

01

Выбор граничных условий при моделировании термоволновых процессов в многослойных объектах

© А.Л. Глазов, О.С. Васютинский

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург
E-mail: glazov.holo@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 8 сентября 2014 г.

Рассмотрены процессы нестационарной диффузии тепла в слоистых объектах. Проанализировано распространение тепловых волн при различных теплофизических параметрах граничащих областей и интерфейса. Показано, что учет изменения теплового потока через граничный слой с помощью емкостного теплового сопротивления позволяет значительно повысить точность расчета и упростить моделирование нестационарных тепловых полей в многослойных объектах.

Большое количество задач в области теплопереноса связано с расчетами или оценкой влияния интерфейсов между двумя или более областями. Разнообразие приложений очень велико: от фундаментальных исследований в нанофизике до практически важных расчетов теплоотвода в силовой полупроводниковой электронике или строительстве. Стандартным подходом для решения таких задач является замена граничного слоя конечной толщины на бесконечно тонкий слой с конечным тепловым сопротивлением. При этом учет взаимодействия теплового потока с интерфейсом сводится к введению скачка температур на границе раздела, пропорционального тепловому потоку. Коэффициент пропорциональности при этом называется тепловым сопротивлением. Тепловой поток считается непрерывным. Во многих случаях такой подход дает удовлетворительные результаты и вполне оправдан. Более того, основываясь на электротепловой аналогии, различные комбинации слоев рассматриваются как соответствующие комбинации тепловых сопротивлений [1]. Тогда аналогично электротехническим расчетам можно найти общее тепловое сопротивление нескольких областей. Однако, продолжая эту аналогию, любой материал, обладающий теплоемкостью, должен влиять на процессы нестационарной тепловой

диффузии, причем в тем большей степени, чем больше скорость этих процессов. Различные случаи расчетов нестационарной тепловой диффузии описаны и в классических монографиях [2], и в специальных руководствах по расчетам теплообмена, например в радиоэлектронике [3] или строительстве [4,5]. Однако, как правило, при моделировании тепловых потоков через интерфейсы этим аспектом полностью пренебрегают даже в тех случаях, когда рассматривают исключительно нестационарные процессы, например, при изучении рассеяния тепловых волн или использовании термоволновых методов диагностики [6–9], в которых учитывается только переменная составляющая температурных колебаний.

В настоящее время для возбуждения тепловых волн в таких методах используется излучение лазеров как с непрерывной временной модуляцией, так и в импульсном режиме. При этом использование ультракоротких лазерных импульсов позволяет изучать с одной стороны наноразмерные объекты, а с другой — сверхбыстрые энергетические процессы. Очевидно, что учет полного теплового импеданса интерфейсов в таких нестационарных тепловых процессах может иметь принципиальное значение.

Целью данной работы является оценка границ применимости известной модели тепловой диффузии через интерфейсы с учетом теплового сопротивления, развитие этой модели для нестационарных процессов и обоснование ее применения.

Рассмотрим задачу отражения и прохождения плоских тепловых волн на границах внутреннего слоя плоской трехслойной системы. Обозначим температуры внешних полубесконечных слоев T_1 и T_2 , а промежуточного слоя T_i . Пусть плоская волна падает со стороны слоя 1. Тогда решения уравнений теплопроводности для 3 слоев можно записать в виде

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= a e^{-iq_1 x + i\omega t} + r e^{iq_1 x + i\omega t}, \\ T_i(x, t) &= b e^{-iq_i x + i\omega t} + c e^{iq_i x + i\omega t}, \\ T_2(x, t) &= \tau e^{iq_2(x+l) + i\omega t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где a — амплитуда падающей волны, r и τ — коэффициенты отражения и прохождения во внешних слоях, b и c — амплитуды волн в промежуточном слое, q_1 , q_2 и q_i — волновые векторы в

соответствующих слоях, $\omega = 2\pi f$, f — частота колебаний тепловых волн. Введем также следующие обозначения для теплофизических параметров слоев: K — теплопроводность, $\kappa = K/C'$ — температуропроводность, $\eta = (KC')^{1/2}$ — коэффициент тепловой активности или тепловая инерция, $C' = \rho C_p$ — объемная теплоемкость, ρ — плотность, C_p — изобарная удельная теплоемкость, l — толщина промежуточного слоя.

Из граничных условий непрерывности температуры и теплового потока легко найти коэффициенты r , s , d и τ как функции a . Выпишем здесь коэффициенты r и τ :

$$r = a \frac{(\eta_1 - \eta_2) \cos h(L\sqrt{i}) + (\eta_1\eta_2/\eta_i - \eta_i) \sin h(L\sqrt{i})}{(\eta_1 + \eta_2) \cos h(L\sqrt{i}) + (\eta_1\eta_2/\eta_i + \eta_i) \sin h(L\sqrt{i})}, \quad (2a)$$

$$\tau = a \frac{2\eta_1}{(\eta_1 + \eta_2) \cos h(L\sqrt{i}) + (\eta_1\eta_2/\eta_i + \eta_i) \sin h(L\sqrt{i})}, \quad (2b)$$

где $L = l/l_T$ — тепловая толщина слоя, безразмерная величина, равная отношению толщины слоя к длине тепловой волны в этом слое $l_T = \sqrt{\omega/\kappa_i}$.

Для оценки влияния параметров промежуточного слоя проанализируем поведение граничных условий при стремлении его толщины к нулю. Подставив выражения для температуры промежуточного слоя в общем виде (1) в граничные условия и исключая коэффициенты b и c , получим при малых l следующие соотношения для температур и тепловых потоков на границах промежуточного слоя:

$$T_2(-l, t) - T_1(0, t) = \frac{l}{K_i} K_1 T_1'(0, t), \quad (3a)$$

$$K_2 T_2'(-l, t) - K_1 T_1'(0, t) = -i\omega C_i' T_1(0, t), \quad (3b)$$

где учтено соотношение для волнового вектора $q^2 = -i\omega/\kappa = -i\omega C_i'/K_i$, а $T'(x_0, t)$ обозначает производную от $T(x, t)$ по x в точке x_0 . Эти выражения можно рассматривать как граничные условия для неидеальной границы между двумя полубесконечными слоями.

Таким образом, в нестационарном случае ($\omega > 0$) на неидеальной границе имеет место скачок не только температуры, но и теплового потока. Привлекая электротепловую аналогию, согласно которой температура ассоциируется с разностью потенциалов, а тепловой поток

$K_{\text{grad}T}$ — с электротоком, можно ввести наряду с тепловым сопротивлением слоя $R_T = l/K_i$ реактивное емкостное тепловое сопротивление $Z_{cT} = (i\omega C_i' l)^{-1}$.

Используя выведенные граничные условия (3), получим следующие выражения для r и τ с учетом тепловых сопротивлений R_T и Z_{cT} :

$$r_Z = a \frac{\eta_1 - \eta_2 + \eta_1 \eta_2 \sqrt{i\omega} R_T - 1/(\sqrt{i\omega} Z_{cT})}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_1 \eta_2 \sqrt{i\omega} R_T + 1/(\sqrt{i\omega} Z_{cT})}, \quad (4a)$$

$$\tau_Z = a \frac{2\eta_1(1 - R_T/Z_{cT})}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_1 \eta_2 \sqrt{i\omega} R_T + 1/(\sqrt{i\omega} Z_{cT})}. \quad (4b)$$

Оценим влияние этих сопротивлений на величины коэффициентов отражения и прохождения тепловых волн. Для сравнения с результатами для трехслойной системы (2) перепишем формулы (4), выражая R_T , Z_{cT} через η_i и L :

$$r_Z = a \frac{\eta_1 - \eta_2 + \sqrt{i}(\eta_1 \eta_2 / \eta_i - \eta_i)L}{\eta_1 + \eta_2 + \sqrt{i}(\eta_1 \eta_2 / \eta_i + \eta_i)L}, \quad (5a)$$

$$\tau_Z = a \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2 + \sqrt{i}(\eta_1 \eta_2 / \eta_i + \eta_i)L}. \quad (5b)$$

Заметим, что они совпадают с выражениями (2) для r и τ при $L \ll 1$. Из выражений (5) для r_Z и τ_Z видно, что вклад R_T и Z_{cT} одного порядка по L , и поэтому нет оснований пренебрегать емкостным сопротивлением а priori при малых L . В действительности не учитывать емкостное тепловое сопротивление можно только в случае $\eta_i \ll \sqrt{\eta_1 \eta_2}$. В обратном случае можно как раз пренебречь тепловым сопротивлением R_T .

Графики на рис. 1 и 2 демонстрируют зависимости коэффициентов отражения и прохождения тепловых волн от L при различных комбинациях коэффициентов тепловой активности слоев. Кривые на графиках получены для случаев, когда коэффициенты внешних слоев равны. Положим, $\eta_1 = \eta_2 = 1$, так как при расчетах r и τ имеет значение только соотношение между коэффициентами η . Расчеты показывают, что приемлемые результаты при игнорировании Z_{cT} получаются только в случае $\eta_i^2 < 0.1\eta_1\eta_2$. В других приведенных случаях ошибка может составлять порядка десятков процентов уже при $L \approx 0.1$. Примечательным с практической точки зрения является тот факт, что полученные

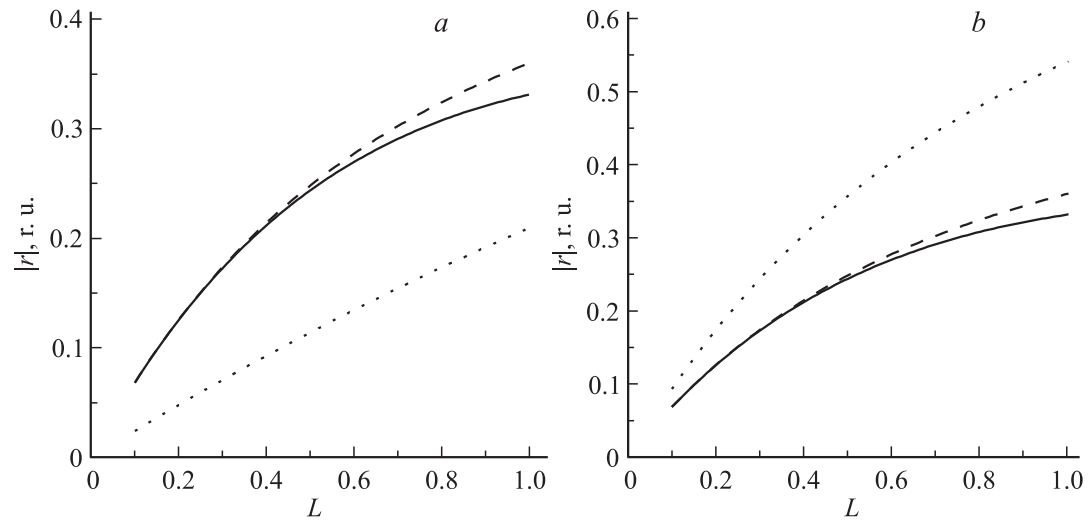


Рис. 1. Поведение коэффициента отражения тепловых волн от промежуточного слоя в зависимости от тепловой толщины этого слоя L . Коэффициенты тепловой активности: для внешнего слоя $\eta_1 = \eta_2 = 1$, для промежуточного слоя $\eta_i = 2$ (a); $\eta_i = 0.5$ (b). Сплошная линия — расчет для трехслойной системы, штриховая линия — двухслойная система с учетом теплопроводности и теплоемкости интерфейса, пунктирная линия — двухслойная система с учетом только теплопроводности интерфейса.

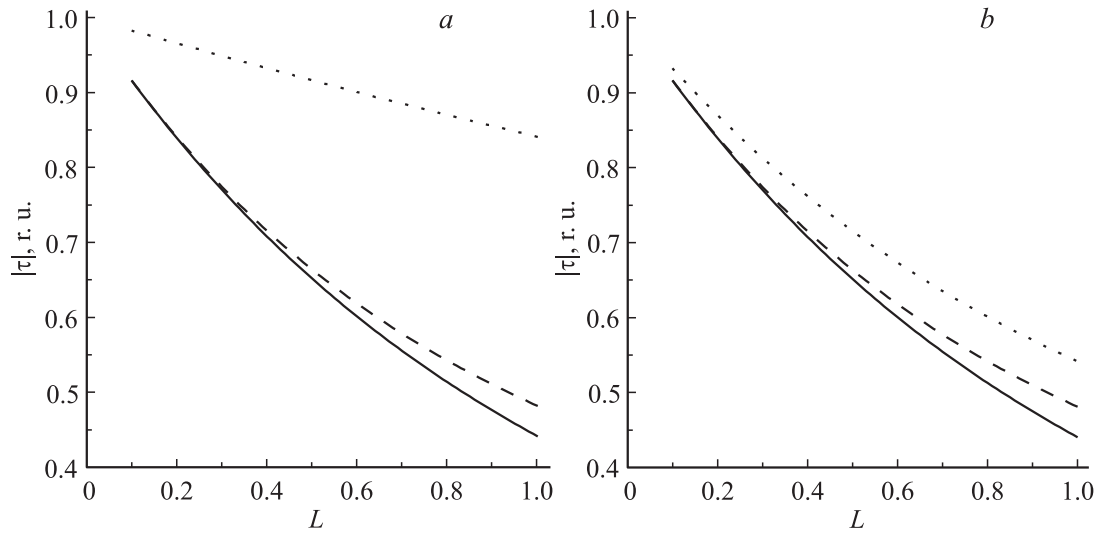


Рис. 2. Поведение коэффициента прохождения тепловых волн через промежуточный слой в зависимости от тепловой толщины этого слоя L . Коэффициенты тепловой активности: для внешнего слоя $\eta_1 = \eta_2 = 1$, для промежуточного слоя $\eta_i = 2$ (a); $\eta_i = 0.5$ (b). Сплошная линия — расчет для трехслойной системы, штриховая линия — двухслойная система с учетом теплопроводности и теплоемкости интерфейса, пунктирная линия — двухслойная система с учетом только теплопроводности интерфейса.

выражения как для отраженной, так и для прошедшей волн дают очень хорошее приближение для $L \leq 0.5$ и остаются верными с точностью в пределах нескольких процентов вплоть до $L \approx 1$. Этот результат позволяет заменять в расчетах слои конечной толщины граничными условиями. Используя матричную технику для последовательных соединений [10], можно легко объединять несколько слоев в одну границу.

Используя метод тепловых волн, можно вычислять распространение тепловых импульсов в аналогичных структурах с помощью преобразования Фурье по времени.

Приведенные в работе результаты показывают, что учет только теплового сопротивления (или теплопроводности) и скачка температур на границе раздела 2 сред при расчетах нестационарной тепловой диффузии в модели тепловых волн оказывается недостаточным в большинстве случаев. Ошибки могут составлять десятки процентов даже при малых тепловых толщинах промежуточного слоя. Для более точного расчета температурных полей необходимо учитывать также изменение тепловых потоков. Введение емкостного теплового сопротивления промежуточного слоя позволило в несколько раз повысить надежность оценок изменения температур по обе стороны границы. Кроме того, предложенный переход от трехслойной системы к двухслойной в отличие от общепринятого позволяет получать достоверные значения для значительно более толстых промежуточных слоев вплоть до толщин сравнимых с длиной тепловых волн.

В заключение авторы выражают благодарность РФФИ за поддержку данной работы в рамках гранта № 14-13-00266.

Список литературы

- [1] Богословский В.Н. Строительная теплофизика: Учебник для вузов. М.: Высш. школа. 1982. 415 с.
- [2] Carslaw H.S., Jaeger J.C. // Conduction of heat in solids. Oxford Science Publications, 1959. 2 ed. 526 p.
- [3] Thermal resistance and power dissipation calculation. R Theta And Power Dissipation Technical Note. Directed Energy, Inc./IXYSRF. Fort Collins, Colorado. 2003. 7 p.
- [4] Mao G., Jóhannesson G. // Proc. of the 3rd Symp. on building physics in the Nordic countries (Saxhof B. et al., ed.). Copenhagen, Denmark, 1993. V. 1. P. 81–89.

- [5] *Schmidt D., Jóhannesson G.* // Nordic J. Building Physics. 2004. V. 3.
<http://web.byv.kth.se/bphys/>
- [6] *Sanchez-Lavega A., Salazar A.* // J. Appl. Phys. 1993. V. 74. N 1. P. 551–557.
- [7] *Глазов А.Л., Калиновский В.С., Лисицина Ю.Г., Муратиков К.Л., Потапович Н.С.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 14. С. 60–67.
- [8] *Глазов А.Л., Козлов В.А., Муратиков К.Л.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 24. С. 16–25.
- [9] *Gonzalez de la Cruz G., Gurevich Yu.G.* // International J. Thermal Sciences. 2012. V. 51. P. 1–6.
- [10] *Marcus P.M.* // The propagation, reflection and generation of temperature waves: a transmission line analogy and the reflection of a change of cross section in circular cylindrical rods. Pittsburgh: Carnegie Institute of Technology, 1953. 109 p.