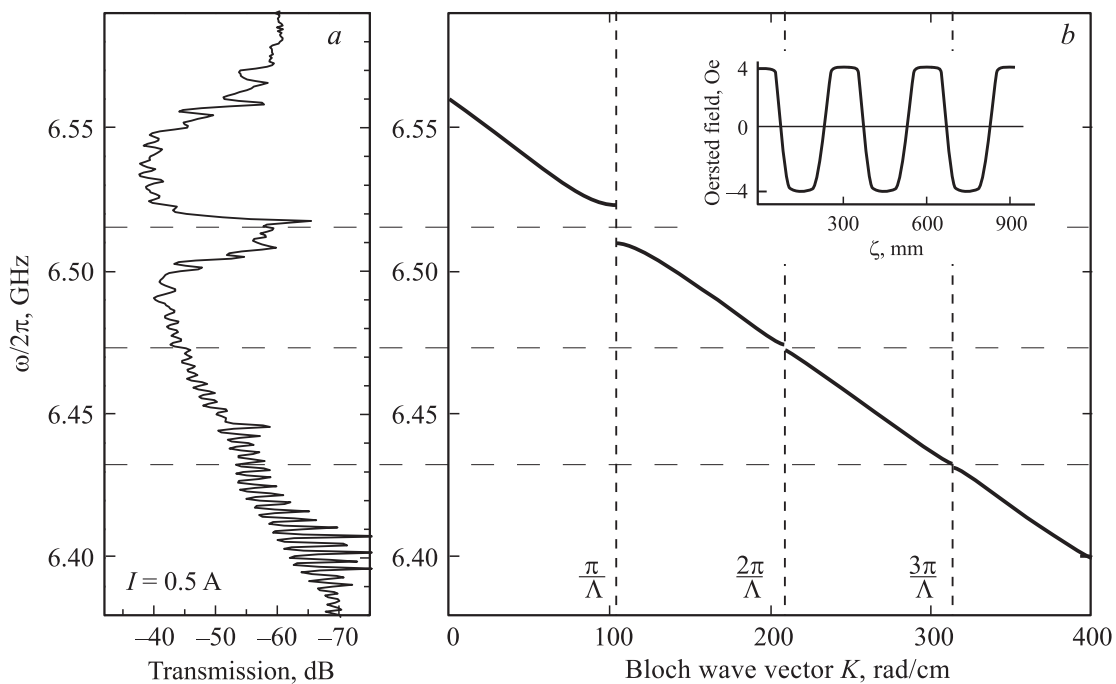


Рис. 4. Сравнение теории с экспериментом. *a* — экспериментальная амплитудно-частотная характеристика, *b* — спектр спиновых волн, построенный при трапецидальном профиле модуляции внешнего магнитного поля. На вставке — профиль модулирующего поля, использованного в расчете и соответствующего постоянному току через меандр $I = 0.5$ А.

соответствующая профилю возмущения (13), имеет следующий вид:

$$H_{m-m'}^{\text{ext}} = \frac{\delta H}{M_0} \frac{i\Lambda}{2a\pi^2(m-m')^2} \times \sin\left(\frac{2(m-m')a\pi}{\Lambda}\right) (1 - (-1)^{m-m'}). \quad (14)$$

Здесь индексы qq' опущены, так как при расчете не учитывалась конечная ширина волновода.

На рис. 3 представлены спектры спиновых волн для трех типов модуляции внешнего магнитного поля (см. вставки): синусоидальная форма (рис. 3, *a*), форма меандра (рис. 3, *b*) и трапецевидная форма (рис. 3, *c*). Из сравнения представленных спектров с экспериментальными данными работы [9] (рис. 4, *a*) следует, что первые две дисперсионные характеристики не подходят по формальным признакам. Так, при синусоидальной форме модуляции внешнего поля дипольная щель, образующаяся на частоте брэгговского резонанса, слишком мала, чтобы описать реальный эксперимент. С другой стороны, при форме модуляции в виде меандра образуются ярко выраженные дипольные щели более высоких порядков (при следующих брэгговских резонансах), чего не наблюдается в случае экспериментальной амплитудно-частотной характеристики (рис. 4, *a*). Таким образом, только трапецевидная форма модулирующего магнитного поля хорошо описывает величину и положение брэгговских резонансов, наблюдаемых в эксперименте [9].

Следует отметить, что расчет дисперсионных характеристик, представленных на рис. 3, проводился с одним подгоночным параметром — профилем модуляции статического магнитного поля. В то же время авторам работы [9] для теоретического описания рассматриваемого эксперимента понадобилось ввести ряд дополнительных подгоночных параметров: затухание, отражение на границах областей и количество рассматриваемых периодов. Заметим также, что авторы работы [9] не учитывали высшие брэгговские резонансы. Как видно из сравнения рис. 4, *a* и *b*, теоретический расчет в рамках изложенной выше теории с хорошей точностью описывает положение и величину дипольных щелей в спектре динамического магнитного кристалла.

6. Заключение

На основе метода тензорных функций Грина, теории спин-волновых мод и теоремы Флоке–Блоха построена общая теория спектра нормальных волн, распространяющихся в магнитных структурах с периодически модулированными параметрами. Полученные дисперсионные соотношения представлены в форме, удобной для развития теории возмущений и для последующих численных расчетов, что продемонстрировано в разделе 5 при описании экспериментальных данных работы [9]. Теория позволила с высокой точностью описать спектр спиновых волн в одномерном магнитном кристалле со сложной формой периодической модуляции волноведущей пленочной структуры. Важным преимуществом

представленной теории является то, что ее легко обобщить на случай распространения спиновых волн в двух- и трехмерных магнитных кристаллах.

Список литературы

- [1] N.-N. Chen, A.N. Slavin, M.G. Cottam. *Phys. Rev. B* **47**, 8667 (1993).
- [2] M.P. Kostylev, A.A. Stashkevich, N.A. Sergeeva. *Phys. Rev. B* **69**, 064408 (2004).
- [3] A.V. Chumak, P. Pirro, A.A. Serga, M.P. Kostylev, R.L. Stamps, H. Schultheiss, K. Vogt, S.J. Hermsdoerfer, B. Laegel, P.A. Beck, B. Hillebrands. *Appl. Phys. Lett.* **95**, 262508 (2009).
- [4] G. Gubbiotti, S. Tacchi, M. Madami, G. Carlotti, A.O. Adeyeye, M. Kostylev, J. Phys. D **43**, 264003 (2010).
- [5] *Magnonics. From fundamentals to applications* / Eds S.O. Demokritov, A.N. Slavin. Springer-Verlag, NY (2012).
- [6] А.Б. Устинов, Н.Ю. Григорьева, Б.А. Калиникос. *Письма в ЖЭТФ* **88**, 34 (2008).
- [7] А.В. Дроздовский, М.А. Черкасский, А.Б. Устинов, Н.Г. Ковшиков, Б.А. Калиникос. *Письма в ЖЭТФ* **91**, 17 (2010).
- [8] A.V. Chumak, V.S. Tiberkevich, A.D. Karenowska, A.A. Serga, J.F. Gregg, A.N. Slavin, B. Hillebrands. *Nature Commun.* **94**, 141 (2010).
- [9] A.V. Chumak, T. Neumann, A.A. Serga, B. Hillebrands, M.P. Kostylev. *J. Phys. D* **42**, 205005 (2009).
- [10] А.В. Вороненко, С.В. Герус, В.Д. Харитонов. *Изв. вузов. Физика* **31**, 11, 76 (1988).
- [11] P.A. Kolodin, B. Hillebrands. *J. Magn. Magn. Mater.* **161**, 199 (1996).
- [12] S.A. Nikitov, Ph. Tailhades, C.S. Tsai. *J. Magn. Magn. Mater.* **236**, 320 (2001).
- [13] S.-K. Kim, K.-S. Lee, D.-S. Han. *Appl. Phys. Lett.* **95**, 082507 (2009).
- [14] V.V. Kruglyak, S.O. Demokritov, D. Grundler. *J. Phys. D* **43**, 264001 (2010).
- [15] M.L. Sokolovskyy, M. Krawczyk. *J. Nanopart. Res.* **13**, 6085 (2011).
- [16] N.Yu. Grigorieva, B.A. Kalinikos, M.P. Kostylev, A.A. Stashkevich. In: *Handbook of artificial materials. (V. I)* / Ed. F. Capolino. Taylor and Francis Group, LLC, Oxford, UK (2009). P. 974.
- [17] Н.Ю. Григорьева, Б.А. Калиникос. *ЖТФ* **79**, 8, 110 (2009).
- [18] F. Ciubotaru, A.V. Chumak, N.Yu. Grigoryeva, A.A. Serga, B. Hillebrands. *J. Phys. D* **45**, 255002 (2012).
- [19] B.A. Kalinikos, A.N. Slavin. *J. Phys. C* **19**, 7013 (1986).
- [20] L. Brillouin, M. Parodi. *Propagation des ondes dans les milieux periodiques*. Malson Dunod, Paris (1956).
- [21] N. Grigoryeva, D. Popov, B. Kalinikos. *EPJ Web Conf.* **40**, 12004 (2013).