

01

Индукцированный шумом переход в малом ансамбле активных броуновских частиц

© К.С. Сергеев, Т.Е. Вадивасова, А.П. Четвериков

Саратовский государственный университет
E-mail: vadivasovate@yandex.ru

Поступило в Редакцию 28 мая 2014 г.

Численно исследуется динамика малого ансамбля активных стохастических частиц, глобально связанных через скорости. Устанавливается зависимость поведения ансамбля от числа частиц. Анализируются явление бистабильности и взаимосвязь поведения ансамбля с распределением компонент скорости отдельной частицы.

Одним из актуальных направлений современной нелинейной динамики является самоорганизация в биологических объектах, например в скоплениях живых организмов. Подобные задачи требуют исследований с привлечением моделей больших ансамблей, состоящих из множества движущихся в пространстве элементов (частиц), находящихся под действием случайных сил и взаимодействующих между собой. Частицы, которые при этом способны трансформировать внутреннюю энергию в энергию движения, получили название активных броуновских частиц (АБЧ) [1–3].

Рассмотрим ансамбль АБЧ, исследованный в [1]. Он состоит из N идентичных частиц, движущихся по плоскости в некотором квадрате с периодическими граничными условиями. Частицы, расстояние между которыми не превосходит заданной величины ϵ , взаимодействуют между собой таким образом, что их скорости стремятся стать одинаковыми по величине и направлению. Выравниванию скоростей препятствует действие некоррелированных случайных сил. Стохастические уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{e}_{i,v} - \mathbf{v}_i + \mu(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) + \eta_i(t), \quad (1)$$

где \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i — безразмерные координаты и скорости взаимодействующих частиц соответственно ($i = 1, \dots, N$). Активный характер частиц

определяется нелинейным трением: частицы, движущиеся с малыми скоростями $|\mathbf{v}_i| < 1$, ускоряются в направлении движения, а быстрые частицы ($|\mathbf{v}_i| > 1$) тормозятся. Между собой частицы связаны через среднюю скорость \mathbf{u} . Она рассчитывается с учетом скоростей N_i частиц, взаимодействующих в данный момент с i -й частицей:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{v}_j. \quad (2)$$

Степень взаимодействия задается безразмерным параметром $\mu > 0$. Направление движения i -й частицы определяется вектором $\mathbf{e}_{i,v}(t) = \mathbf{v}_i/|\mathbf{v}_i|$. Слагаемое $\eta_i(t)$ представляет собой случайную силу, действующую на частицу:

$$\eta_i(t) = \sqrt{2D_E} \begin{pmatrix} \xi_{i,x}(t) \\ \xi_{i,y}(t) \end{pmatrix} + \sqrt{2D_v} \xi_{i,v}(t) \mathbf{e}_{i,v}(t) + \sqrt{2D_\varphi} \xi_{i,\varphi}(t) \mathbf{e}_{i,\varphi}(t), \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_{i,\varphi}(t)$ — единичный вектор, перпендикулярный направлению движения.

Первое слагаемое в правой части моделирует внешний аддитивный шум, имеющий интенсивность D_E . Два оставшихся слагаемых описывают внутренний мультипликативный шум. Первый источник (с интенсивностью D_v) изменяет величину скорости частицы, а второй (с интенсивностью D_φ), влияет на направление движения. Все источники полагаются независимыми гауссовыми и белыми: $\langle \xi_{i\alpha}(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_{i\alpha}(t) \xi_{j\beta}(t') \rangle = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t')$, $i, j = 1, \dots, N$; $\alpha, \beta \in \{x, y, v, \varphi\}$. В отсутствие шума взаимодействие частиц приводит к установлению одинаковых скоростей (как по величине, так и по направлению) для всех частиц ансамбля при любом начальном распределении. Шум вызывает разброс скоростей частиц. В [1] исследовался переход „порядок–беспорядок“, наблюдающийся в модели (1) с ростом интенсивности внутреннего шума D_φ . В пределе бесконечно большого ансамбля глобально взаимодействующих частиц ($N_j = N \rightarrow \infty$) были получены теоретические результаты, свидетельствующие о наличии при $\mu > 1$ области бистабильности. Численные результаты для больших ансамблей ($N = 10\,000$), приведенные в [1], подтверждают выводы теории. Было также показано, что при локальном характере взаимодействия частиц ($N_i < N$) бистабильность может исчезнуть. Однако

поведение ансамблей из небольшого числа частиц, порядка 10^d и меньше, где d — размерность пространства, осталось за рамками проведенных исследований.

Данная работа имеет целью определить, как влияет число частиц на переход „порядок–беспорядок“, выяснить, возникает ли бистабильность в малом ансамбле, и установить взаимосвязь между динамикой ансамбля и статистическими характеристиками движения одной произвольно выбранной частицы ансамбля.

В работе исследован малый ансамбль (1), состоящий из сравнительно небольшого числа частиц $N \leq 300$. Рассматривалось глобальное взаимодействие всех частиц ($N_i = N$). В этом случае координаты частиц и граничные условия задачи не важны при рассмотрении их скоростей. Для простоты полагалось, что шум, модулирующий скорость частицы, отсутствует ($D_v = 0$). Значение интенсивности аддитивного шума во всех расчетах было постоянным ($D_E = 0.01$). Стохастические уравнения (1) рассматривались как уравнения Стратоновича [4]. Интегрирование осуществлялось по схеме Гюна с учетом источников шума и с шагом $\Delta t = 0.005$ [5]. Для характеристики поведения ансамбля использовалась абсолютная величина средней по ансамблю скорости частиц $|\mathbf{u}(t)|$, рассчитываемая по формуле (2) при $N_i = N$. В установившемся режиме средняя скорость флуктуирует относительно некоторого постоянного уровня, что является следствием конечности ансамбля. Удобно избавиться от этих флуктуаций, применив сглаживание (усреднение по времени) на m шагах интегрирования и введя характеристику

$$U = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |\mathbf{u}(t_k)|. \quad (4)$$

Зависимости величины U от параметра μ и интенсивностей источников шума являются достаточно гладкими и могут использоваться для диагностики перехода „порядок–беспорядок“.

Рассмотрим, как влияет число частиц ансамбля на переход „порядок–беспорядок“. Как следует из зависимостей величины U от интенсивности шума D_φ , полученных при $\mu = 3$ для различных значений N и одинаковых начальных условий (рис. 1), с ростом N кривые достаточно быстро сходятся к некоторой асимптотической кривой, так что ансамбль из 100 частиц уже достаточно хорошо отражает динамику бесконечно большого ансамбля. При малых значениях шума величина U

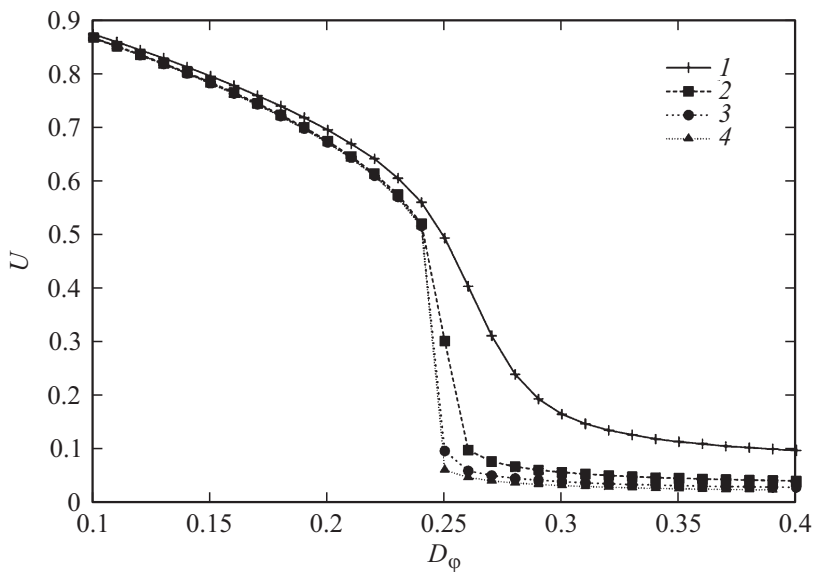


Рис. 1. Зависимости модуля средней скорости ансамбля частиц от интенсивности мультипликативного шума D_ϕ при $\mu = 3.0$ и различном числе частиц ансамбля: $N = 20, 100, 200, 300$ (кривые 1, 2, 3, 4). Начальные скорости всех частиц выбирались равными 1 и одинаковыми по направлению. Интервал установления равнялся 10^5 , сглаживание проводилось на интервалах, равных 10^3 .

близка к единице, что соответствует упорядоченному поведению (скорости всех частиц близки по величине и направлению). При большом шуме значение U становится близким к нулю в результате неупорядоченности частиц по скоростям. Плавное изменение величины U при малом числе частиц $N = 20$ (кривая 1 на рис. 1) свидетельствует об отсутствии области бистабильности, а резкий перепад ее значений (кривые 2–4 на рис. 1) является индикатором существования такой области. Проведенные нами расчеты показали также существование при $N \geq 20$ области значений D_ϕ , для которой на большом времени интегрирования (до 10^6 единиц безразмерного времени) наблюдается зависимость поведения ансамбля от начального распределения скоростей, т. е. имеет место бистабильность. При этом значения параметра μ должны превышать некоторое пороговое значение μ_{cr} , зависящее от N .

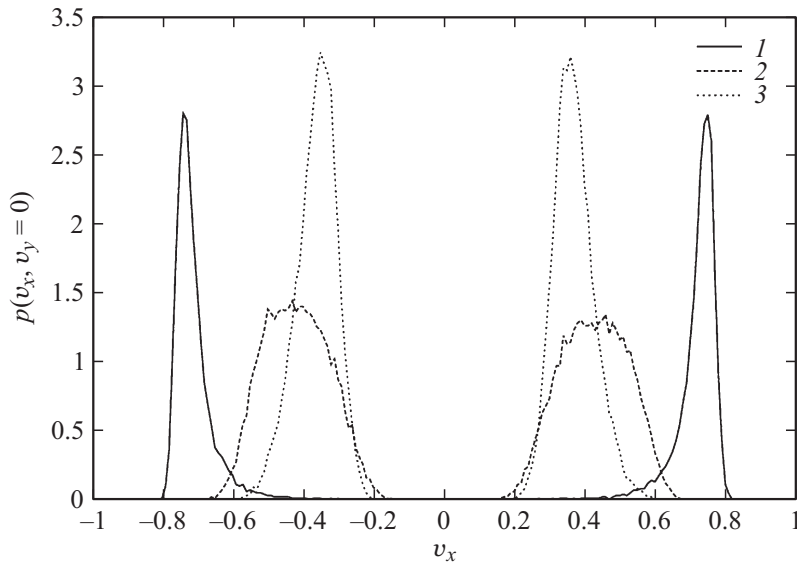


Рис. 2. Стационарные вероятностные распределения $p(v_x, v_y = 0)$ для произвольно выбранной частицы ансамбля из $N = 100$ частиц при $\mu = 2.0$ и различных значениях интенсивности шума: $D_\phi = 0.2$ (кривая 1); $D_\phi = 0.259375$ (кривая 2); $D_\phi = 0.275$ (кривая 3). Расчеты выполнялись для интервалов времени 10^6 после периода установления 10^3 .

При $N \geq 100\mu_{zp} \approx 2.5$, что практически совпадает с теоретическим значением, полученным в [1] в пределе $N \rightarrow \infty$ при той же величине $D_E = 0.01$. Для $N < 100$ значение μ_{zp} превышает эту величину и растет с уменьшением числа частиц. Поэтому последующие исследования проводились для ансамбля $N = 100$.

Выясним, как связано поведение одной частицы с динамикой всего ансамбля при переходе „порядок–беспорядок“. Рассмотрим вероятностное распределение компонентов вектора скорости произвольно выбранной частицы. Поскольку все частицы находятся в одинаковых условиях, то номер выбранной частицы не имеет значения, и соответствующий индекс в обозначениях будем опускать. Плотность вероятности $p(v_x, v_y)$ находилась путем обработки результатов интегрирования системы (1). Поверхность $p(v_x, v_y)$ имеет форму аксиально-

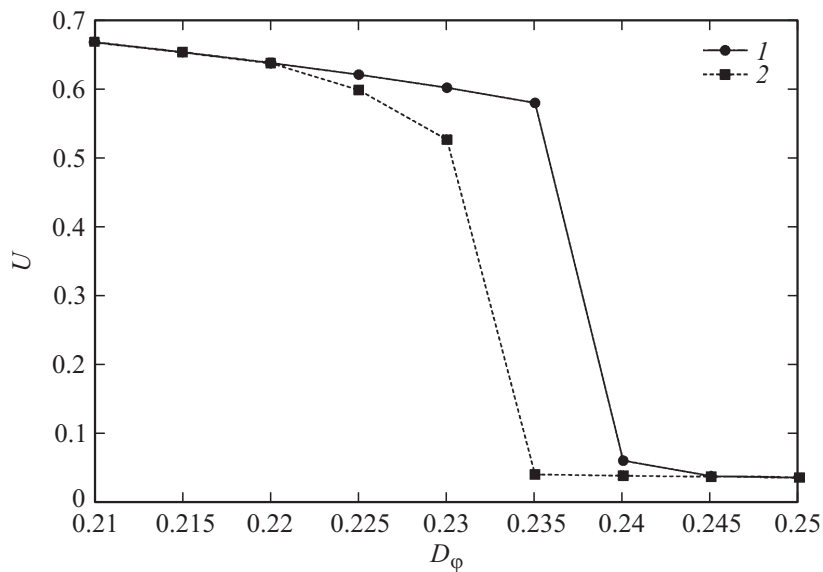


Рис. 3. Две ветви зависимости модуля средней скорости ансамбля частиц от интенсивности шума D_ϕ при $\mu = 5.0$. Ветвь 1 соответствует упорядоченному начальному состоянию, ветвь 2 — неупорядоченному (детали см. в тексте). Границы области бистабильности условно отмечены вертикальными штрихпунктирными линиями. Результаты получены для времени наблюдения 10^6 после периода установления длительностью 10^3 .

симметричного кратера с максимумом в точках окружности радиуса v_m (наивероятнейшая скорость частицы). Принципиален вопрос, связан ли переход „порядок—беспорядок“ в ансамбле со стохастической бифуркацией, проявляющейся в качественном изменении вероятностного распределения $p(v_x, v_y)$ [6]. В отсутствие бистабильности для любого выбора начальных скоростей частиц со временем устанавливается одно и то же стационарное распределение $p(v_x, v_y)$. При увеличении интенсивности шума D_ϕ в этом случае наблюдается постепенная эволюция стационарного распределения, состоящая в уменьшении величины v_m (сужении кратера, рис. 2) без стохастической бифуркации.

Рассмотрим теперь переход „порядок—беспорядок“ при наличии области бистабильности. Соответствующая зависимость величины U от

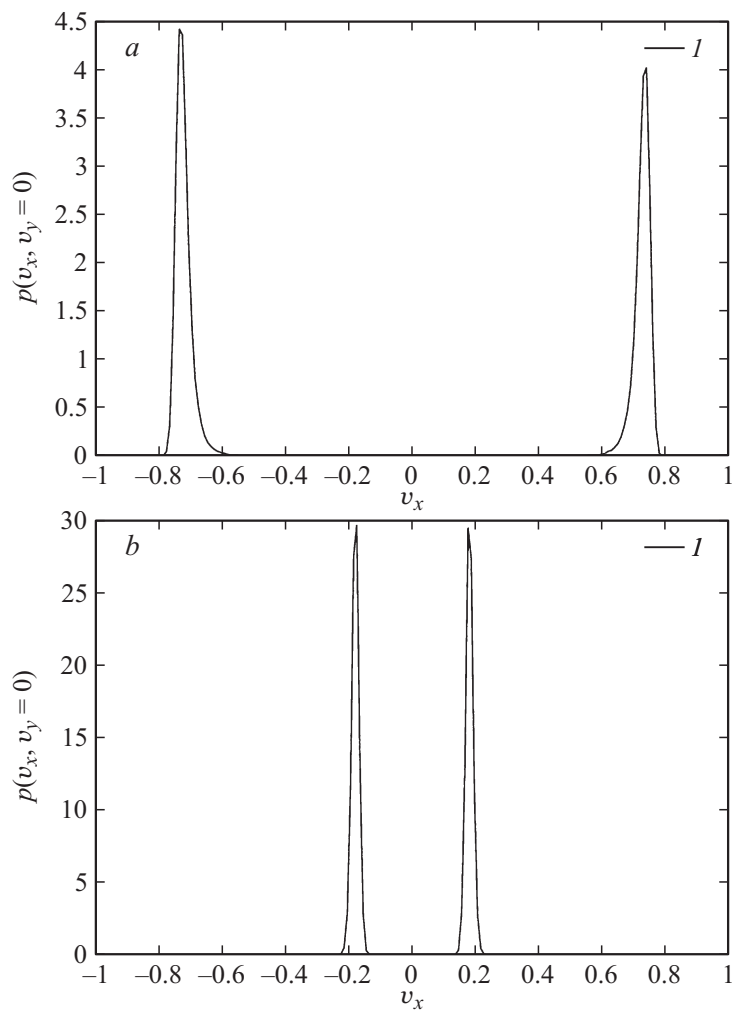


Рис. 4. Стационарные вероятностные распределения $p(v_x, v_y = 0)$ для произвольно выбранной частицы при $\mu = 5.0$ и различных значениях интенсивности шума D_φ : a — $D_\varphi = 0.2$; b — $D_\varphi = 0.3$; c — $D_\varphi = 0.235$. 1 — соответствует упорядоченному начальному состоянию, 2 — получена при неупорядоченном начальном состоянии. Результаты получены для времени наблюдения 10^6 после периода установления длительностью 10^3 .

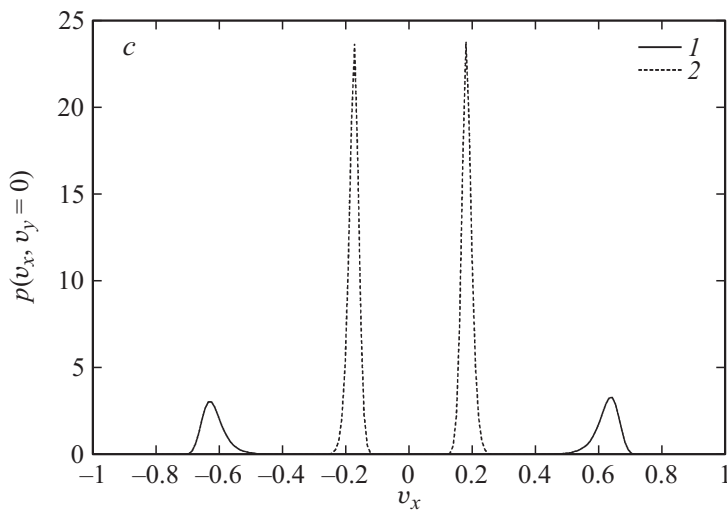


Рис. 4 (продолжение).

интенсивности шума D_φ , состоящая из двух ветвей (кривые 1 и 2), полученных для различных начальных условий, приведена на рис. 3. Ветвь 1 отвечает выбранному упорядоченному начальному состоянию ансамбля с одинаковым направлением и величиной (равной единице) скоростей всех частиц. Ветвь 2 получена для неупорядоченного начального состояния, в котором значения начальных скоростей выбирались случайным образом по величине и направлению, с равномерным распределением в интервалах $[0; 1]$ и $[0; 2\pi]$ соответственно. Для обеих ветвей наблюдается скачок значений U , происходящий при разных интенсивностях шума, что соответствует наличию бистабильности (по крайней мере, бистабильное поведение фиксируется в численных экспериментах на очень длительных временах наблюдения). Некоторое расхождение значений для 2 ветвей до и после скачка, по-видимому, связано с частичным перекрытием периода установления и интервала сглаживания при расчете величины U . Типичные стационарные распределения при различных значениях интенсивности шума D_φ проиллюстрированы на рис. 4. Слева и справа от области бистабильности при любом выборе начальных условий устанавливается одно и то же распределение. Оно имеет вид кратера с радиусом v_m (рис. 4, *a, b*). В области бистабиль-

ности при различных начальных условиях реализуются 2 стационарных распределения $p(v_x, v_y)$ (рис. 4, *c*). Во всех рассмотренных случаях значения наивероятнейшей скорости v_m близки к значениям величины U на соответствующей ветви графика, приведенного на рис. 3.

Таким образом, проведенные исследования показали, что поведение малых ансамблей ($20 < N \leq 10^2$) качественно соответствует поведению бесконечно большого ансамбля. При этом в ансамбле наблюдается индуцированный шумом переход „порядок–беспорядок“, который при достаточной степени связи сопровождается явлением бистабильности. Была установлена взаимосвязь поведения ансамбля с вероятностным распределением компонентов скорости одной частицы. В области бистабильности при разных начальных условиях возможны 2 стационарных вероятностных распределения. Границы области бистабильности связаны с жесткими стохастическими бифуркациями, состоящими в исчезновении одного из этих распределений.

Список литературы

- [1] Grossmann R., Schimansky-Geier L., Romanczuk P. // NJP. 2012. V. 14. 073 033.
- [2] Romanczuk P., Bär M., Ebeling W., Lindner B., Schimansky-Geier L. // Eur. Phys. J. Special Topic, 2012. V. 202. P. 1.
- [3] Schewitzer F. Brownian Agents and Active Particles. Collective Dynamics in the Natural and Social Sciences. Berlin: Springer, 2003.
- [4] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
- [5] Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. // Int. J. Bifurcat. Chaos. 1991. V. 1. P. 227.
- [6] Arnold L. Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.