

05

## Вихри в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте, содержащие несколько квантов магнитного потока

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: marzelik@mail.ru

(Поступило в Редакцию 13 мая 2014 г.)

Исследована возможность существования в длинном периодически упорядоченном джозефсоновском контакте вихрей, содержащих несколько квантов магнитного потока. Предложен алгоритм компьютерного расчета, позволяющий точно рассчитать любую симметричную токовую конфигурацию, содержащую вихри только одного направления. Рассмотрены варианты приближенного аналитического подхода, а также точного компьютерного расчета. Вычислены значения параметра пиннинга, при которых существуют соответствующие решения для случаев 2, 3 и 4 квантов потока. Показано, что энергия вихря квадратично зависит от числа квантов потока в нем. Проведен анализ устойчивости найденных конфигураций относительно малых флуктуаций скачков фазы. Показано, что при достаточно больших значениях  $I$  могут существовать устойчивые решения любой конфигурации, в частности с любым количеством квантов в одной ячейке. В самом начале каждого диапазона значений  $I$ , в котором существует соответствующее решение, имеется участок, иногда совсем малый, в котором решение неустойчиво.

### Введение

В последние годы в поле внимания теоретиков и экспериментаторов попала проблема проникновения магнитного поля в длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт. С одной стороны, это связано с интересом к искусственным структурам такого типа [1], на которых могут быть проверены теоретические предсказания. С другой стороны, эта задача представляет собой модель, которой свойственны все процессы, имеющие место в сверхпроводящих образцах: выталкивание магнитного поля, возникновение вихрей, их пиннинг и все связанные с этим феномены, в частности проникновение в контакт внешнего магнитного поля. Математически же эта задача существенно проще аналогичной задачи для трехмерного сверхпроводника. Она может быть решена достаточно точно, что позволяет рассчитать структуру вихрей, найти энергии и силы пиннинга, а также понять различные детали происходящих процессов.

Классический случай длинного джозефсоновского контакта, представляющего собой тонкий слой диэлектрика (плоскость  $xz$ ) между двумя сверхпроводниками, помещенный в магнитное поле, параллельное оси  $z$ , детально описан в [2]. Распределение скачков фазы  $\varphi$  между сторонами контакта в зависимости от координаты  $x$  описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $\lambda_J$  — так называемая джозефсоновская длина. Будучи помещен во внешнее магнитное поле, такой контакт ведет себя так же, как сверхпроводник второго рода. Пока поле меньше некоторого критического значения

имеет место эффект Мейсснера. При превышении полем этого значения, в контакте устанавливается эквидистантная последовательность так называемых джозефсоновских вихрей. Одиночный вихрь описывается функцией  $\varphi(x) = 4 \arctg(\exp(-x/\lambda_J))$ , график которой приведен на рис. 1. Каждый вихрь содержит один квант магнитного потока  $\Phi_0$ . Вихрей с несколькими квантами  $\Phi_0$  не существует. При уменьшении поля период последовательности увеличивается, и часть вихрей покидает контакт. Никакого пиннинга (зацепления) вихрей не существует.

Искусственный периодически модулированный джозефсоновский контакт (рис. 2, *a*) представляет собой тонкий слой диэлектрика (плоскость  $xz$ ) между двумя сверхпроводниками, пересеченный параллельными друг другу бесконечными вдоль оси  $z$  полосами диэлектрика толщины  $2l$  вдоль оси  $y$  и ширины  $d$  вдоль оси  $x$ , периодически расположенными вдоль оси  $x$  на расстоянии  $L$  друг от друга. Внешнее магнитное поле, а также оси вихрей направлены вдоль оси  $z$ . На рис. 2, *b* изображе-

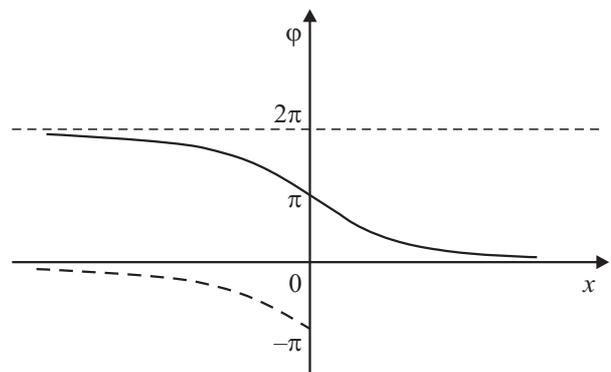
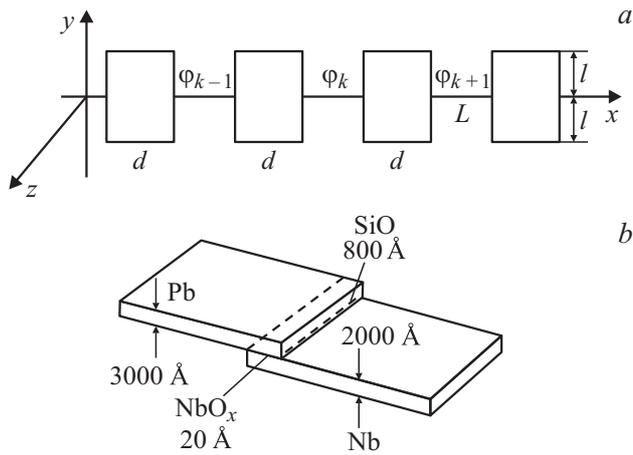


Рис. 1. Форма одиночного вихря в длинном джозефсоновском контакте.



**Рис. 2.** *a* — модель периодически модулированного джозефсоновского контакта, *b* — структура искусственно созданного периодически модулированного джозефсоновского контакта.

на структура искусственно создаваемого периодически модулированного джозефсоновского контакта [1]. На участках между полосами величина скачка фазы между сторонами контакта медленно меняется с координатой, в то время как при переходе через полосу она меняется скачком. Обозначим усредненное по *k*-му участку между полосами значение скачка через  $\varphi_k$  (рис. 2, *a*). Распределение величин  $\varphi_k$  описывает установившееся токовое состояние.

Известно, что энергия стационарного вихря на 1 м его длины равна [3]

$$E = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 + I(1 - \cos \varphi_k) \right], \quad (2)$$

где

$$E_0 = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\mu_0ld}, \quad I = 4\pi\mu_0Lldj_c/\Phi_0$$

— так называемый параметр пиннинга,  $j_c$  — критическая плотность тока. Далее везде будем считать энергии выраженными в единицах  $E_0$ . Первый член в (2) описывает магнитную энергию, а второй — энергию джозефсоновских контактов.

Равновесные состояния вихря, соответствующие экстремуму его энергии, описываются следующей системой разностных уравнений, получаемых из условия  $\frac{\partial E}{\partial \varphi_k} = 0$ :

$$\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} = I \sin \varphi_k \quad (3)$$

с граничным условием  $\varphi_{\infty} - \varphi_{-\infty} = 2\pi K$ , где  $K$  — целое число квантов магнитного потока в вихре.

Система уравнений (3) была впервые получена Френкелем и Конторовой для описания поведения краевых дислокаций в кристалле [4]. Она вследствие своей дискретности дает возможность анализировать поведение солитонов с учетом их пиннинга. Этот пиннинг определяется конечной величиной энергии, необходимой для

смещения центра вихря из одной ячейки в другую. В [5] система (3) выводится из условий квантования флюксоида в ячейках для ламинарного вихря в трехмерной джозефсоновской среде и решается для двух возможных конфигураций одиночных вихрей: с центром в центре ячейки (*a*) и с центром на джозефсоновском переходе (*b*). Показано, что конфигурация (*b*) всегда имеет большую энергию, чем конфигурация (*a*), и всегда является неустойчивой.

Однако во всех работах, включая [5], рассматривались вихри только с одним квантом потока  $\Phi_0$ , и не анализировалась возможность и условия существования уединенных вихрей с несколькими  $\Phi_0$ . Действительно, в классическом случае длинного контакта без пиннинга они не могут существовать, но неоднородность среды в модулированном контакте обеспечивает такую возможность.

Целью настоящей работы является исследование таких вихрей, расчет диапазона значений параметра пиннинга, в котором они существуют, и анализ их устойчивости.

## Методика расчета, основные результаты

### Конфигурация (*a*)

В [6] показано, что два уединенных вихря с одним квантом потока каждый могут находиться в соседних ячейках только при  $I > 2.9$ . Вихрь с несколькими квантами потока соответствует случаю нескольких вихрей с одним квантом каждый, сосуществующих в одной ячейке. Можно предположить, что это может реализоваться при еще больших значениях  $I$ . Рассмотрим конфигурацию (*a*), симметричную относительно центра ячейки между  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , так что  $\varphi_0 = 2\pi K - \varphi_1, \dots, \varphi_{-k} = 2\pi K - \varphi_{k+1}$ . В [5] показано, что при больших  $I$  значения  $\varphi_k$  для  $k > 1$  малы, система (3) линеаризуется и ее решение представляет собой убывающую от центра геометрическую прогрессию:

$$\varphi_k = \varphi_1 \gamma^{k-1} \quad (k \geq 1), \quad (4)$$

где  $\gamma = 1 + I/2 - \sqrt{I + I^2/4} < 1$  — решение характеристического уравнения  $\gamma^2 - (2 + I)\gamma + 1 = 0$ .

Подставив в уравнение  $\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0 = I \sin \varphi_1$  равенства  $\varphi_2 = \varphi_1 \gamma$ ,  $\varphi_0 = 2\pi K - \varphi_1$ , получим для нахождения  $\varphi_1$  следующее уравнение:

$$(3 - \gamma)\varphi_1 + I \sin \varphi_1 - 2\pi K = 0. \quad (5)$$

При  $K = 1$  из графика функции  $f_a(\varphi_1) = (3 - \gamma)\varphi_1 + I \sin \varphi_1 - 2\pi$  (рис. 3, *a*) видно, что при любых  $I$  существует, как и следовало ожидать, только одно решение (4) с  $\varphi_1 \leq \pi$ , соответствующее обычному случаю вихря с одним квантом потока.

При  $K = 2$  уравнение (5) в зависимости от  $I$  может иметь как одно, так и три различных решения в области

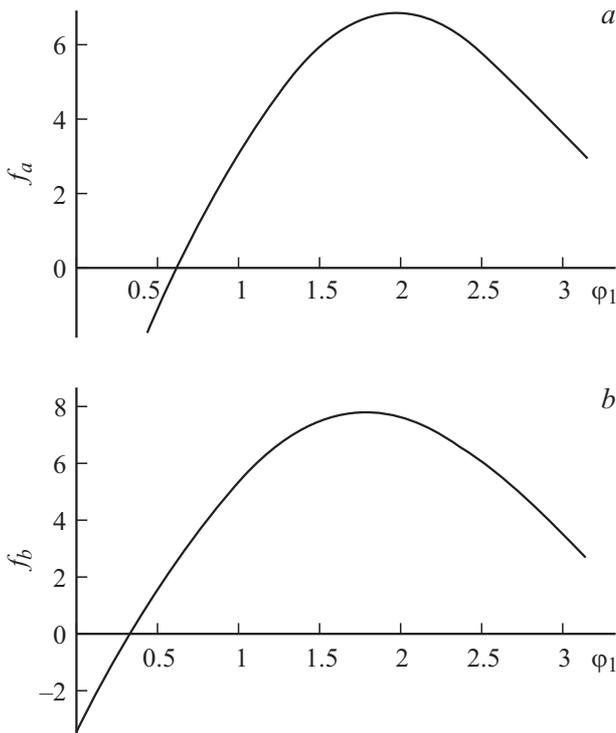


Рис. 3. График функций  $f_a(\varphi_1)$  — (a) и  $f_b(\varphi_1)$  — (b) для случая  $K = 1, I = 8$ .

от 0 до  $2\pi$  (рис. 4, a). Разделяющим эти два случая значением является  $I = 7.454$ . При  $I > 7.454$  график имеет три пересечения с осью абсцисс. Далее будет показано, что решение В всегда неустойчиво. Рассмотрим

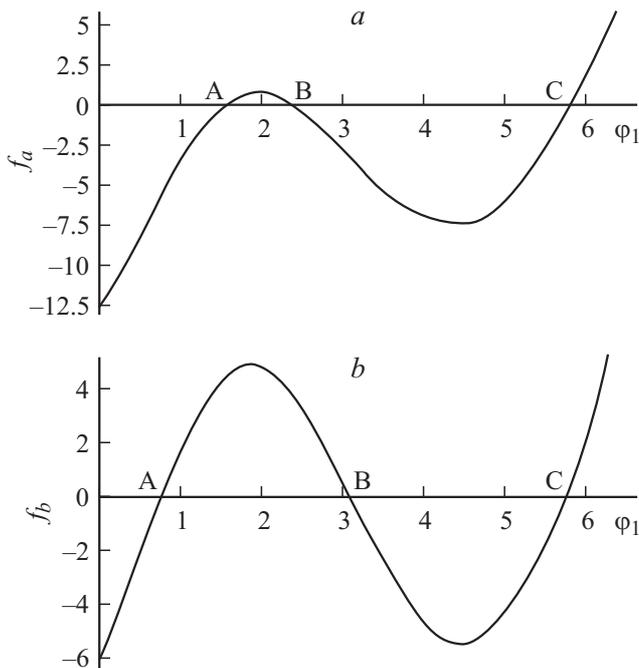


Рис. 4. График функций  $f_a(\varphi_1)$  — (a) и  $f_b(\varphi_1)$  — (b) для случая  $K = 2, I = 8$ .

оставшиеся два. Точке пересечения А соответствует конфигурация, в которой все токи в одной половине текут в одну сторону, монотонно убывая с удалением от центра. Это и есть искомый вихрь с двумя квантами потока. В конфигурации, соответствующей точке пересечения С, ток  $J_1 = J_C \sin \varphi_1$  течет в сторону, противоположную всем остальным токам. Эта ситуация соответствует двум вихрям с одним квантом потока каждый, центры которых расположены через одну ячейку. При  $I < 7.454$  остается только эта точка пересечения, т.е. вихрь с двумя квантами потока существовать не может.

Подстановка выражения (4) приводит (2) к виду

$$E = E_0 \left( \frac{\varphi_1^2(1-\gamma)}{1+\gamma} + 2(K\pi - \varphi_1)^2 + 2I(1 - \cos \varphi_1) + \frac{I\varphi_1^2\gamma^2}{1-\gamma^2} \right). \quad (6)$$

Сравним энергии разных конфигураций. При  $I = 8$  расчет по (6) дает для вихря с двумя квантами потока (точка А на рис. 4) значение энергии  $62.64 E_0$ , для С —  $35.80 E_0$ . Энергия вихря с одним квантом потока ( $K = 1$ ) при том же  $I$  равна  $16.04 E_0$ . Сравнивая эти значения, можно сделать следующие выводы. Энергия двух вихрей с центрами через одну ячейку немного больше суммы энергий двух уединенных вихрей, поскольку учитывается энергия их взаимодействия, положительная для отталкивания. Энергия вихря с двумя квантами примерно в 4 раза больше, чем с одним, что соответствует квадратичной зависимости энергии вихря от его магнитного потока.

Тот факт, что существование вихря с двумя квантами потока представляется энергетически невыгодным по сравнению с двумя вихрями с одним квантом каждый, заставляет провести исследование его устойчивости. Будем рассматривать энергию как функцию набора переменных  $\varphi_k$ . Запишем выражение для приращения энергии (2) при наборе вариаций  $\delta\varphi_k$  (первые производные равны нулю согласно (3))

$$\delta E = \sum_{k,m} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_k \partial \varphi_m} \delta \varphi_k \delta \varphi_m. \quad (7)$$

Будем далее считать  $\varphi_k$ , достаточно удаленные от границы ( $k \geq N + 1$ ), равными нулю. Тогда матрица квадратичной формы (7) станет конечной и примет вид, приведенный на рис. 5, a. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на  $1/(2 + I \cos \varphi_N)$ , далее к третьей строке — получившуюся вторую, умноженную на  $1/(2 + I \cos \varphi_{N-1})$ , и так далее до центральной строки. Диагонализируя матрицу с другого угла, ко второму справа столбцу прибавим первый справа, умноженный на  $1/(2 + I \cos \varphi_N)$  и так далее до центрального столбца. Полученная матрица, все элементы которой ниже диагонали равны нулю, представлена на рис. 5, b. Диагональные элементы вычисляются по рекуррентному закону

$$a_N = 2 + I \cos \varphi_N; \quad a_{n-1} = 2 + I \cos \varphi_n - 1/a_n. \quad (8)$$

*a*

$2+I\cos\varphi_N$	...	0	0	0			
...	...	...	...				
0	...	$2+I\cos\varphi_2$	-1				
0	...	-1	$2+I\cos\varphi_1$	-1			0
0			-1	$2+I\cos\varphi_1$	-1	...	0
				-1	$2+I\cos\varphi_2$	...	0
				...	...	...	...
			0	0	0	...	$2+I\cos\varphi_N$

*b*

$a_N$	...	0	0				
...	...	...	...				
0	...	$a_2$	-1				
0	...	0	$a_1$	-1			
			0	$a_1-1/a_1$	-1		0
				0	$a_2$	...	0
					...	...	...
			0	0	...	...	$a_N$

**Рис. 5.** Матрица квадратичной формы (7) для конфигурации (а): *a* — исходная, *b* — после приведения к диагональному виду.

Определитель матрицы, имеющей все нулевые элементы ниже диагонали, равен произведению всех диагональных элементов. Из отрицательности как минимум одного диагонального элемента следует, что квадратичная форма (7) не является положительно определенной, т.е. энергия в этой точке не имеет локального минимума.

Проведя вычисления по алгоритму (8) с использованием значений  $\varphi_k$  для точки пересечения В на рис. 4, *a*, можно убедиться, что  $a_1 < 0$  при любых *I*, т.е. это решение всегда является неустойчивым и реализоваться не может. Те же вычисления для точки А, соответствующей одному вихрю с двумя квантами потока, показывают, что до значения  $I = 7.733$  величина  $a_1$  меньше 1, что означает отрицательность центрального диагонального элемента ( $a_1 - 1/a_1$ ). Таким образом, вихрь с двумя квантами потока является неустойчивым в диапазоне  $7.454 < I < 7.733$ . Этой неустойчивости следовало ожидать, так как при малом превышении *I* над 7.454 точки А и В на рис. 4, *a* находятся очень близко друг к другу, т.е. соответствуют практически одним и тем же комбинациям  $\varphi_k$ . Но точка В, как мы знаем, всегда неустойчива, значит, точка А может быть устойчивой только на некотором удалении от нее, что имеет место только при  $I = 7.454$  плюс какая-то конечная  $\Delta$ . При  $I > 7.733$  вихрь с двумя квантами потока устойчив, хотя его энергия намного больше энергии конкурирующей конфигурации из двух вихрей в соседних ячейках.

Точка С устойчива всегда, так как  $a_1$  оказывается всегда больше 1.

Приведенное рассмотрение справедливо, только когда все скачки фазы  $\varphi_k$  при  $k > 1$  малы. Для точки С это значит, что  $\varphi_2 = \varphi_1\gamma \approx 2\pi\gamma < 0.5$ , что выполнено при

$I > 7$ , т.е. во всем диапазоне существования вихря с двумя квантами потока.

Однако представляет интерес исследование решения и при меньших значениях *I*. Найдем это решение численно. Для этого запишем систему (3) в виде рекуррентного соотношения

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m. \tag{9}$$

Зная значения скачка фазы на двух соседних контактах, можно найти всю конфигурацию. Рассмотрим произвольную конфигурацию, симметричную относительно центра какой-то ячейки и содержащую только вихри одного направления. Тогда значения скачка фазы должны монотонно убывать с ростом номера, причем на контактах центральной ячейки выполнено соотношение [5]  $\varphi_0 = 2\pi K - \varphi_1$ , где *K* — число квантов  $\Phi_0$  в вихре. Выбрав некоторое значение  $\varphi_1$  и подставляя в (9) в качестве двух последовательных значений  $\varphi_k$  величины  $2\pi K - \varphi_1$  и  $\varphi_1$ , начнем расчет последующих значений скачка фазы. Если очередное рассчитанное значение оказывается меньше нуля или больше предыдущего, то исходное значение  $\varphi_1$  увеличивается или уменьшается соответственно, и расчет начинается снова. Таким способом можно найти все множество значений  $\varphi_k$  с любой заданной точностью. Следует иметь в виду, что решений может быть бесконечно много, так что искать нужно то, которое интересует. Например, в случае двух вихрей ( $K = 2$ ) есть решения, соответствующие разным количествам ячеек между центрами. Если минимальное расстояние между центрами вихрей *d* равно *N* ячеек, то, кроме решения для  $d = N$  есть решения и для всех других  $d > N$ . Если же вихрей больше двух, то могут быть варианты с различными расстояниями между

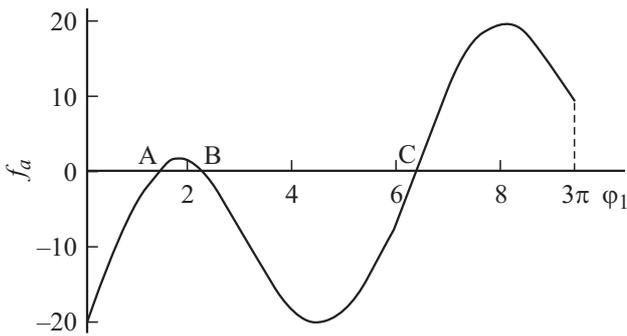


Рис. 6. График функций  $f_a(\varphi_1)$  для случая  $K = 3$ ,  $I = 15$ .

последовательными вихрями. Отметим, что симметрия конфигурации требует, чтобы последовательности вихрей по обе стороны от центра были одинаковы. Поиск нужной конфигурации достигается правильным выбором исходного значения  $\varphi_1$ . Например, начиная от  $\varphi_1 = 5$ , можно показать, что минимальное значение  $I$ , при котором центры двух уединенных вихрей с одним квантом потока каждый могут располагаться через одну ячейку (расстояние между центрами  $d = 0.5 + 1 + 0.5 = 2$ ), равно 1.987. Это значение является более точным, чем  $I = 1.947$  [6], найденное в предположении  $I \gg 1$ .

Отметим, что такой численный расчет дает точно такие же минимальные значения параметра  $I$  для существования вихря с двумя  $\Phi_0$  (7.454) и для его устойчивости (7.733), что и приближенный при выполнении (4). Условие малости всех  $\varphi_k$  при  $k > 1$  может быть выполнено при больших  $I$  только для конфигураций, в которых вихри расположены не дальше одной ячейки от центра. Численный же расчет справедлив для любых симметричных конфигураций.

Рассмотрим случай  $K = 3$ . График функции  $f_a(\varphi_1)$  изображен на рис. 6. Корней может быть либо один, либо три. Решение В, как и при  $K = 2$ , оказывается неустойчивым. Решение А соответствует одному вихрю с тремя квантами потока  $\Phi_0$ , а точка С — трем вихрям с одним квантом каждый, расположенным в трех соседних ячейках. Решение А существует при  $I > 13.93$ , но до  $I = 14.07$  оно неустойчиво. Для нахождения диапазона существования решения С необходимо исследовать ситуацию при не очень больших  $I$ , когда нарушается условие малости всех  $\varphi_k$ , кроме  $\varphi_1$ . Численный расчет по алгоритму (9) показывает, что три вихря в соседних ячейках могут существовать при  $I > 3.290$ , но до  $I = 3.292$  это решение неустойчиво. Энергия вихря с тремя  $\Phi_0$  при  $I = 15$ , равная  $156.5 E_0$ , в 8.95 раз больше энергии вихря с одним квантом  $\Phi_0$  ( $K = 1$ ), равной  $17.5 E_0$  при том же значении  $I$ . Это соотношение подтверждает предположение о квадратичной зависимости энергии вихря от числа квантов потока в нем. Энергия трех вихрей в соседних ячейках (С) равна  $56.9 E_0$ , т.е. ненамного превышает энергию трех уединенных вихрей, что связано с учетом энергии отталкивания.

### Конфигурация (b)

Аналогичные расчеты можно провести и для конфигурации, симметричной не относительно центра ячейки, а относительно одного из контактов.

В этом случае центр вихря лежит на контакте с  $\varphi_0 = \pi K$ , и выполнены соотношения  $\varphi_{-k} = 2\pi K - \varphi_k$ , поэтому итоговое уравнение имеет вид, отличный от (4),

$$(2 - \gamma)\varphi_1 + I \sin \varphi_1 - \pi K = 0. \quad (10)$$

При  $K = 1$  из графика функции  $f_b(\varphi_1) = (2 - \gamma)\varphi_1 + I \sin \varphi_1 - \pi K$  (рис. 3, b) видно, что при любых  $I$  существует только одно решение уравнения (10) с  $\varphi_1 \leq \pi$ , соответствующее обычному случаю вихря конфигурации (b) с одним квантом потока. Уже этот вихрь занимает не одну ячейку, а две. Поэтому можно ожидать, что искомый вихрь с двумя квантами в одной ячейке в этом варианте получить не удастся.

При  $K = 2$  уравнение (10) в зависимости от  $I$  может иметь как одно, так и три различных решения в области от 0 до  $2\pi$  (рис. 4, b). Разделяющим эти два случая значением является 2.907. При  $I > 2.907$  график имеет три пересечения с осью абсцисс. Далее будет показано, что решение В всегда неустойчиво. Рассмотрим оставшиеся два. Точке пересечения А соответствует конфигурация, в которой все токи в одной половине текут в одну сторону, монотонно убывая с удалением от центра. Учтя центральный контакт с  $\varphi_0 = 2\pi$ , можно понять, что это конфигурация, состоящая из двух вихрей с одним квантом потока каждый, расположенных в соседних ячейках. В конфигурации, соответствующей точке пересечения С, ток  $J_1 = J_C \sin \varphi_1$  течет в сторону, противоположную всем остальным токам. Это два вихря с одним квантом потока каждый, центры которых расположены через две ячейки. Таким образом, решение, описывающее один вихрь с двумя квантами потока, в такой геометрии, как и ожидалось, отсутствует.

В общем случае левая точка пересечения соответствует самой „плотной“ вихревой структуре в данной геометрии, а правая — следующей. Действительно, в конфигурации (a) точке А соответствовал один вихрь с двумя квантами потока (расстояние между центрами  $d = 0$ ), а точке С — два вихря с центрами через одну ячейку ( $d = 2$ ). В конфигурации (b) точка А давала решение с  $d = 1$ , а точка С — с  $d = 3$ .

Найдем численно точное решение для любых значений  $I$ . В этом случае  $\varphi_0 = K\pi$  [5], поэтому в (9) в качестве двух последовательных значений  $\varphi_k$  подставляются величины  $K\pi$  и  $\varphi_1$ , а далее последовательность операций та же. Правда, выбор исходных значений  $\varphi_1$  происходит иначе. Начиная от  $\varphi_1 = 0.5$ , можно показать, что центры двух уединенных вихрей с одним квантом потока каждый ( $K = 2$ ) могут располагаться в соседних ячейках ( $d = 1$ ) при  $I > 2.921$  (в [6] 2.907). Случаю  $d = 3$  соответствуют  $I > 1.536$  (в [6] 1.428).

Исследование устойчивости найденных решений проводится так же, как в предыдущем случае. Изменит-

Результаты расчетов для случая  $K = 4$

Точка на графике	Вихри	$I$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$a_1$	$2-I - 2/a_1$	$E/E_0 (I = 21)$
A (a)	040	20.30	1.667	0.079	0.003	-0.006		15.8
		20.38	1.615	0.072	0.003	+1.05		
A (b)	0220	9.3690	1.772	0.158	0.014	+0.11	-7.5	8.3
		9.3707	1.757	0.156	0.014	+0.18	+0.27	
C (a)	121	4.347	7.613	1.926	0.315	-0.07		6.3
		4.353	7.600	1.881	0.307	+1.10		
E (a)	202	8.2409	11.44	1.78	0.176	-0.36		8.0
		8.2412	11.44	1.78	0.176	+1.0		
C (b)	1111	3.3539	6.675	2.064	0.407	+0.26	-2.2	4.3
		3.3540	6.674	2.059	0.406	+0.60	+2.1	
E (b)	2002	7.89270	11.093	1.764	0.181	0.17	-2.1	8.0
		7.89273	11.092	1.763	0.181	0.20	+0.02	

ся только центральный член в матрице рис. 5, *b*. Он будет иметь вид  $2 + I \cos K\pi - 2/a_1$ . Расчеты показывают, что при  $K = 1$  все конфигурации неустойчивы, что подтверждает прежние результаты [7]. При  $K = 2$  конфигурация двух вихрей с одним квантом потока каждый, расположенных в соседних ячейках ( $d = 1$ ), оказывается устойчивой только при  $I > 2.956$ , а для  $d = 3$  — при  $I > 1.549$ . При любых нечетных  $K$  для всех  $I \geq 2$  все конфигурации (*b*) неустойчивы. При  $a_1 < 0$  это следует из отрицательности диагонального элемента  $a_1$  матрицы рис. 5, *b*, а при  $a_1 > 0$  отрицателен ее центральный элемент  $2 - I - 2/a_1$ . Скорее всего, все конфигурации (*b*) при нечетных  $K$  будут неустойчивы и при  $I < 2$ , но доказательство этого не входит в задачи данного исследования.

Чем больше число квантов потока в рассматриваемой конфигурации, тем больше возможных комбинаций. На рис. 7, *a* и *b* приведены графики функций  $f_a(\varphi_1)$  и  $f_b(\varphi_1)$  для  $K = 4$ . Они имеют по пять точек пересечения с осью. Точки В и D на спадающих участках кривой оказываются неустойчивыми. Проведем анализ остальных решений. В таблице приведены результаты расчетов основных конфигураций при  $K = 4$ . В левом крайнем столбце приведена точка на графике рис. 7, *a* или *b*, во втором — указано число квантов в ячейках, близких к центру: 202, например, означает, что в центральной ячейке нет ни одного кванта  $\Phi_0$ , а в соседних с нею по два. В третьем слева столбце приведены значения  $I$ , начиная с которых существует такое решение (верхние строки), а также значения, начиная с которых оно является устойчивым (нижние строки). Устойчивость для конфигураций (*a*) определяется знаком  $a_1$ , а для (*b*) — знаком величины  $2 - I - 2/a_1$ . Значения их приведены в 7-м и 8-м столбцах. В столбцах с 4-го по 6-й приведены значения скачков фазы с  $\varphi_1$  до  $\varphi_3$ . Графики рис. 7 построены в предположении малости всех  $\varphi_k$  при  $k > 1$ . Это предположение выполняется только для

достаточно больших значений  $I$ . Легко видеть, что условие малости  $\varphi_2$ , позволяющее использовать формулы (4), (5), (6), (10), выполнено только для конфигурации с четырьмя  $\Phi_0$  в ячейке — точка А (*a*), а также для случая двух вихрей с двумя  $\Phi_0$  каждый, расположенных в соседних ячейках — точка А (*b*). Для этих ситуаций формулы и численный расчет дают близкие значения. Для остальных случаев пришлось использовать только численный расчет по алгоритму (9). При этом графики рис. 7 качественно описывают эти ситуации, но точки пересечения с осью смещены.

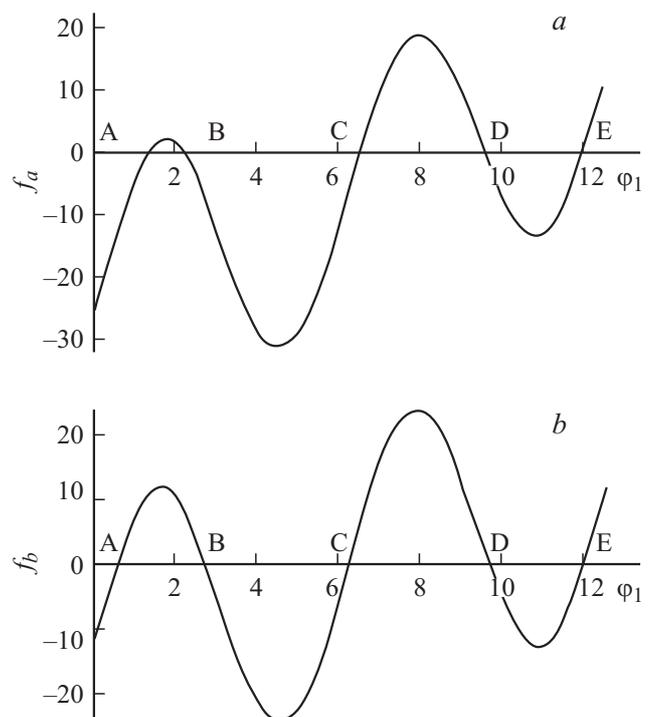


Рис. 7. Графики функций  $f_a(\varphi_1)$  — (*a*) и  $f_b(\varphi_1)$  — (*b*) для случая  $K = 4, I = 21$ .

В последнем столбце приведены значения энергий рассмотренных конфигураций при  $I = 21$  (когда все они могут существовать), нормированные на энергию вихря с одним квантом ( $K = 1$ ) при том же  $I$ , равную  $18.1 E_0$ .

На основании данных таблицы можно сформулировать следующие выводы. При достаточно большом значении  $I$  может существовать устойчивое решение любой конфигурации, в частности с любым количеством квантов в одной ячейке. Энергия вихря квадратично зависит от числа квантов потока в нем. В самом начале каждого диапазона значений  $I$ , в котором существует соответствующее решение, имеется участок, иногда совсем малый, в котором решение неустойчиво.

## Заключение

Исследована возможность существования в длинном периодически упорядоченном джозефсоновском контакте вихрей, содержащих несколько квантов магнитного потока.

Предложен алгоритм компьютерного расчета, позволяющий точно рассчитать любую симметричную токовую конфигурацию, содержащую вихри только одного направления.

Рассмотрены варианты приближенного аналитического подхода при больших значениях параметра пиннинга  $I$ , когда все скачки фазы  $\varphi_k$  при  $k > 1$  малы, а также точного компьютерного расчета при любых  $I$ . Вычислены значения параметра пиннинга, при которых существуют соответствующие решения для случаев 2, 3 и 4 квантов потока. Рассчитаны энергии найденных конфигураций. Показано, что энергия вихря квадратично зависит от числа квантов потока в нем.

Проведен анализ устойчивости найденных конфигураций относительно малых флуктуаций скачков фазы. Показано, что, несмотря на энергетическую невыгодность, при достаточно большом значении  $I$  может существовать устойчивое решение любой конфигурации, в частности с любым количеством квантов в одной ячейке. В самом начале каждого диапазона значений  $I$ , в котором существует соответствующее решение, имеется участок, иногда совсем малый, в котором решение неустойчиво.

## Список литературы

- [1] Golubov A.A., Serpuchenko I.L., Ustinov A.V. // Sov. Phys. JETP. 1988. Vol. 67. P. 1256.
- [2] Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970.
- [3] Брыксин В.В., Гольцев А.В., Дороговцев С.Н., Кузьмин Ю.А., Самухин А.Н. // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 1281.
- [4] Френкель Я.И., Конторова Т.М. // Физический журн. 1939. Т. 1. С. 137.
- [5] Zelikman M.A. // Superconductor Science & Technology. 1999. Vol. 12. N 1. P. 1.
- [6] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 44.
- [7] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 55.