Журнал технической физики, 2014, том 84, вып. 12

10

Параметрическое взаимодействие акустических волн в резонансном нелинейном слое

© В.Е. Назаров

Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

(Поступило в Редакцию 31 мая 2014 г.)

Исследовано вырожденное параметрическое взаимодействие акустических волн в нелинейном резонаторе — плоско-параллельном слое, помещенном во внешнюю линейную среду и облучаемом первичными нормальнопадающими продольными гармоническими волнами с частотами ω и 2ω. Определены амплитуды вторичных волн на комбинационных частотах ω и 3ω во внешней среде. Обсужден способ определения параметра нелинейности среды в слое, основанный на измерении амплитуды вторичной волны на частоте ω или 3ω, излучаемой слоем во внешнюю среду в прямом или обратном (по отношению к направлению распространения первичных волн) направлениях.

Распространение интенсивных акустических волн в различных средах сопровождается разнообразными эффектами их нелинейного взаимодействия. Закономерности проявления таких эффектов определяются нелинейными, диссипативными и дисперсионными свойствами среды. Однородные среды характеризуются упругой квадратичной нелинейностью, вязкой диссипацией и практически полным отсутствием дисперсии скорости звука (вплоть до гиперзвуковых частот) [1–3]. Последнее приводит к синхронному взаимодействию коллинеарных гармонических волн, генерации их высших и комбинационных гармоник. Теоретическое описание нелинейного распространения акустических волн в однородных твердых телах основано на пятиконстантной теории упругости, в рамках которой уравнение состояния (для продольных напряжений σ и деформаций ε) и одномерное волновое уравнение (в лагранжевых координатах) для смещений $U(x,t)$ имеют вид [1,3,4]

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma_0\varepsilon^2] + \alpha\rho_0\dot{\varepsilon}, \tag{1}$$

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -2\gamma_0 C_0^2 U_x U_{xx} + \alpha U_{xxt}, \tag{2}$$

где E — модуль упругости, γ_0 — параметр нелинейности, $C_0 = (E/\rho_0)^{1/2}$ — скорость продольных волн, α — коэффициент диссипации, обусловленный вязкостью и теплопроводностью среды, ρ_0 — плотность, $\varepsilon = U_x$, $\dot{\varepsilon} = U_{xt}$, $|\varepsilon| \ll 1$, $|\gamma_0\varepsilon| \ll 1$. (Аналогичными уравнениями описываются нелинейные акустические волны в жидкостях и газах [1–3].) Для каждого материала скорость волны C_0 (или модуль упругости E), коэффициент диссипации α и параметр нелинейности γ_0 определяются экспериментально, при этом каких-либо проблем с измерением скорости звука и коэффициента диссипации не возникает. Измерение же параметра нелинейности — задача технически более сложная, требующая аппаратуры с низким уровнем нелинейных искажений. Методы определения параметра нелинейности среды основаны на изучении эффектов взаимодействия акустических волн в этой среде, в частности, на измерении амплитуды волны разностной (или суммарной) частоты или амплитуды второй гармоники. Однако наличие „паразитных“ гармоник, рождающихся, как правило, в нелинейных трактах излучающих и приемных устройств, затрудняет прямое применение этих методов.

Нелинейные свойства среды проявляются тем сильнее и заметнее, чем больше амплитуда акустической волны, что легко достигается в резонаторах. В таких системах на частотах, близких к резонансным, амплитуда колебаний может значительно превышать амплитуду возбуждающего источника. Теоретическое исследование волновых процессов в акустических резонаторах с квадратичной нелинейностью проводилось в работах [3,5–7], где было показано, что поле скоростей в них определяется суперпозицией встречных нелинейных волн, не взаимодействующих друг с другом.

В настоящей работе исследуется параметрическое взаимодействие акустических волн в нелинейном акустическом резонаторе — плоско-параллельном слое, „помещенном“ во внешнюю среду и облучаемом нормальнопадающими первичными гармоническими волнами с частотами ω и 2ω. Отмечается, что по измерениям амплитуды вторичной волны с комбинационной частотой ω или 3ω, излучаемой слоем в обратном направлении, можно эффектно определять параметр нелинейности среды в слое. Такой способ определения нелинейных акустических свойств среды пригоден не только для сред с упругой квадратичной нелинейностью, но и, вообще говоря, для сред с другими видами нелинейности, однако расчетные формулы, конечно, будут другими.

Рассмотрим плоско-параллельный слой (пластину) из нелинейного идеально-упругого материала толщиной h. Слой находится во внешней линейной среде и возбуждается коллинеарными нормально падающими первичными гармоническими волнами с частотами ω и 2ω. Из частотного уравнения [8] $2\mathrm{arctg}(j/Z) = \pi m - k_0 h$ находим выражения для резонансных частот ω_m и добротностей $Q(\omega_m)$ такого резонатора

$$\omega_m = \frac{\pi m C_0}{h},\ Q(\omega_m) = \frac{\pi m}{2\mathrm{arcth}\left(\frac{2Z}{1+Z^2}\right)}, \tag{3}$$

где $Z = \rho C/\rho_0 C_0$ — отношение импедансов внешней среды и материала слоя, ρ_0, ρ и C_0, C — плотности и скорости продольных волн для материала слоя и внешней среды, $k_0 = \omega/C_0$ — волновое число в материале слоя, m — номер резонанса, $m = 1, 2, 3, \ldots$ Отметим, что, несмотря на то, что материал в слое — идеальный (т. е. без диссипации), амплитуда резонансных колебаний в нем будет конечной: добротность $Q(\omega_m)$ такого резонатора определяется потерями на излучение во внешнюю среду. Это справедливо при выполнении условия: $\mathrm{arcth}\left(\frac{2Z}{1+Z^2}\right) \gg \frac{\alpha(\pi m)^2}{2C_0 h}$. При $Z = 1$ внешняя среда и среда в слое имеют одинаковые импедансы и резонатора как такового нет — его добротность равна нулю. Можно также заметить, что при $Z = q$ и $Z = 1/q$ линейные характеристики слоя — резонансные частоты и добротности одинаковы. Однако, как будет показано ниже, нелинейные волновые процессы в слое зависят от параметра Z, поскольку при $Z > 1$ слой соответствует резонатору с жесткими границами, а при $Z < 1$ — резонатору с границами мягкими.

Акустический импеданс $z(k_0 h)$ слоя определяется выражением [8]

$$z(k_0 h) = i\rho_0 C_0 \frac{\rho C - i\rho_0 C_0 \,\mathrm{tg}\, k_0 h}{\rho C \,\mathrm{tg}\, k_0 h + i\rho_0 C_0}. \tag{4}$$

Толщина слоя h выбирается равной целому числу длин полуволн в нем на частоте $\omega = \omega_m$ $(h = \lambda_m m/2$, $k_0 h = \pi m)$, поэтому слой оказывается согласованным с внешней средой $(z(k_0 h) = \rho C)$ как на частоте волны $\omega = \omega_m$, так и на ее гармониках $n\omega = n\omega_m$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ В результате такого согласования, в линейном режиме отраженных от слоя волн на частотах $m\omega$ практически не будет. В слое, как в резонаторе, падающими первичными волнами будут возбуждаться волны на частотах $\omega = \omega_m$ и $2\omega = 2\omega_m$. Из-за квадратичной нелинейности среды в слое, эти волны будут взаимодействовать, и в нем будут генерироваться колебания на комбинационных частотах $\omega = 2\omega - \omega$, $2\omega = \omega + \omega$, $3\omega = \omega + 2\omega$, $4\omega = 2\omega + 2\omega$ и т. д. Сам же слой будет их излучать в правое и левое от себя полупространства (в прямом и в обратном направлениях по отношению к направлению распространения первичных волн). Поскольку в резонансе, первичные волны, падающие из внешней среды на слой, от него практически не отражаются, то для определения параметра нелинейности слоя, генерируемые и излучаемые им вторичные волны на комбинационных частотах ω, 2ω, 3ω, 4ω целесообразно принимать в обратном направлении. Для временного разделения первичных и вторичных волн можно использовать импульсное излучение первичной волны с частотой ω, при этом вторичные волны будут также импульсными. В этом случае длительность импульса T первичной волны должна быть больше времени установления колебаний в слое: $T > Q(\omega_m)/\omega_m = (h/C_0)\left(2\mathrm{arcth}\left(\frac{2Z}{1+Z^2}\right)\right)^{-1}$. При измерении амплитуд комбинационных гармоник в обратной волне излучатель первичных и приемник вторичных волн могут быть совмещены (как в импульсных гидро- и радиолокаторах).

Мы не будем учитывать диссипативное слагаемое в уравнении (2), полагая, что $\mathrm{Re} = \gamma_0 C_0^2 e_0/\alpha\omega \gg 1$, где Re — акустическое число Рейнольдса, e_0 — амплитуда волны деформации в слое [1–3]. Переходя в уравнении (2) к переменным $\tau_{1,2} = t \mp x/C_0$, получим уравнения для встречных невзаимодействующих простых волн $V_{1,2}(x, \tau_{1,2}) = \dot{U}_{1,2}(x, \tau_{1,2})$, бегущих в слое по и против оси со скоростью C_0 [1–3]:

$$\frac{\partial V_{1,2}}{\partial x} = \eta V_{1,2} \frac{\partial V_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}}, \tag{5}$$

где $\eta = \gamma_0/C_0^2$, $0 \le x \le h$.

Для скорости $V(x,t)$ и напряжения $\sigma(x,t)$ падающих на слой первичных волн имеем: $V(x,t) = a\sin[\omega t - kx] + b\sin[2(\omega t - kx) + \psi]$, $\sigma(x,t) = -\rho C V(x,t)$, где $k = \omega/C$, $\omega = \omega_m$, $\psi = \mathrm{const}$. Изменяя фазу ψ первичной волны на частоте 2ω, можно изменять фазу вторичной волны на разностной частоте $\omega = 2\omega - \omega$ и тем самым изменять амплитуду суммарной волны на этой частоте во внешней среде в правом полупространстве. Мы будем рассматривать „доразрывный“ режим в слое, когда неоднозначностей в простых волнах $V_{1,2}(x,\theta)$ не образуется и решения уравнений (5) имеют вид [1–3]

$$V_{1,2}(x,\theta) = V_{1,2}[\theta \mp k_0 x + \mu k_0 x V_{1,2}(x,\theta)], \tag{6}$$

где $\theta = \omega t$, $\mu = \eta C_0 = \gamma_0/C_0$, $|\mu V_{1,2}(x,\theta)| k_0 x < 1$.

Из-за слабой нелинейности среды в слое можно считать, что $\left|\frac{\partial V_{1,2}(x,\theta)}{\partial x}\right| \ll k_0 |V_{1,2}(x,\theta)|$, поэтому $\sigma_{1,2}(x,\theta) \cong \mp\rho_0 C_0 V_{1,2}(x,\theta)$. Волну $V_3(x,\theta)$, отраженную от слоя, и волну $V_4(x,\theta)$, прошедшую через слой, представим в следующем виде:

$$V_3(x,\theta) = V_3(\theta + kx),$$

$$V_4(x,\theta) = V_4[\theta - k(x-h)], \tag{7}$$

при этом $\sigma_{3,4}(x,\theta) = \pm\rho C V_{3,4}(x,\theta)$. Из условия равенства скоростей и напряжений на границах слоя $x = 0$ и $x = h$ имеем

$$V(0,\theta) + V_3(0,\theta) = V_1(0,\theta) + V_2(0,\theta),$$

$$Z\big[V(0,\theta) - V_3(0,\theta)\big] = V_1(0,\theta) - V_2(0,\theta), \tag{8}$$

$$V_1(h,\theta) + V_2(h,\theta) = V_4(h,\theta),$$

$$V_1(h,\theta) - V_2(hm\theta) = Z V_4(h,\theta). \tag{9}$$

Из уравнений (6)–(9) получаем систему функциональных уравнений, определяющих нелинейные резонансные колебания слоя и волны $V_{3,4}(x,\theta)$ во внешней среде:

$$V_{1,2}(h,\theta)=V_{1,2}[\theta\mp\pi m+\mu\pi m V_{1,2}(h,\theta)], \quad (10)$$

$$V_2(0,\theta)=\frac{1+Z}{1-Z}V_1(0,\theta)-\frac{2Z}{1-Z}[a\sin\theta+b\sin(2\theta+\psi)], \quad (11)$$

$$V_2[\theta+\pi m+\mu\pi m V_2(h,\theta)]=\frac{1-Z}{1+Z}V_1[\theta-\pi m+\mu\pi m V_1(h,\theta)], \quad (12)$$

$$V_3(0,\theta)=\frac{2}{1-Z}V_1(0,\theta)-\frac{1+Z}{1-Z}[a\sin\theta+b\sin(2\theta+\psi)],$$

$$V_4(h,\theta)=\frac{2}{1+Z}V_1(h,\theta). \quad (13)$$

Уравнения (10)–(12) можно решить методом возмущений, полагая, что $|\mu V_{1,2}(x,\theta)|\pi m\ll 1$. В этом случае нелинейные искажения волн $V_{1,2}(x,\theta)$ малы, и для первичных и вторичных волн на частотах ω и 3ω получим

$$V_1(0,\theta)=\frac{1+Z}{2}\bigg[a\sin\theta+b\sin(2\theta+\psi)-\frac{\mu\pi m(1-Z)^2}{8}ab[\sin(\theta+\psi)-3\sin(3\theta+\psi)]\bigg], \quad (14)$$

$$V_1(h,\theta)=\frac{1+Z}{2}\bigg[(-1)^m a\sin\theta+b\sin(2\theta+\psi)-\frac{\mu\pi m(3+Z^2)}{8}(-1)^m ab[\sin(\theta+\psi)-3\sin(3\theta+\psi)]\bigg], \quad (15)$$

$$V_2(0,\theta)=\frac{1-Z}{2}\bigg[a\sin\theta+b\sin(2\theta+\psi)-\frac{\mu\pi m(1-Z)}{4}ab[\sin(\theta+\psi)-3\sin(3\theta+\psi)]\bigg], \quad (16)$$

$$V_2(h,\theta)=\frac{1-Z}{2}\bigg[a(-1)^m\sin\theta+b\sin(2\theta+\psi)-\mu\pi m(1-Z)(-1)^m ab[\sin(\theta+\psi)-3\sin(3\theta+\psi)]\bigg], \quad (17)$$

$$V_3(0,\theta)=-\frac{\mu\pi m(1-Z^2)}{8}ab[\sin(\theta+\psi)-3\sin(\theta+\psi)], \quad (18)$$

$$V_4(h,\theta)=a(-1)^m\sin\theta+b\sin(2\theta+\psi)-\frac{\mu\pi m(3+Z^2)}{8}(-1)^m ab[\sin(\theta+\psi)-3\sin(3\theta+\psi)], \quad (19)$$

Из этих выражений видно, что в правом от слоя полупространстве будут распространяться первичные волны с частотами ω и 2ω и вторичные волны с частотами ω и 3ω, а в левом — только вторичные волны с частотами ω и 3ω. Вторичные волны возникают в результате взаимодействия первичных волн в нелинейном слое, в котором не выполняется принцип суперпозиции. В соответствии с этим принципом „отклик“ линейной среды на сумму первичных волн определяется суммой „откликов“ на каждое воздействие: в линейных средах волны не взаимодействуют. Для нелинейных сред это не так, и кроме суммы „откликов“ на каждое воздействие, возникают дополнительные, мультипликативные „отклики“ — вторичные волны, обусловленные взаимодействием первичных волн. Чем „нелинейнее“ среда, тем хуже выполняется принцип суперпозиции. В правом полупространстве принцип суперпозиции не выполняется слабо — амплитуды вторичных волн много меньше амплитуд волн первичных. В левом же полупространстве принцип суперпозиции не выполняется сильно, поскольку в нем нет отраженных первичных волн, при этом „выключение“ одной из первичных волн приводит к исчезновению и волн вторичных. Из выражений (18), (19) следует, что амплитуды вторичных волн в обратной волне $V_3(x,\theta)$ с частотами ω и 3ω не зависят от фазы ψ первичной волны с частотой 2ω, но амплитуда суммарной волны с частотой ω в прямой волне $V_4(x,\theta)$ от фазы ψ зависит. Зная амплитуды a, b первичных волн и измеряя амплитуду волны на частоте ω или 3ω во вторичной обратной волне (или в прямой, если уровень „паразитной“ гармоники незначителен), можно определить параметр нелинейности среды в слое. Амплитуда деформации обратной волны на частоте ω во внешней среде определяется выражением

$$\varepsilon_3(\omega)=\frac{\pi m}{8}\frac{\gamma_0 e_1 e_2(1-Z^2)}{(C_0/C)}, \quad (20)$$

где $e_1=a/C$, $e_2=b/C$ — амплитуды деформации первичных волн во внешней среде. Из выражения (20) следует, что, при прочих равных условиях, максимальная амплитуда деформации $\varepsilon_3(\omega)$ будет наблюдаться при $Z\gg 1$ и $C/C_0\gg 1$. Это связано с тем, что случай $Z\gg 1$ соответствует резонатору с жесткими границами, в котором амплитуды волн $V_{1,2}(x,t)$ в слое увеличиваются в $Z/2$ раз (по сравнению с амплитудами a и b во внешней среде), при этом имеет место и наиболее эффективная генерация комбинационных гармоник.

Оценки показывают, что для системы „вода–сталь–вода“ ($m=1$, $e_{1,2}\approx 4\cdot 10^{-6}$, $\gamma_0\approx 5$, $Z\approx 4\cdot 10^{-2}\ll 1$) амплитуда деформации в обратной волне на частоте ω составит $\varepsilon_3(\omega)\approx 10^{-11}$. В „обратном“ же случае, т.е. для системы „сталь–вода–сталь“ ($m=1$, $e_{1,2}=4\cdot 10^{-6}$, $\gamma_0\approx 3$, $Z\approx 27\gg 1$), получаем намного бóльшую амплитуду деформации: $\varepsilon_3(\omega)\approx 4\cdot 10^{-8}$. Из выражения (19) также следует, что при $Z>1$ и $C/C_0>1$ амплитуда нелинейной волны деформации $\varepsilon_4(\omega)$ на частоте ω во внешней среде (за слоем) может увеличиться (по сравнению со случаем, когда $Z=1$ и $C/C_0=1$), т.е. акустически „мягкий“ резонансный слой может „работать“ как эффективный „усилитель" нелинейности внешней среды. При одинаковых значениях параметров нелинейности слоя и внешней среды $(\gamma_0 = \gamma)$ коэффициент такого усиления определяется выражением $K = \frac{3+Z^2}{4}\frac{C}{C_0}$.

Список литературы

[1] *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И.* Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с.

[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.

[5] *Эйхенвальд А.А.* // УФН. 1934. Т. 14. N 5. С. 552–585.

[6] *Chester W.* // J. Fluid Mech. 1964. Vol. 52. N 1. P. 44–64.

[7] *Seymour B.R., Mortell M.P.* // J. Fluid. Mech. 1973. Vol. 52. N 2. P. 253–273.

[8] *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.