Журнал технической физики, 2014, том 84, вып. 11

Краткие сообщения

01

О турбулентной теплопроводности газа в поле внешней силы

© А.М. Кригель

Журнал технической физики,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: krigel@pochta.ru

(Поступило в Редакцию 29 мая 2013 г.)

Используя уравнение эволюции энтропии, примененное к идеальному однокомпонентному турбулентному газу в допущении политропности флуктуаций, получено кинетическое соотношение, определяющее турбулентную теплопроводность в поле внешней силы.

Рассмотрим идеальный газ, для которого справедливо уравнение состояния Менделеева–Клапейрона [1,2]

$$P = \rho RT/\mu, \tag{1}$$

где P — давление, ρ — плотность, R — универсальная газовая постоянная, T — температура, μ — молярная масса. Плотность кинетической энергии газа, находящегося в состоянии локального равновесия, имеет вид

$$\rho\,\frac{\left(v_i v_i + \overline{v_i' v_i'}\right)}{2} = \rho\left(\frac{v_i v_i}{2} + C_V T\right), \tag{2}$$

где v_i — скорость, C_V — удельная теплоемкость в изохорном процессе, черта сверху означает осреднение, штрих — отклонение от среднего, по повторяющимся индексам производится суммирование. В (2) флуктуации порождены только тепловым движением молекул.

Перейдем к рассмотрению турбулентного газа. Тогда, как это принято в теории турбулентности, будем считать, что в объеме, размер которого много больше внутреннего (колмогоровского) масштаба, давление, плотность, температура и скорость подвержены как тепловым, так и турбулентным флуктуациям. При этом характерный масштаб турбулентных флуктуаций много больше длины свободного пробега молекул. Осредняя (2) (в смысле О. Рейнольдса [3]), получим выражение для плотности кинетической энергии

$$\rho\,\frac{v_i v_i}{2} + v_i S_i + C_V(\rho T + \overline{\rho' T'}) + \rho b^2, \tag{3}$$

где

$$S_i = \overline{\rho' v_i'} \tag{4}$$

— „турбулентный импульс“,

$$\rho b^2 = \frac{\left(\rho\overline{v_i' v_i'} + \overline{\rho' v_i' v_i'}\right)}{2} \tag{5}$$

— плотность кинетической энергии турбулентности, b — „скорость турбулентных флуктуаций“. Инвариантная относительно преобразования Галилея часть полной кинетической энергии (3) есть естественное обобщение понятия внутренней энергии на турбулентное состояние газа

$$C_V\left(\rho T + \overline{\rho' T'}\right) + \rho b^2 = \rho\tilde{e} = \rho e\delta = \rho C_V \tilde{T}, \tag{6}$$

где

$$\delta = 1 + \frac{b^2}{C_V T} + \frac{\overline{\rho' T'}}{\rho T} \tag{7}$$

— параметр, характеризующий интенсивность турбулентности. В (6) и далее знаком $\sim$ помечены параметры состояния, включающие в себя поправки, порожденные турбулентностью. Из (6) следует, что обобщающая температура турбулентного газа приобретает добавку, связанную с турбулентностью [4,5]

$$\tilde{T} = T\delta. \tag{8}$$

Поскольку уравнение состояния (1) определяется только межмолекулярным взаимодействием, то оно должно сохранять свой вид и для турбулентного газа, что будет иметь место, если обобщенное давление турбулентного газа имеет такой же вид

$$\tilde{P} = P\delta. \tag{9}$$

Тогда, учитывая [1,2], что

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \qquad \eta = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \tag{10}$$

где F — свободная энергия, V — удельный объем, η — энтропия, и принимая во внимание (8), (9), получаем

$$\tilde{F} = F\delta, \qquad \tilde{\eta} = \eta. \tag{11}$$

Умножая уравнение Гиббса на δ и учитывая (8), (9), (11), мы приходим к выводу, что оно сохранит свой вид в случае турбулентности

$$\tilde{T}\,d\tilde{\eta} = d\tilde{e} - \frac{\tilde{P}}{\rho^2}\,d\rho. \tag{12}$$

Используя (1), (8), (9), соотношение Майера, осредненные уравнение неразрывности, уравнение теплопроводности, уравнение баланса энергии турбулентности [3], нетрудно из (12) получить уравнение эволюции энтропии турбулентного газа

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\eta}) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\rho v_i + S_i)\tilde{\eta} + J_i\right] = \Sigma_m + \Sigma_t, \tag{13}$$

где

$$J_i = \frac{H_i + Q_i + C_P S_i T + I_i}{\tilde{T}} \tag{14}$$

— диффузионный поток энтропии, включающий в себя

$$H_i = C_p\left(\rho\overline{v_i' T_0'} + \overline{\rho' v_i' T_0'}\right) \tag{15}$$

— плотность потока тепла, порожденного турбулентными флуктуациями, Q_i — плотность потока тепла, порожденного молекулярными флуктуациями, I_i — плотность турбулентного переноса энергии турбулентности [3], C_P — удельная теплоемкость в изобарном процессе, Σ_m и Σ_t — скорости производства энтропии в единице объема, определяемые молекулярными и турбулентными флуктуациями соответственно, причем

$$\Sigma_t = (H_i + C_P S_i T + I_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\tilde{T}}\right) + \frac{S_i}{\tilde{T}}\left(g_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + C_V\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - \frac{R\tilde{T}}{\mu\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right) - \frac{\rho\tau_{ij}}{\tilde{T}}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \tag{16}$$

где

$$\rho\tau_{ij} = \rho\overline{v_i' v_j'} + \overline{\rho' v_i' v_j'}$$

— тензор напряжений турбулентного трения, g_i — ускорение, вызванное внешней силой. Легко видеть, что в случае отсутствия турбулентности (13) переходит в обычное уравнение эволюции энтропии [2]. Производство энтропии турбулентностью (16) связано с четырьмя видами неравновесных процессов: теплопроводностью, выравниванием плотности энергии турбулентности, турбулентной самодиффузией и вязкостью.

Термодинамические свойства турбулентных флуктуаций, вообще говоря, не известны. Рассмотрим приближение политропических возмущений, для которых принимается, что

$$\frac{\partial P}{P} = \kappa\frac{\partial\rho}{\rho}, \tag{17}$$

где

$$\kappa = \frac{C_P - C}{C_V - C} \tag{18}$$

— показатель политропы, C — удельная теплоемкость газа в политропном процессе. Тогда из (1), (4), (17) и (18), пренебрегая тройными корреляциями, получаем, что

$$H_i \approx C_P\tilde{T}(\kappa - 1)S_i. \tag{19}$$

Из выражения (19), принятого в теории турбулентности, следует, что в политропном газе турбулентный поток тепла и турбулентный импульс связаны друг с другом и потому порождают один и тот же неравновесный процесс.

Ограничимся рассмотрением теплопроводности в макроскопически неподвижном газе при слабой турбулентности ($\delta \approx 1$) вблизи термического равновесия. В таком случае, учитывая (1), (17)–(19), производство энтропии (16), порожденное неоднородностью температуры, приобретает вид

$$\Sigma_t = \frac{S_i}{T}\left(g_i - \beta C_P\frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \tag{20}$$

где

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma(\kappa - 1)} + \kappa - \frac{1}{\gamma}.$$

Второе начало термодинамики требует $\Sigma \geq 0$, что будет иметь место, если производство энтропии сводится к сумме квадратичных форм [2]. В таком случае, учитывая, что при отсутствии внешнего поля должно выполняться уравнение Фурье, из (20) получаем, что турбулентный поток тепла (19) в присутствии внешнего поля принимает вид

$$H_i = \rho K C_P\left(\frac{g_i}{\beta C_P} - \frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \tag{21}$$

где K — коэффициент турбулентной теплопроводности. Из (21) вытекает условие термического равновесия, при котором турбулентные потоки тепла, массы и производство энтропии, связанное с этим неравновесным процессом, обратятся в нуль

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{g_i}{\beta C_P}. \tag{22}$$

В настоящее время в геофизических и астрофизических приложениях теории турбулентности вместо (22) используется условие отсутствия конвекции, отличающееся от (22) отсутствием в знаменателе β („адиабатический градиент температуры“). Однако конвекция — это упорядоченное макроскопическое движение. Отсутствие конвекции есть условие механического равновесия, в то время как (22) — условие термического равновесия, что не одно и то же. Известно, что применение в качестве условия термического равновесия условия отсутствия конвекции приводит к противоречению с наблюдениями [6]. Полученный результат может устранить это противоречие.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.
[2] *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. 552 с.
[3] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. I. М.: Наука, 1965. 639 с.
[4] *Невзглядов В.Г.* // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. № 6(12). С. 1727–1733.
[5] *Кригель А.М.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 11. С. 2282–2283.
[6] Равновесный градиент температуры. Сборник статей. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.