

13,19

## Неравновесная функция распределения при тепловом потоке вблизи границы двух кристаллов

© А.П. Мейлахс

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: estfi@mail.ru

(Поступила в Редакцию 16 апреля 2014 г.)

Изучается неравновесная функция распределения при тепловом потоке через границу между двумя кристаллами в модели одномерной гармонической цепочки. Выведены условия сшивки функций распределения по разные стороны от границы. Предложен способ расчета граничного теплосопrotivления с помощью обобщенного метода Энскога–Чепмена. При некоторых дополнительных упрощающих предположениях выведена точная формула.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 12-08-00174-А и 12-02-31518-мол-А) и фонда „Династия“.

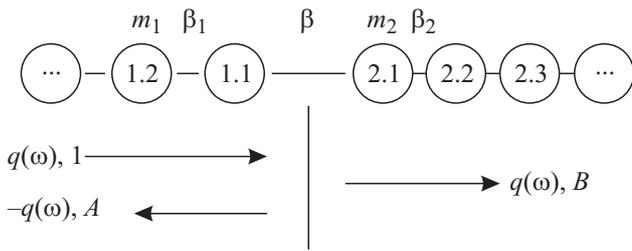
### 1. Введение

Проблема переноса тепла через границу двух веществ в последнее время привлекает внимание исследователей ввиду ее большой важности для технических приложений [1]. Как впервые было замечено Капицей [2], на границе двух веществ при наличии теплового потока температура испытывает скачок. Коэффициент пропорциональности между значением теплового потока и скачком температур называется граничным теплосопrotivлением (сопrotivлением Капицы). Изначально скачок температур был обнаружен на границе жидкого гелия с твердым телом и исследовался именно этот случай (см. работу [3] и ссылки в ней), но в последние годы также были получены важные экспериментальные результаты по тепловому сопrotivлению на границе двух кристаллов [4–7]. В многочисленных работах, посвященных теории граничного теплосопrotivления [8–11], рассчитывается тепловой поток через границу при данных температурах веществ; при этом функция распределения частиц-переносчиков тепла в веществе полагается равновесной функцией распределения с соответствующей температурой. Между тем наличие постоянного теплового потока через границу означает наличие такого же потока и в веществе, а значит, функция распределения отличается от равновесной. В настоящей работе вводятся функции распределения и граничные условия для функций распределения аналогично тому, как это делается для однородного вещества при наличии градиента температуры, т. е. методом Энскога–Чепмена [12]. Оказывается, что для границы двух кристаллов это приводит к существенным поправкам к рассчитываемому значению граничного теплосопrotivления. В работе [13] рассматриваются колебания в цепочке, состоящей из двух полубесконечных цепочек с одной дополнительной связью между ними на границе. Если с одной стороны на границу падает плоская волна, возникают прошед-

шая и отраженная волны. Задача нахождения амплитуд прошедшей и отраженной волн с учетом условий на границе двух сред полностью решена в [13]. Далее тепловой поток находится из следующих соображений, по сути совпадающих с использованными в модели акустического рассогласования (Acoustic Mismatch Model, далее АММ). Пусть цепочка колеблется на некоторой определенной частоте. Число фононов данной частоты однозначно связано с температурой функцией распределения Бозе–Эйнштейна, так что формально можно говорить о температуре в системе, состояние которой полностью определяется числом заполнения лишь одного состояния, что и учитывается в дальнейшем. Для рассматриваемой модели при определенной частоте существует два решения, соответствующие падению волны на границу слева и справа. Если считать, что температура, рассчитанная по числам заполнения падающих слева (справа) фононов, и есть температура вещества слева (справа), и определить тепловой поток через границу как сумму потоков энергий, связанных с каждым из фононов системы, линеаризовать по разности температур, а затем проинтегрировать по всем частотам, получится тепловой аналог формулы Ландауэра. В действительности, однако, нельзя отождествлять температуры таких состояний с температурами веществ.

### 2. Некорректность формулы АММ для большого коэффициента прохождения

Рассмотрим простейшую модель границы двух кристаллов, уже описанную во Введении, — единую одномерную цепочку, которая характеризуется набором упругих констант  $\beta_1, \beta_2, \beta$ , определяющих взаимодействия между атомами внутри сред и на границе. Массы атомов веществ обозначены  $m_1, m_2$  (см. рисунок),



Процесс распространения колебаний по двум связанным полу-бесконечным одномерным цепочкам.  $q_j, A_j$  и  $\omega$  — параметры волны,  $\beta_j, m_j$  — параметры цепочек,  $j = 1, 2$  — номера сред.  $\beta$  — параметр связи цепочек на границе сред, которая обозначена вертикальной линией. В среде 1 имеются падающая и отраженная волны. Считается, что падающая волна имеет единичную амплитуду.

межатомные расстояния —  $a_1, a_2$ . Ангармонизмом колебаний пренебрегаем. Если на границу падает плоская волна заданной частоты  $\omega$  и единичной амплитуды, то возникают отраженная волна с амплитудой  $A$  и прошедшая волна с амплитудой  $B$ . Колебания такого вида далее будут называться „сшитыми“. Для дальнейшего рассмотрения существенны следующие свойства решения:  $|A_1| = |A_2| = |A|$ ,  $|B_1|^2 = (v_1/v_2)(1 - A^2)$ ,  $|B_2|^2 = (v_2/v_1)(1 - |A|^2)$ , где нижние индексы 1, 2 означают, что волна падает на границу слева или справа соответственно,  $v_i$  — групповые скорости. Приведенные соотношения выражают сохранение теплового потока. Важно, что  $A^2 + B^2 \neq 1$ , т.е. квадраты амплитуд отраженной и прошедшей волн не могут быть интерпретированы как вероятности отражения и прохождения фонона. В [13] тепловой поток находится по формуле

$$q = \Delta T \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty t \frac{\partial n_0}{\partial T} \hbar \omega d\omega, \quad (1)$$

где  $t = 1 - |A|^2$  — коэффициент прохождения,  $T \approx T_1 \approx T_2$  — температура вещества,  $\Delta T = T_1 - T_2 \ll T$  — разность температур. Следует отметить, что, хотя интегрирование формально ведется от нуля до бесконечности, в действительности коэффициент прохождения обращается в нуль для частот, превышающих максимально возможную частоту колебаний в одном из веществ:  $\omega > \min[\omega_{m1}, \omega_{m2}]$ . Передача энергии фононами с частотами  $\max[\omega_{m1}, \omega_{m2}] > \omega > \min[\omega_{m1}, \omega_{m2}]$  возможна только с учетом неупругих процессов [14]. Легко убедиться в том, что при  $t \approx 1$  расчет по формуле (1) не корректен. Действительно, для однородной цепочки, т.е. для случая  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $m_1 = m_2$ ,  $a_1 = a_2$ , формально применим формулу (1). Очевидно, что в этом случае  $t = 1$  и никакого скачка температуры на „границе“ не будет, так как в однородной среде скачки температуры невозможны. Однако формула (1) дает конечный поток тепла при скачке температуры, что было впервые отмечено еще в работе [9]. Можно ожидать, что в корректной формуле в

подынтегральном выражении появится множитель вида  $1/(1-t)^\alpha$ , тогда в однородной среде конечный скачок температуры приводит к бесконечному тепловому потоку, или, проще говоря, скачок температуры невозможен. Для более простой модели двух связанных гармонических струн такая формула была впервые выведена в работе [15], причем величина  $\alpha$  оказалась равной единице. Там же был предложен способ вывода на основе модифицированного метода функции Грина, причем результат получился точно таким же. По поводу современного использования метода функции Грина в задаче вычисления теплосопrotivления (см. работу [16] и ссылки в ней) отметим следующее. Далее выводится формула для расчета теплосопrotivления Капицы с помощью модифицированного метода Энскога—Чепмена. Чтобы понять, в чем заключается ошибка в выводе формулы (1), вернемся к рассмотрению однородной цепочки. Для заданной частоты имеются два решения: волна, бегущая слева направо, и волна, бегущая справа налево. Состояние системы при данной частоте определяется двумя числами заполнения:  $n_\rightarrow, n_\leftarrow$  соответственно. Следуя приведенной во Введении схеме, нужно было бы определить температуры слева и справа по уравнениям

$$n_\rightarrow = \frac{1}{\exp \frac{\hbar \omega}{T_1} - 1}, \quad n_\leftarrow = \frac{1}{\exp \frac{\hbar \omega}{T_2} - 1}. \quad (2)$$

Тогда при наличии потока тепла  $n_\rightarrow \neq n_\leftarrow$ , соответственно  $T_1 \neq T_2$ , т.е. существует скачок температуры в однородной среде, что, как уже отмечалось, нефизично. В такой ситуации, согласно Энскогу и Чепмену, температуру нужно определять с помощью уравнения

$$n_0 = \frac{n_\rightarrow + n_\leftarrow}{2} = \frac{1}{\exp \frac{\hbar \omega}{T} - 1}, \quad (3)$$

а тепловой поток — с помощью уравнения

$$q = \hbar \omega v (\chi_\rightarrow - \chi_\leftarrow), \quad (4)$$

где  $v$  — групповая скорость,  $\chi_\rightarrow = n_\rightarrow - n_0$ ,  $\chi_\leftarrow = n_\leftarrow - n_0$  — неравновесная добавка к функции распределения, удовлетворяющая условию  $\chi_\rightarrow + \chi_\leftarrow = 0$ . В таком случае температура вдоль всей цепочки постоянна даже при наличии теплового потока, как и должно быть, без учета ангармонизма колебаний, ведь в этом случае фононы не рассеиваются и теплопроводность бесконечна.

### 3. Сшивка функций распределения на границе

Вернемся к обсуждению цепочки с границей и вновь будем рассматривать колебания на некоторой определенной частоте. Как уже отмечалось, в этом случае существует два решения в виде сшитых мод, однако нельзя рассчитывать температуру веществ исходя из

чисел заполнения этих мод: это было бы эквивалентно вычислению температуры по числу заполнения фононов, распространяющихся только в сторону границы. Можно было бы, как это сделано в [10], ввести отдельную температуру для колебаний вблизи поверхности, т.е. сшитых мод. При таком подходе их температура отличается от температур каждого из веществ, и передача тепла происходит через неупругие столкновения сшитых мод с обычными фононами. Такой способ, однако, физически не прозрачен и является чрезвычайно громоздким. Попытка проанализировать уравнения при таком подходе требует очень сильных огрублений. Вместо этого попробуем перенести определение температуры по Энскогу–Чепмену на этот случай, т.е. вычислить температуру через среднее арифметическое чисел заполнения фононов, распространяющихся к границе и от границы как слева, так и справа. Для этого перейдем от базиса сшитых мод к базису обычных плоских волн. Введем  $N_1, N_2$  — числа заполнения сшитых мод,  $n_{1\rightarrow}, n_{1\leftarrow}$  — числа заполнения фононов, падающих на границу и двигающихся от границы соответственно в веществе слева,  $n_{2\rightarrow}, n_{2\leftarrow}$  — то же для фононов в веществе справа от границы. Нужно сделать переход от  $N_1, N_2$  к  $n_{1\rightarrow}, n_{1\leftarrow}, n_{2\rightarrow}, n_{2\leftarrow}$ . Для этого выразим амплитуды колебаний атомов слева и справа от границы через операторы рождения и уничтожения двумя различными способами. Обозначим  $\hat{C}_1, \hat{C}_2$  — операторы уничтожения сшитых мод,  $\hat{c}_{1\rightarrow}, \hat{c}_{1\leftarrow}$  — операторы уничтожения фононов, распространяющихся вправо и влево соответственно, в веществе слева,  $v_1, v_2$  — нормировочные постоянные для сшитых мод,  $\eta_1, \eta_2$  — для обыкновенных фононов слева и справа от границы соответственно. Оператор смещения  $n$ -го атома слева от границы равен

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= v_1 \hat{C}_1 (e^{-ika_1 n} + A e^{ika_1 n}) + v_2 \hat{C}_2 B_2 e^{ika_1 n} \\ &= v_1 \hat{C}_1 e^{-ika_1 n} + (v_1 A \hat{C}_1 + v_2 B_2 \hat{C}_2) e^{ika_1 n}, \end{aligned} \quad (5)$$

с другой стороны

$$\hat{u}_n = \eta_1 (\hat{c}_{1\rightarrow} e^{-ika_1 n} + \hat{c}_{1\leftarrow} e^{ika_1 n}). \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), находим, что

$$\hat{c}_{1\rightarrow} = (v_1/\eta_1) \hat{C}_1, \quad \hat{c}_{1\leftarrow} = (v_1/\eta_1) A \hat{C}_1 + (v_2/\eta_1) B_2 \hat{C}_2. \quad (7)$$

Теперь

$$\begin{aligned} n_{1\leftarrow} &= \langle n_{1\leftarrow} n_{1\rightarrow} n_{2\leftarrow} n_{2\rightarrow} | c_{1\leftarrow}^+ c_{1\leftarrow} | n_{1\leftarrow} n_{1\rightarrow} n_{2\leftarrow} n_{2\rightarrow} \rangle \\ &= (v_1/\eta_1)^2 \langle N_1 N_2 | C_1^+ C_1 | N_1 N_2 \rangle = (v_1/\eta_1)^2 N_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Проделав аналогичные вычисления для других чисел заполнения, получаем

$$\begin{cases} n_{1\leftarrow} = (v_1/\eta_1)^2 N_1, \\ n_{1\rightarrow} = (v_1/\eta_1)^2 |A|^2 N_1 + (v_2/\eta_1)^2 |B_2|^2 N_2, \\ n_{2\leftarrow} = (v_2/\eta_2)^2 N_2, \\ n_{2\rightarrow} = (v_2/\eta_2)^2 |A|^2 N_2 + (v_1/\eta_2)^2 |B_1|^2 N_1, \end{cases} \quad (9)$$

Окончательно получаем

$$\begin{cases} n_{1\leftarrow} = |A|^2 n_{1\rightarrow} + (\eta_2/\eta_1)^2 |B_2|^2 n_{2\leftarrow}, \\ n_{2\rightarrow} = (\eta_1/\eta_2)^2 |B_1|^2 n_{1\rightarrow} + |A|^2 n_{2\leftarrow}. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, мы получили условия сшивки функций распределения на границе. Подходящие условия, связывающие нормировочные постоянные  $\eta_1, \eta_2$ , будут выведены далее. Теперь можно ввести

$$n_{i0} = \frac{n_{i\rightarrow} + n_{i\leftarrow}}{2}, \quad (11)$$

с другой стороны,

$$n_{i0} = \frac{1}{\exp \frac{\hbar\omega}{T_i} - 1}, \quad (12)$$

где индекс  $i$  обозначает вещество 1 (слева) и 2 (справа). Это и есть искомое определение температур для цепочки с границей. С математической точки зрения уравнения (10) означают следующее. Пространство состояний цепочки, колеблющейся на фиксированной частоте, двумерно. Когда мы переходим в базис из четырех основных состояний, состояния, которые в действительности могут реализоваться, образуют плоскость в четырехмерном пространстве. Система уравнений (10) как раз и представляет уравнения этой плоскости. С физической точки зрения уравнения (10) выражают простое соображение, что фононы, двигающиеся от границы, складываются из тех, что упали на границу с той же стороны и отразились, и тех, что упали на границу с другой стороны и прошли через нее. То, что в коэффициентах стоят именно квадраты амплитуд, также заранее понятно, поскольку число фононов в данной моде пропорционально энергии колебаний данной моды, а энергия пропорциональна квадрату амплитуды. Таким образом, видно, что прием расширения базиса, который может сначала показаться несколько искусственным, в действительности имеет вполне простой и наглядный физический смысл. Он также позволяет распространить принятое в кинетике определение температур для неравновесных систем на колебания решетки вблизи границы между двумя кристаллами.

#### 4. Сопротивление Капицы

Уравнения (10)–(12) образуют замкнутую систему уравнений. Решение производится в обратном порядке. Зная температуры, находим  $n_{i0}$ ; подставляя (12) в (11), получаем  $n_{1\rightarrow}$  и  $n_{2\leftarrow}$ , подставляем в (10) и определяем  $n_{1\leftarrow}, n_{2\rightarrow}$ . Зная все числа заполнения, находим тепловой поток. Вводя обозначение  $\chi_i = = \chi_{\rightarrow} - \chi_{\leftarrow} = n_{i\rightarrow} - n_{i\leftarrow}$ , получаем

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{A_2} [(1 - A^2) n_{10} - (\eta_2/\eta_1)^2 B_2^2 n_{20}], \\ \chi_2 &= \frac{1}{A_2} [(\eta_1/\eta_2)^2 B_1^2 n_{10} - (1 - A^2) n_{20}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Тепловой поток должен быть одинаковым по обе стороны границы. Отсюда

$$v_1\chi_1 = v_2\chi_2 \quad (14)$$

или

$$v_1[(1 - A^2)n_{10} - (\eta_2/\eta_1)^2 B_2^2 n_{20}] = v_2[(\eta_1/\eta_2)^2 B_1^2 n_{10} - (1 - A^2)n_{20}]. \quad (15)$$

Уравнение (15) выполнено для любых значений  $n_{10}, n_{20}$ , откуда следует, что

$$(\eta_1/\eta_2)^2 B_1^2 = (v_1/v_2)t, \quad (\eta_2/\eta_1)^2 B_2^2 = (v_2/v_1)t. \quad (16)$$

Используя  $B_1^2 = \frac{v_1}{v_2}t, B_2^2 = \frac{v_2}{v_1}t$ , получаем

$$\eta_1 = \eta_2. \quad (17)$$

Это и есть условие для нормировочных постоянных. Подставляя (17) в (13), получаем

$$\chi_1 = \frac{1}{v_1} \frac{t}{1-t} [v_1 n_{10} - v_2 n_{20}],$$

$$\chi_2 = \frac{1}{v_2} \frac{t}{1-t} [v_1 n_{10} - v_2 n_{20}]. \quad (18)$$

Здесь удобно перейти к непрерывному пределу, заменив  $n_{i0} \rightarrow n_{i0} \frac{dk}{2\pi}$ , а затем, воспользовавшись  $v = \frac{d\omega}{dk}$ ,  $\frac{d\omega}{dk} n_{i0} dk = n_{i0} d\omega$ . После этого можно линеаризовать выражение по разности температур в предположении ее малости. Чтобы получить полный тепловой поток, нужно подставить (18) в (4) и проинтегрировать по всем частотам. Окончательно получаем

$$q = \Delta T \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{t}{1-t} \frac{\partial n_0}{\partial T} \hbar\omega d\omega. \quad (19)$$

Видно, что при малых  $t$  полученная формула переходит в формулу из работы [13], аналогичную АММ. Сходная формула была выведена в [15] исходя из других соображений. Приведенный метод вывода с помощью условий сшивки функций распределения на границе удобен тем, что простым введением дополнительных индексов обобщается на трехмерный случай. Выражение (19) выведено при сильном упрощающем предположении, что уравнение (11) выполнено для каждой частоты по отдельности. В действительности имеет место гораздо более слабое интегральное соотношение

$$\int_0^{\omega_{mi}} n_{i0} \hbar\omega d\omega = \int_0^{\omega_{mi}} \frac{n_{i\rightarrow} + n_{i\leftarrow}}{2} \hbar\omega d\omega. \quad (20)$$

Решая задачу при таком условии, получаем следующее выражение для теплового потока:

$$q = \Delta T \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{t}{1-t} \frac{\partial n_0}{\partial T} (1 + f(\omega)) \hbar\omega d\omega. \quad (21)$$

Оно отличается от (19) подынтегральным множителем  $(1 + f(\omega))$ . При этом  $f(\omega)$  — знакопеременная функция порядка единицы. Множитель  $\frac{1}{(1-t)}$  сохраняется. Нахождение  $f(\omega)$  требует совместного решения уравнения Больцмана для фононов по обе стороны границы с условием сшивки функций распределения (10), (17)

$$\begin{cases} n_{1\leftarrow} = |A|^2 n_{1\rightarrow} + |B_2|^2 n_{2\leftarrow}, \\ n_{2\rightarrow} = |B_1|^2 n_{1\rightarrow} + |A|^2 n_{2\leftarrow}. \end{cases} \quad (22)$$

Это и есть обобщение метода Энского–Чепмена на случай границы двух кристаллов. Выражение (19) можно считать приближенной оценкой. Таким образом, использование модифицированного метода Энского–Чепмена позволяет получить более точное выражение для теплопроводности Капицы.

## 5. Сравнение с экспериментом

Попробуем провести приближенное сравнение с экспериментом. В статье [4] сравниваются результаты эксперимента и расчета с помощью АММ, в которой используется формула (1), обобщенная на трехмерный случай (производится интегрирование по компонентам волнового вектора фононов, параллельным границе, более сложно определяется коэффициент прохождения  $t$ ). Так как (19) отличается от (1) лишь множителем  $\frac{1}{1-t}$ , в том случае, если  $t$  не зависит от  $\omega$ , можно просто домножить результат расчета с помощью АММ на соответствующий множитель. При низких частотах коэффициент прохождения может быть найден из теории упругости [4]

$$t(0) = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \quad (23)$$

Здесь  $Z_i$  — так называемый акустический импеданс,  $Z_i = v_i \rho_i$ , где  $v_i$  — скорость звука,  $\rho_i$  — плотность в  $i$ -м веществе. Поскольку в действительности коэффициент прохождения уменьшается с ростом частоты (что учтено в [4]),  $\frac{1}{1-t}$  также уменьшается, так что итоговый результат (см. таблицу) получается завышенным.

Данные, приведенные в таблице для золота, алюминия и титана, оказываются, как и ожидалось, завышенными.

Теплопроводность Капицы для границы различных металлов с алмазом при комнатной температуре (единицы измерения  $10^3 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ )

Металл	$1/(1-t)$	Эксперимент	АММ	АММ (испр.)
Pb	2.5	3	0.05	0.125
Au	50	4	0.4	20
Al	2.5	5	5	12.5
Ti	10	9	7	70

Примечание. В последнем столбце представлены результаты расчета с помощью АММ, умноженные на  $1/(1-t)$ .

Это можно объяснить, во-первых, уже отмечавшимся соображением о грубости оценки, а во-вторых, неидеальностью образцов. Как показано в [4], шероховатости поверхности приводят к понижению теплопроводности Капицы, соответственно расчеты без учета шероховатости должны завышать численные значения. Однако уже из этой простой оценки видно, что даже приближенное вычисление граничного теплосопротивления из элементарных соображений невозможно. Требуется строгое кинетическое рассмотрение. Автор надеется в ближайшее время обобщить изложенный в работе метод на трехмерный случай и провести более точные вычисления. Значение теплопроводности для свинца, полученное с учетом поправки, оказывается хотя и большим, чем рассчитанное с помощью АММ, но все же много меньшим, чем экспериментально измеренное. Это указывает на то, что для границ материалов с существенно различным акустическим импедансом требуется учет неупругой передачи энергии от фононов к электронам, например, с помощью механизмов, предложенных в [11] и [14].

Автор благодарит своего научного руководителя Е.Д. Эйдельмана, выражает благодарность А.Я. Вулю за интерес к работе, а также С.В. Кидалову и Ф.М. Шахову, которые обратили внимание автора на рассмотренную проблему.

## Список литературы

- [1] S.V. Kidalov, F.M. Shakhov. *Materials* **2**, 2467 (2009).
- [2] P.L. Kapitza. *J. Phys. USSR* **4**, 181 (1941).
- [3] G.L. Pollack. *Rev. Mod. Phys.*, **41**, 48 (1969).
- [4] R.J. Stoner, H.J. Maris. *Phys. Rev. B* **48**, 16 373 (1993).
- [5] E.T. Swartz, R.O. Pohl. *Appl. Phys. Lett.* **51**, 2200 (1987).
- [6] H.-K. Lyo, D.G. Cahill. *Phys. Rev. B* **73**, 144 301 (2006).
- [7] R.M. Costescu, M.A. Wall, D.G. Cahill. *Phys. Rev. B* **67**, 054 302 (2003).
- [8] И.М. Халатников. *ЖЭТФ* **22**, 687 (1952).
- [9] W.A. Little. *Can. J. Phys.* **37**, 334 (1959).
- [10] L. Huberman, A.W. Overhauser. *Phys. Rev. B* **50**, 2865 (1994).
- [11] G.D. Mahan. *Phys. Rev. B* **79**, 075 408 (2009).
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика.* Наука, М. (1979). 528 с.
- [13] L. Zhang, P. Keblinski, J.-S. Wang, B. Li. *Phys. Rev. B* **83**, 064 303 (2011).
- [14] А.П. Мейлахс, Е.Д. Эйдельман. *Письма в ЖЭТФ* **97**, 42 (2013).
- [15] A.M. van den Brink. *Phys. Rev. B* **51**, 17 842 (1995).
- [16] Z. Tian, K. Esfarjani, G. Chen. *Phys. Rev. B* **86**, 235 304 (2012).