Неравновесная динамика квантового спинового стекла в переменном магнитном поле

© Г. Бузиелло, Р.В. Сабурова*, В.Г. Сушкова*, Г.П. Чугунова**

Dipartimento di Fisica „E.R. Caianiello“, Universitá di Salerno,
84081 Baronissi — Salerno and INFM — Unitá di Salerno, Salerno, Italy
* Казанский государственный энергетический университет,
620066 Казань, Россия
** Казанский государственный технологический университет,
420015 Казань, Россия

(Поступила в Редакцию 23 июня 2003 г.)

Развивается аналитический метод изучения эффекта старения в неупорядоченной квантовой системе, находящейся в контакте с внутренним окружением и подверженной действию внешнего переменного поля. Диссипация включается посредством связи системы с набором независимых гармонических осцилляторов, имитирующих квантовую тепловую баню. С помощью формализма интегралов по замкнутым траекториям выводятся динамические уравнения для автокорреляционной функции и функции линейного отклика. Исследуется влияние внешнего поля на поведение корреляции и отклика в спин-стекольной и парамагнитной фазах. Обнаружена зависимость обеих функций от величины спинового взаимодействия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-02-16368).

1. Введение

Исследование диссипативных эффектов в неравновесной динамике квантовых стекол началось недавно [1]. В настоящее время в квантовых спиновых стеклах интенсивно исследуется роль квантовых флуктуаций [1–6]. Влияние внешнего переменного возмущения на неравновесную динамику квантовых спиновых стекол теоретически еще не рассматривалось. Для классической модели спинового стекла влияние зависящей от времени внешней силы рассмотрено в работе [7], в которой показано, что эффект старения (зависимость скорости релаксации от времени ожидания или „возраста“ системы) прослеживается в слабом возмущающем внешнем поле.

Мы изучаем неравновесную динамику квантового спинового стекла, связанного с внутренним окружением (баней) и внешним периодическим полем. Используются замкнутые динамические уравнения для симметризованной автокорреляционной функции и функции линейного отклика, аналогичные полученным в [8]; они решаются численно для разных констант спинового взаимодействия, разных констант связи с баней и различных амплитуд и частот внешнего поля. Рассматривается p-спиновая сферическая модель в приближении среднего поля.

При измерениях магнитной восприимчивости в переменном внешнем магнитном поле, выполняемых в спиновых стеклах, наблюдается эффект старения, магнитный отклик системы на малое внешнее поле зависит от тепловой истории образца, т. е. от временно́го интервала, в течение которого система находится при постоянной температуре в фазе спинового стекла. Рассмотрим следующую постановку эксперимента. Образец охлаждается бесконечно быстро в нулевом постоянном внешнем магнитном поле от температуры $T > T_g$ (T_g — температура фазового перехода в спин-стекольную фазу) до температуры $T_1 < T_g$ в момент времени t, который принимаем равным нулю. В этот момент к образцу прикладывается малое внешнее магнитное осциллирующее поле $h(t)$. Эволюция системы происходит в изотермических условиях и магнитная восприимчивость измеряется при фиксированной угловой частоте ω как функция времени t, прошедшего с момента достижения образцом температуры T_1, т. е. с момента $t = 0$ [1,9].

Отметим, что функция корреляции $C(t, t')$ системы может служить мерой того, как быстро система теряет память о своей предыстории и, следовательно, убывает на больших временах. Чтобы узнать, как система реагирует на внешнее возмущение, вводится функция отклика, связанная с восприимчивостью системы. Аналогично функции корреляции функция отклика убывает с увеличением времени, поскольку влияние возмущения постепенно забывается системой, находящейся в контакте с тепловой баней. Между откликом и корреляцией есть существенное отличие. Корреляцию двух наблюдаемых величин можно вычислить в любые произвольные моменты времени, в то время как отклик до начала воздействия внешнего возмущения равен нулю. Несмотря на это различие корреляцию и отклик можно изучать на равных условиях.

В рассматриваемой модели квантового спинового стекла, связанного с окружением и находящегося в переменном внешнем магнитном поле, можно ожидать проявления неравновесной динамики, в том числе эффекта старения.

В настоящей работе описывается модель спинового стекла и получены связанные динамические уравнения движения для функций корреляции и отклика системы. Дано численное решение уравнений, их анализ, обсуждение результатов работы и заключение.

2. Модель

Рассматривается квантовая система, состоящая из N взаимодействующих между собой спинов, связанная с баней из независимых квантовых гармонических осцилляторов и находящаяся под действием внешнего переменного магнитного поля. Гамильтониан этой связанной системы дается следующим выражением:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{S}} + \mathcal{H}_{\mathrm{B}} + \mathcal{H}_{\mathrm{SB}} + \mathcal{H}_{\mathrm{SF}}, \tag{1}$$

где $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ — гамильтониан системы, $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ — гамильтониан бани, $\mathcal{H}_{\mathrm{SB}}$ — гамильтониан взаимодействия системы и бани, $\mathcal{H}_{\mathrm{SF}}$ — гамильтониан взаимодействия системы и внешнего переменного поля,

$$\mathcal{H}_{\mathrm{S}} = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{\sigma}_i^2 + V, \tag{2}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_b}\left(\frac{p_l^2}{m_l} + m_l\omega_l x_l^2\right), \tag{3}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SB}} = -\sum_{i,l} C_l^i x_l \sigma_i, \tag{4}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SF}} = -h(t)\sum_{i=1}^{N}\sigma_i, \quad h(t) = h_t\cos\omega_0 t, \tag{5}$$

где m — масса объекта со спином σ_i, точка обозначает производную по времени; V — потенциал спинового взаимодействия; N_b — число осцилляторов; x_l и p_l — координата и импульс l-го осциллятора; m_l и ω_l — масса и угловая частота осциллятора. Баня представляет собой фононы решетки. C_l^i — константа связи между i-м спином и l-м осциллятором. Внешнее магнитное переменное поле $h(t)$ характеризуется своей амплитудой (в энергетических единицах) h_t и угловой частотой ω_0. Мы пренебрегаем взаимодействием между баней и внешним переменным полем. Переменное поле будем считать достаточно малым. Рассмотрим диагональное p-спиновое взаимодействие вида

$$V = \sum_{i_1<\ldots<i_p}^{N} J_{i_1\ldots i_p}\sigma_{i_1}^z\ldots\sigma_{i_p}^z, \tag{6}$$

где параметр $p \geq 2$, $J_{i_1\ldots i_p}$ являются случайными переменными спиновой связи с гауссовским распределением с нулевым средним и дисперсией $\overline{(J_{i_1\ldots i_p})^2} = \tilde{J}^2 p!/(2N^{p-1})$, где черта сверху обозначает усреднение по беспорядку. Эта модель в классическом случае хорошо изучена в работах [10–12].

Ограничимся рассмотрением случая $p = 3$. Модель, описываемая (2)–(6), предполагает наличие динамического фазового перехода, разделяющего две фазы: упорядоченную фазу (спиновое стекло) и неупорядоченную (парамагнитную) фазу.

3. Формализм интегралов по замкнутым траекториям

Далее используем квантовую теорию поля [13]. Пусть $\boldsymbol{\xi}^+(t)$, $\boldsymbol{\xi}^-(t)$ — N-векторные внешние источники, где знак „+“ означает, что берется значение на положительной ветке временнóго контура (идущей из 0 в $+\infty$), знак „−“ соответственно относится к отрицательной ветке (идущей в обратном направлении из $+\infty$ в 0); степени свободы описываются полем $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1(t), \ldots, \phi_N(t))$ в гейзенберговском представлении [14,15]. Производящий функционал имеет вид [16]

$$Z[\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\xi}^-] = \mathrm{Tr}\left[T^*\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty dt\,\boldsymbol{\xi}^-(t)\boldsymbol{\phi}(t)\right)\right.$$
$$\left.\times\, T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty dt\,\boldsymbol{\xi}^+(t)\boldsymbol{\phi}(t)\right)\hat{\rho}(0)\right], \tag{7}$$

где T означает упорядоченное по времени произведение, определяемое обычным образом, T^* означает произведение, упорядоченное по обращенному времени, $\hat{\rho}(t_0)$ — матрица плотности в начальный момент времени t_0 (положим $t_0 = 0$). Усреднение по ансамблю любого оператора производится как обычно

$$\langle A(t)\rangle = \frac{\mathrm{Tr}\,[A(t)\hat{\rho}(0)]}{\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}(0)}. \tag{8}$$

Симметризованная корреляционная функция $C_{ij}(t,t')$ определяется через производящий функционал как

$$C_{ij}(t,t') \equiv \frac{1}{2}\langle\phi_i(t)\phi_j(t') + \phi_j(t')\phi_i(t)\rangle$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{\delta^2}{\delta\xi_i^+(t)\delta\xi_j^-(t')} + \frac{\delta^2}{\delta\xi_j^+(t)\delta\xi_i^-(t')}\right]\ln Z\Big|_{\xi=0}, \tag{9}$$

функция отклика $R_{ij}(t,t')$ на внешнее периодическое возмущение h_t определяется как

$$R_{ij}(t,t') \equiv \frac{\delta\langle\phi_i(t)\rangle}{\delta h_j(t')}\Big|_{h=0}. \tag{10}$$

Используя теорию линейного отклика, можно записать

$$R_{ij}(t,t') = \frac{i}{\hbar}\,\theta\,(t-t')\langle[\phi_i(t), \phi_j(t')]\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{i}\left[\frac{\delta^2}{\delta\xi_i^+(t)\delta\xi_j^+(t')} + \frac{\delta^2}{\delta\xi_j^+(t)\delta\xi_i^-(t')}\right]\ln Z\Big|_{\xi=0}. \tag{11}$$

Производящий функционал (7) позволяет провести преобразования, аналогичные тем, которые проводятся в динамике классической системы [17]. Тогда можно записать

$$Z[\xi^+, \xi^-] = \int \mathscr{D}\phi^+ \mathscr{D}\phi^- \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\phi^+] - S[\phi^-] + \int dt\, \xi^+(t)\phi^+(t) - \int dt\, \xi^-(t)\phi^-(t)\right)\right] \langle \phi^+|\hat{\rho}(0)|\phi^-\rangle, \tag{12}$$

где $\mathscr{D}\phi^+\mathscr{D}\phi^-$ означает $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{i,t}[d\phi_i^+(t)d\phi_i^-(t)]$, $\mathscr{D}\phi^+$ и $\mathscr{D}\phi^-$ — функциональные меры, означающие интегрирование по всем траекториям. В (12) опускаем пределы у временны́х интегралов, везде подразумевая, что интегрирование идет от $t_0 = 0$ до ∞. $S[\phi]$ — действие системы, $\langle\phi^+|\hat{\rho}(0)|\phi^-\rangle$ — матричный элемент матрицы плотности. В терминах полей ϕ^+ и ϕ^- функции корреляции и отклика запишутся как

$$C_{ij}(t, t') = \frac{1}{2}\langle \phi_i^+(t)\phi_j^-(t') + \phi_j^+(t')\phi_i^-(t)\rangle, \tag{13}$$

$$R_{ij}(t, t') = \frac{i}{\hbar}\langle \phi_i^+(t)[\phi_j^+(t') - \phi_j^-(t')]\rangle. \tag{14}$$

Взаимодействие между системой и баней в формализме интегралов по траекториям [18] описывается с помощью переменных $\phi = (\sigma, \mathbf{v}_l)$, где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ — переменные системы, $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{N_b l})$, $l = 1, \ldots, N_b$, — переменные бани. Полное действие S, которое состоит из действия спиновой системы, действия бани и действий система–баня и система–перменное поле, равно

$$S[\phi] = S_{\mathrm{S}}[\sigma] + S_{\mathrm{B}}[\mathbf{v}_l] + S_{\mathrm{SB}}[\sigma, \mathbf{v}_l] + S_{\mathrm{SF}}[\sigma] = S_{\mathrm{S}}[\sigma] + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_b} m_l\left(\dot{\mathbf{v}}_l^2 - \omega_l^2\mathbf{v}_l^2\right) - \sum_{l=1}^{N_b} C_l\mathbf{v}_l\sigma - h(t)\sum_{i=1}^{N}\sigma_i. \tag{15}$$

Действие системы $S_{\mathrm{S}}[\sigma, J]$ равно

$$S_{\mathrm{S}}[\sigma, J] = S_0[\sigma] - \int dt\, V[\sigma, J]. \tag{16}$$

Та часть действия, которая не зависит от беспорядка, равна

$$S_0[\sigma, J] = \int dt\left[\frac{m}{2}\dot{\sigma}^2 - \frac{z}{2}(\sigma^2 - N)\right], \tag{17}$$

где z — зависящий от времени множитель Лагранжа, который обеспечивает выполнение сферического ограничения $\sum\limits_{i=1}^{N}\sigma_i^2(t) = N$ в любой момент времени.

В нашей модели для гауссовского потенциального члена $V[\sigma, J]$ имеем

$$\overline{V[\sigma, J]V[\sigma', J]} = -\frac{N}{2}\mathscr{V}\left(\frac{(\sigma - \sigma')^2}{N}\right), \tag{18}$$

$$P[J] = \sqrt{\frac{N^{p-1}}{\tilde{J}^2\pi p!}}\exp\left(-\frac{N^{p-1}}{\tilde{J}^2 p!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_p}(J_{i_1\ldots i_p})^2\right) \Longrightarrow \overline{(J_{i_1\ldots i_p})^2} = \frac{\tilde{J}^2 p!}{2N^{p-1}}. \tag{19}$$

Это соответствует потенциальной случайной корреляции $\mathscr{V}(x) = -(1 - x/2)^p/2$ и приводит к эффективному, нелокальному во времени взаимодействию между спинами [19]

$$V_D[\sigma^+, \sigma^-] = \frac{\tilde{J}^2 Ni}{4\hbar}\int dt\int dt'\left[\left(\frac{1}{N}\sigma^+(t)\sigma^+(t')\right)^p + \left(\frac{1}{N}\sigma^-(t)\sigma^-(t')\right)^p - \left(\frac{1}{N}\sigma^+(t)\sigma^-(t')\right)^p - \left(\frac{1}{N}\sigma^-(t)\sigma^+(t')\right)^p\right], \tag{20}$$

σ_i являются непрерывными динамическими переменными $-\sqrt{N} < \sigma_i < \sqrt{N}$ для всех i, которые удовлетворяют сферическому ограничению

$$\frac{1}{N}\sigma^2(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2(t) = 1 \tag{21}$$

в каждый момент времени. Введение зависящего от времени множителя Лагранжа $z(t)$ осуществляет выполнение сферического ограничения.

Можно рассматривать и другие типы связи между баней и системой, отличные от (15); мы выбрали простейший случай. Если предположить, что начальная матрица плотности $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{\mathrm{S}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{B}}(0)$, где $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}(0)$ — больцмановское распределение для переменных бани в равновесии при температуре $k_{\mathrm{B}}T = 1/\beta$, то можно, проинтегрировав по переменным бани, получить эффективное тепловое действие $S_T[\sigma^+, \sigma^-]$, которое входит в функционал влияния Фейнмана–Вернона

$$S_T[\sigma^+,\sigma^-] = -\int dt\int dt'\left(\sigma^+(t) - \sigma^-(t)\right) \times \eta(t - t')\left(\sigma^+(t) + \sigma^-(t)\right) + i\int dt\int dt'\left(\sigma^+(t) \times -\sigma^-(t)\right)\nu(t - t')\left(\sigma^+(t) - \sigma^-(t)\right), \tag{22}$$

где шумовое и диссипативное ядра ν и η задаются в виде

$$\nu(t - t') = \int\limits_0^\infty d\omega\, I(\omega)\,\mathrm{cth}\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)\cos\left(\omega(t - t')\right), \tag{23}$$

$$\eta(t - t') = -\theta(t - t')\int\limits_0^\infty d\omega\, I(\omega)\sin\left(\omega(t - t')\right). \tag{24}$$

Спектральная плотность бани $I(\omega)$ определяется следующим выражением:

$$I(\omega) = 2\alpha\hbar(\omega/\omega_c)^{s-1}\omega\exp(-\omega/\omega_c), \tag{25}$$

где α — безразмерная константа связи системы с баней, ω_c — высокочастотное обрезание, $0 < s < 2$. Рассмотрим омическую баню, когда $s = 1$. При малых α

(например, $\alpha = 0.2$) имеем парамагнитную фазу, а при $\alpha = 1$ — фазу спинового стекла [19]. При изучении неупорядоченных систем величины необходимо усреднить по беспорядку с распределением $P[J]$.

Рассмотрим динамику в реальном времени с некоторым случайным начальным условием в момент $t_0 = 0$, когда система приводится в контакт с баней и прикладывается внешнее переменное поле. Это условие не зависит от беспорядка, поэтому $\hat{\rho}$ также не зависит от беспорядка и, следовательно, производящий функционал в отсутствие источников и поля $h(t)$ тоже не зависит от беспорядка: $Z[\xi^+ = 0,\ \xi^- = 0,\ J] = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}(0)]$. Как и в классическом случае, возможно записать динамические уравнения со случайными начальными условиями, не вычисляя среднее по беспорядку от $\ln Z[\xi^+, \xi^-, J]$ и не используя метод реплик. С помощью усредненного производящего функционала

$$\overline{Z[\xi^+, \xi^-]} = \int dJ\, P[J] Z[\xi^+, \xi^-, J] \tag{26}$$

получаем следующее среднее значение для любого оператора $\boldsymbol{\sigma}(t)$:

$$\begin{aligned} \overline{\langle \boldsymbol{\sigma}(t) \rangle} &\equiv \overline{\frac{\delta \ln Z[\xi^+, \xi^-, J]}{\delta \xi^+(t)}}\bigg|_{\xi=0,h=0} \\ &= \frac{1}{Z[0,0,J]} \overline{\frac{\delta Z[\xi^+, \xi^-, J]}{\delta \xi^+(t)}}\bigg|_{\xi=0,h=0} \\ &= \frac{1}{Z[0,0,J]}, \end{aligned} \tag{27}$$

черта сверху означает усреднение по беспорядку.

Таким образом, наша система описывается следующим производящим функционалом:

$$\begin{aligned} \overline{Z[\xi^+, \xi^-, J]} = \int \mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}^+ \mathscr{D}\boldsymbol{\sigma}^- \exp\bigg[\frac{i}{\hbar}\Big(S_{\mathrm{EFF}}[\boldsymbol{\sigma}^+, \boldsymbol{\sigma}^-] \\ + \int dt\, \xi^+(t)\boldsymbol{\sigma}^+(t) - \int dt\, \xi^-(t)\boldsymbol{\sigma}^-(t) \\ + \int dt\, h^+(t)\boldsymbol{\sigma}^+(t) - \int dt\, h^-(t)\boldsymbol{\sigma}^-(t)\Big)\bigg], \end{aligned} \tag{28}$$

где $S_{\mathrm{EFF}}[\boldsymbol{\sigma}^+, \boldsymbol{\sigma}^-] = S_0[\boldsymbol{\sigma}^+] - S_0[\boldsymbol{\sigma}^-] + S_T[\boldsymbol{\sigma}^+, \boldsymbol{\sigma}^-]$. Квантовые динамические уравнения движения можно получить, выполняя преобразования, аналогичные классическому случаю в [17,20].

Далее введем макроскопические параметры порядка и с помощью приближения седловой точки производящего функционала Швингера–Келдыша (которое становится точным в приближении среднего поля при $N \to \infty$) получим динамические уравнения движения. Поскольку рассматривается динамика системы для больших, но конечных времен, ожидается появление неравновесных явлений.

3.1. Динамические параметры порядка. Введением оператора $\mathrm{Op}(t, t')$ [19]

$$\mathrm{Op}(t,t') = \begin{pmatrix} \mathrm{Op}^{++}(t,t') & \mathrm{Op}^{+-}(t,t') \\ \mathrm{Op}^{-+}(t,t') & \mathrm{Op}^{--}(t,t') \end{pmatrix} = \{\mathrm{Op}^{\alpha\beta}(t,t')\}, \tag{29}$$

$$\mathrm{Op}^{++}(t,t') = \big(m\partial_t^2 + z^+(t)\big)\delta(t-t') - 2i\nu(t-t'),$$

$$\mathrm{Op}^{+-}(t,t') = 2\eta(t-t') + 2i\nu(t-t'),$$

$$\mathrm{Op}^{-+}(t,t') = -2\eta(t-t') + 2i\nu(t-t'),$$

$$\mathrm{Op}^{--}(t,t') = \big(m\partial_t^2 + z^-(t)\big)\delta(t-t') - 2i\nu(t-t'), \tag{30}$$

квадратичные члены в действии S_{EFF} можно собрать в одно слагаемое. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{EFF}}[\boldsymbol{\sigma}^+, \boldsymbol{\sigma}^-] = -\frac{1}{2}\int dt \int dt' \boldsymbol{\sigma}^\alpha(t) \mathrm{Op}^{\alpha\beta}(t,t') \boldsymbol{\sigma}^\beta(t') \\ - V_D[\boldsymbol{\sigma}^+, \boldsymbol{\sigma}^-], \end{aligned} \tag{31}$$

$\alpha, \beta = +, -$ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. С помощью тождества

$$\begin{aligned} 1 = \int \prod^{\alpha\beta} DQ^{\alpha\beta} \delta\Big(\frac{1}{N}\sigma^\alpha(t)\sigma^\beta(t') - Q^{\alpha\beta}\Big) \sim \int \prod_{\alpha\beta} DQ^{\alpha\beta} D\lambda^{\alpha\beta} \\ \times \exp\Big(-\frac{i}{2\hbar}\lambda^{\alpha\beta}\big(\sigma^\alpha(t)\sigma^\beta(t') - NQ^{\alpha\beta}(t,t')\big)\Big), \end{aligned} \tag{32}$$

подставленного в производящий функционал, перепишем полное действие в виде

$$\begin{aligned} S = S_{\mathrm{EFF}} + \int dt\, \xi^+(t)\sigma^+(t) - \int dt\, \xi^-(t)\sigma^-(t) \\ + \int dt\, h^+(t)\sigma^+(t) - \int dt\, h^+(t)\sigma^+(t) = S_{\mathrm{EFF}} + \int dt \big(\xi^+(t) \\ + h^+(t)\big)\sigma^+(t) - \int dt \big(\xi^-(t) + h^-(t)\big)\sigma^-(t), \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{EFF}}[\sigma^+, \sigma^-] = -\frac{1}{2}\int dt \int dt' \sigma^\alpha(t)\big(\mathrm{Op}^{\alpha\beta}(t,t') \\ + \lambda^{\alpha\beta}(t,t')\big)\sigma^\beta(t') + \frac{N}{2}\int dt \int dt' \lambda^{\alpha\beta}(t,t') Q^{\alpha\beta}(t,t') \\ + \frac{N}{2}\int dt \big[z^+(t) - z^-(t)\big] + \frac{i\tilde{J}^2 N}{4\hbar}\int dt \int dt' \big[\big(Q^{++}(t,t')\big)^p \\ + \big(Q^{--}(t,t')\big)^p - \big(Q^{+-}(t,t')\big)^p - \big(Q^{-+}(t,t')\big)^p\big]. \end{aligned} \tag{34}$$

Значения параметров порядка $Q^{\alpha\beta}(t,t')$, $\alpha,\beta=+,-$ связаны с „критическими" корреляциями и откликом, определенным в (13), (14) следующим образом:

$$NQ^{++}(t,t')=\overline{\langle\sigma^+(t)\sigma^+(t')\rangle}$$
$$=N\left(C(t,t')-\frac{i\hbar}{2}\left(R(t,t')+R(t',t)\right)\right), \quad (35)$$
$$NQ^{+-}(t,t')=\overline{\langle\sigma^+(t)\sigma^-(t')\rangle}$$
$$=N\left(C(t,t')+\frac{i\hbar}{2}\left(R(t,t')-R(t',t)\right)\right), \quad (36)$$
$$NQ^{-+}(t,t')=\overline{\langle\sigma^-(t)\sigma^+(t')\rangle}$$
$$=N\left(C(t,t')-\frac{i\hbar}{2}\left(R(t,t')-R(t',t)\right)\right), \quad (37)$$
$$NQ^{--}(t,t')=\overline{\langle\sigma^-(t)\sigma^-(t')\rangle}$$
$$=N\left(C(t,t')+\frac{i\hbar}{2}\left(R(t,t')+R(t',t)\right)\right), \quad (38)$$

и

$$NC(t,t')=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{\langle\sigma_i^+(t)\sigma_i^-(t')+\sigma_i^-(t)\sigma_i^+(t')\rangle}, \quad (39)$$

$$NR(t,t')=\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\overline{\langle\sigma_i^+(t)\left(\sigma_i^+(t')+\sigma_i^-(t')\right)\rangle}. \quad (40)$$

Далее, проделывая вычисления, аналогичные [19], получим, что все члены в действии зависят от $\lambda^{\alpha\beta}$, $Q^{\alpha\beta}$ и z^α и пропорциональны N.

3.2. Вычисления седловой точки. Для удобства перепишем уравнения в матричном виде. Для этого введем две матрицы

$$\mathscr{L}=\begin{pmatrix}\lambda^{++} & \lambda^{+-}\\ \lambda^{-+} & \lambda^{--}\end{pmatrix},\quad \mathscr{Q}=\begin{pmatrix}Q^{++} & Q^{+-}\\ Q^{-+} & Q^{--}\end{pmatrix} \quad (41)$$

и определим

$$F[\mathscr{Q}](t,t')\equiv\begin{pmatrix}\left(Q^{++}(t,t')\right)^{p-1} & \left(Q^{+-}(t,t')\right)^{p-1}\\ \left(Q^{-+}(t,t')\right)^{p-1} & \left(Q^{++}(t,t')\right)^{p-1}\end{pmatrix}. \quad (42)$$

Символом $\otimes$ обозначим стандартное операторное произведение

$$A\otimes B(t,t')=$$
$$\begin{pmatrix}\int dt''A^{+\gamma}(t,t'')B^{\gamma+}(t'',t') & \int dt''A^{+\gamma}(t,t'')B^{\gamma-}(t'',t')\\ \int dt''A^{-\gamma}(t,t'')B^{\gamma+}(t'',t') & \int dt''A^{-\gamma}(t,t'')B^{\gamma-}(t'',t')\end{pmatrix}, \quad (43)$$

где производится суммирование по γ.

В седловой точке уравнение для $\lambda^{\alpha\beta}(t,t')$ дает

$$\mathscr{L}(t,t')=\frac{\hbar}{2}\mathscr{Q}^{-1}(t,t')-\mathrm{Op}(t,t'), \quad (44)$$

где через $\mathscr{Q}^{-1}$ обозначен оператор, обратный к $\mathscr{Q}$.

В седловой точке уравнение для $Q^{\alpha\beta}(t,t')$ дает

$$\mathscr{L}(t,t')=-\frac{ip\tilde{J}^2}{2\hbar}F[\mathscr{Q}](t,t'). \quad (45)$$

Уравнения (44) и (45) можно записать в компактном виде

$$\frac{i}{\hbar}\mathrm{Op}\otimes\mathscr{Q}=I-\frac{p\tilde{J}^2}{2\hbar^2}F[\mathscr{Q}]\otimes\mathscr{Q}, \quad (46)$$

где I — тождественный оператор: $I^{\alpha\beta}(t,t')=\delta^{\alpha\beta}\delta(t-t')$. Уравнение в седловой точке для z^α дает

$$\frac{i}{\hbar}=(\mathrm{Op}+\mathscr{L})^{-1}_{++}(t,t')=\frac{i}{\hbar}\mathscr{Q}^{++}(t,t'), \quad (47)$$

$$\frac{i}{\hbar}=(\mathrm{Op}+\mathscr{L})^{-1}_{--}(t,t')=\frac{i}{\hbar}\mathscr{Q}^{--}(t,t'), \quad (48)$$

эти уравнения приводят к сферическому ограничению.

4. Динамические уравнения для корреляции и отклика

Динамические уравнения для корреляционной функции и функции отклика выводятся из уравнений (42)–(46) и (35)–(38). Уравнение движения для функции отклика получается вычитанием $++$ и $+-$ компонент уравнения (46)

$$\left(m\partial_t^2+z^+(t)\right)R(t,t')+4\int_{t'}^{t}dt''\eta(t-t'')R(t'',t')=\delta(t-t')$$
$$-\frac{p\tilde{J}^2}{2i\hbar}\int_0^\infty dt''\left(\left(Q^{++}(t,t'')\right)^{p-1}-\left(Q^{+-}(t,t'')\right)^{p-1}\right)R(t'',t'), \quad (49)$$

уравнение движения для автокорреляционной функции следует из вычитания $+-$ и $-+$ компонент уравнения (46)

$$\left(m\partial_t^2+\frac{1}{2}\left(z^+(t)+z^-(t)\right)\right)C(t,t')$$
$$+\frac{i}{2}\left(z^+(t)-z^-(t)\right)\hbar\left(R(t't)-R(t,t')\right)$$
$$-2\hbar\int_0^\infty dt''\nu(t-t'')R(t',t'')+4\int_0^t dt''\eta(t-t'')C(t'',t')$$
$$=-\frac{p\tilde{J}^2}{2\hbar}\int_0^\infty dt''\,\mathrm{Im}\left(\left(Q^{++}(t,t'')\right)^{p-1}Q^{+-}(t'',t')\right.$$
$$\left.-\left(Q^{+-}(t,t'')\right)^{p-1}Q^{--}(t'',t')\right). \quad (50)$$

Динамические уравнения перепишем в более компактном виде

$$\big(m\partial_t^2 + z(t)\big)R(t,t') = \delta(t-t') + \int\limits_0^\infty dt''\Sigma(t,t'')R(t'',t'), \tag{51}$$

$$\big(m\partial_t^2 + z(t)\big)C(t,t') = \int\limits_0^\infty dt''\Sigma(t,t'')C(t'',t') + \int\limits_0^{t'} dt''D(t,t'')R(t',t''). \tag{52}$$

Эти уравнения дополняются равновременными условиями

$$C(t,t) = 1, \qquad R(t,t) = 0, \tag{53}$$

$$\lim_{t'\to t^-} \partial_t R(t,t') = \frac{1}{m}, \qquad \lim_{t'\to t^+} \partial_t R(t,t') = 0, \tag{54}$$

$$\lim_{t'\to t^-} \partial_t C(t,t'') = \lim_{t'\to t^+} \partial_t C(t,t') = 0. \tag{55}$$

Из-за свойства причинности функции отклика имеем $R(t,t'')R(t'',t) = 0$. Как и в [19] собственно-энергетическая часть равна

$$\tilde{\Sigma}' \equiv \Sigma(t,t') + 4\eta(t-t') = -\frac{p\tilde{J}^2}{\hbar}\,\mathrm{Im}\left[C(t,t') - \frac{i\hbar}{2}R(t,t')\right]^{p-1}, \tag{56}$$

вершинная часть равна

$$\tilde{D}' \equiv D(t,t') - 2\hbar\nu(t-t') = \frac{p\tilde{J}^2}{2} \times \mathrm{Re}\left[C(t,t') - \frac{i\hbar}{2}\big(R(t,t') + R(t',t)\big)\right]^{p-1}. \tag{57}$$

Отметим, что собственно-энергетическая часть Σ и вершинная D являются вещественными и состоят из членов, имеющих разное происхождение: одни члены получаются в результате взаимодействия системы и бани (η и ν), другие вызваны нелинейностью, происходящей из усреднения по беспорядку (они обозначены как $\tilde{\Sigma}'$ и $\tilde{D}'$ в (56) и (57)). Если $p = 2$, то $\tilde{\Sigma}'$ и $\tilde{D}'$ совпадают со своими классическими двойниками. В случае $p \geq 3$ нелинейные члены имеют явную зависимость от $\hbar$.

Мнимая часть уравнения (50) дает

$$z(t) \equiv z^+(t) = z^-(t), \tag{58}$$

тогда уравнение для z принимает вид

$$z(t) = \int\limits_0^t dt''\big(\Sigma(t,t'')C(t,t'') + D(t,t'')R(t,t'')\big) + m\int\limits_0^t dt''\int\limits_0^t dt'''\big[\partial_t R(t,t'')\big]D(t'',t''')\big[\partial_t R(t,t''')\big]. \tag{59}$$

Итак, уравнения (51), (52) и (59) представляют собой полный набор уравнений, определяющих динамику системы.

В дальнейшем можно использовать безразмерные переменные, которые определяются измерением энергии в единицах $\tilde{J}$ и времени в единицах $\hbar/\tilde{J}$. Тогда сила квантового туннелирования будет измеряться параметром $\Gamma \equiv \hbar^2/(\tilde{J}M)$. Сделаем перенормировку реального времени и других параметров, входящих в квантовые динамические уравнения для корреляции и отклика. При этом $t \to (\tilde{J}/\hbar)t$, симметризованная функция корреляции не изменится, а функция отклика трансформируется как $R \to \hbar R$. После такой перенормировки динамические уравнения имеют такой же вид, как и до преобразования, с M, замененной на Γ^{-1}. Таким образом, после перенормировки имеем

$$\big(\Gamma^{-1}\partial_{\tilde{t}}^2 + \tilde{z}(\tilde{t})\big)\tilde{R}(\tilde{t},\tilde{t}') = \delta(\tilde{t}-\tilde{t}') + \int\limits_0^\infty d\tilde{t}''\tilde{\Sigma}(\tilde{t},\tilde{t}'')\tilde{R}(\tilde{t}'',\tilde{t}'), \tag{60}$$

$$\big(\Gamma^{-1}\partial_{\tilde{t}}^2 + \tilde{z}(\tilde{t})\big)\tilde{C}(\tilde{t},\tilde{t}') = \int\limits_0^\infty d\tilde{t}''\tilde{\Sigma}(\tilde{t},\tilde{t}'')\tilde{C}(\tilde{t}'',\tilde{t}') + \int\limits_0^{\tilde{t}'} d\tilde{t}''\tilde{D}(\tilde{t},\tilde{t}'')\tilde{R}(\tilde{t}',\tilde{t}'') + \tilde{h}_t^2\cos(\tilde{\omega}\tilde{t})\int\limits_0^{\tilde{t}'} d\tilde{t}''\cos(\tilde{\omega}\tilde{t}'')\tilde{R}(\tilde{t}',\tilde{t}''), \tag{61}$$

$$\tilde{z}(\tilde{t}) = \int\limits_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}''\big[\tilde{\Sigma}(\tilde{t},\tilde{t}'')\tilde{C}(\tilde{t},\tilde{t}'') + \tilde{D}(\tilde{t},\tilde{t}'')\tilde{R}(\tilde{t},\tilde{t}'')\big] - \Gamma^{-1}\partial_{\tilde{t}}^2\tilde{C}(\tilde{t},\tilde{t}')\Big|_{\tilde{t}'\to\tilde{t}^-} + \int\limits_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}''\cos(\tilde{\omega}\tilde{t}'')\tilde{R}(\tilde{t},\tilde{t}''), \tag{62}$$

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{t},\tilde{t}') = -4\tilde{\eta}(\tilde{t}-\tilde{t}') - p\,\mathrm{Im}\left[\tilde{C}(\tilde{t},\tilde{t}') - \frac{i}{2}\tilde{R}(\tilde{t},\tilde{t}')\right]^{p-1}, \tag{63}$$

$$\tilde{D}(\tilde{t},\tilde{t}') = 2\hbar\tilde{\nu}(\tilde{t}-\tilde{t}') + \frac{p}{2}\,\mathrm{Re}\left[\tilde{C}(\tilde{t},\tilde{t}') - \frac{i}{2}\big(\tilde{R}(\tilde{t},\tilde{t}') + \tilde{R}(\tilde{t}',\tilde{t})\big)\right]^{p-1}, \tag{64}$$

$$\tilde{\eta}(\tilde{t}-\tilde{t}') = -\theta(\tilde{t}-\tilde{t}')\int\limits_0^\infty d\tilde{\omega}\tilde{I}(\tilde{\omega})\sin\big(\tilde{\omega}(\tilde{t}-\tilde{t}')\big), \tag{65}$$

$$\tilde{\nu}(\tilde{t}-\tilde{t}') = \frac{1}{\hbar}\int\limits_0^\infty d\tilde{\omega}\tilde{I}(\tilde{\omega})\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\tilde{J}\tilde{\omega}}{2}\right)\cos\big(\tilde{\omega}(\tilde{t}-\tilde{t}')\big), \tag{66}$$

$$\tilde{I}(\tilde{\omega}) = 2\alpha\left(\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_{\mathrm{ph}}}\right)^{s-1}\tilde{\omega}\exp\left(-\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_c}\right), \tag{67}$$

где $\tilde{h}_t = h_t/\tilde{J}$, $\tilde{\omega} = \omega\hbar/\tilde{J}$, $\tilde{\omega}_{\mathrm{ph}} = \omega_{\mathrm{ph}}\hbar/\tilde{J}$, $\tilde{\omega}_c = \omega_c\hbar/\tilde{J}$, $\tilde{t} = \tilde{J}t/\hbar$. После перенормировки равновременны́е усло-

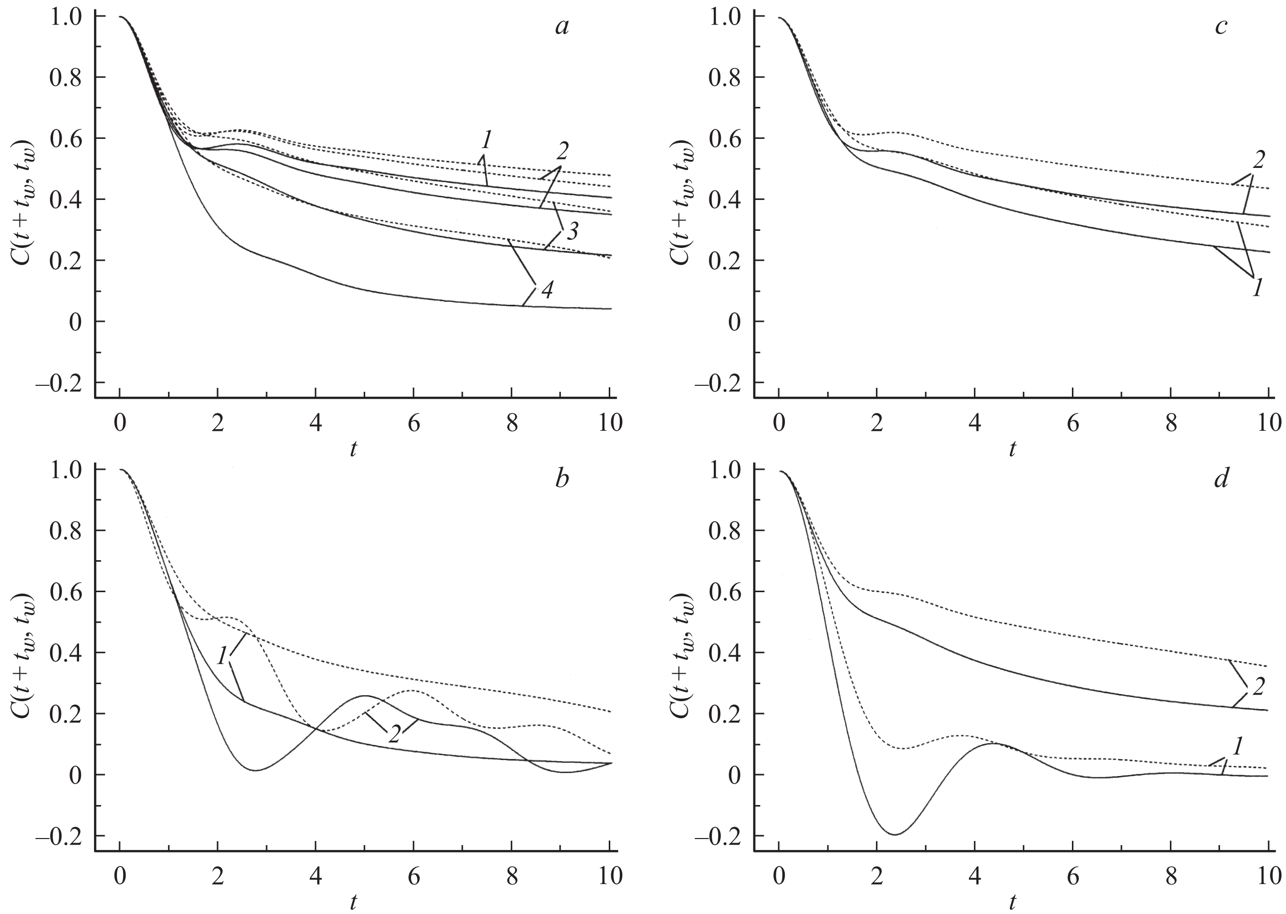

Рис. 1. a — зависимость симметризованной корреляционной функции $C(t+t_w, t_w)$ от времени t при различных амплитудах поля h_t ($h_t = 0$ — *1*, $h_t = 0.5$ — *2*, $h_t = 1$ — *3*, $h_t = 2$ — *4*), различных временах ожидания t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\alpha = 1$, $\tilde{J} = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 0.1$. b — зависимость $C(t+t_w, t_w)$ от t при различных частотах ω_0 ($\omega_0 = 0.1$ — *1*, $\omega_0 = 1$ — *2*), t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\alpha = 1$, $\tilde{J} = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 5$, $h_t = 2$. c — зависимость $C(t+t_w, t_w)$ от t при различных константах спинового взаимодействия $\tilde{J}$ ($\tilde{J} = 0.5$ — *1*, $\tilde{J} = 1$ — *2*), различных t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\alpha = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 5$, $h_t = 0.1$. d — зависимость $C(t+t_w, t_w)$ от t при различных константах связи с баней α ($\alpha = 0.2$ — *1*, $\alpha = 1$ — *2*), различных t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\tilde{J} = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 5$, $h_t = 1$, $\omega_0 = 0.1$.

вия (53)–(55) не изменятся, кроме одного, которое примет вид

$$\lim_{t' \to t^-} \partial_t \tilde{R}(\tilde{t}, \tilde{t}') = \Gamma. \tag{68}$$

В дальнейшем будем опускать тильду у функций и их аргументов, поскольку будем исследовать только перенормированные уравнения.

Рассмотрим поведение автокорреляционной функции и функции отклика в фазе спинового стекла ($\alpha = 1$) и в парафазе ($\alpha = 0.2$). Сначала рассмотрим поведение системы при $\alpha = 1$ в переменном поле, т.е. меняем значения амплитуды h_t и угловой частоты ω_0 поля. Мы выбрали следующие параметры: $T = 0.5$, $\Gamma = 1$, $\tilde{J} = 1$, $\omega_c = 5$ и времена ожидания $t_w = 5$ и 10.

Численный расчет выполнен с помощью интерполяционного алгоритма с шагом $h = 0.01$. Результаты представлены на рис. 1 и 2, где показано влияние внешнего переменного поля на поведение $C(t+t_w, t_w)$ и $R(t+t_w, t_w)$, зависимость $C(t+t_w, t_w)$ и $R(t+t_w, t_w)$ от времени ожидания (эффект старения), поведение $C(t+t_w, t_w)$ и $R(t+t_w, t_w)$ в фазе спинового стекла и парамагнитной фазе.

На рис. 1, a показано поведение автокорреляционной функции $C(t+t_w, t_w)$ в зависимость от времени t для двух значений времени ожидания: $t_w = 5$ и $t_w = 10$ при $\alpha = 1$, $T = 0.5$, $\Gamma = 1$, $\tilde{J} = 1$, $\omega_c = 5$, $\omega = 0.1$; амплитуда переменного поля меняется: $h_t = 0$, 0.5, 1, 2. Кривые $C(t+t_w, t_w)$ обнаруживают на малых временах t достаточно быстрый спад, причем начальное значение $C(t+t_w, t_w) = 1$ при $t = 0$. Затем наблюдается медленное плавное затухание к ненулевому значению. При большой частоте затухание сопровождается заметными осцилляциями. Необходимо отметить медленную, зависящую от времени ожидания, динамику, характерную для режима старения на бóльших временах. Зависимость $C(t+t_w, t_w)$ от внешнего поля начинает проявляться

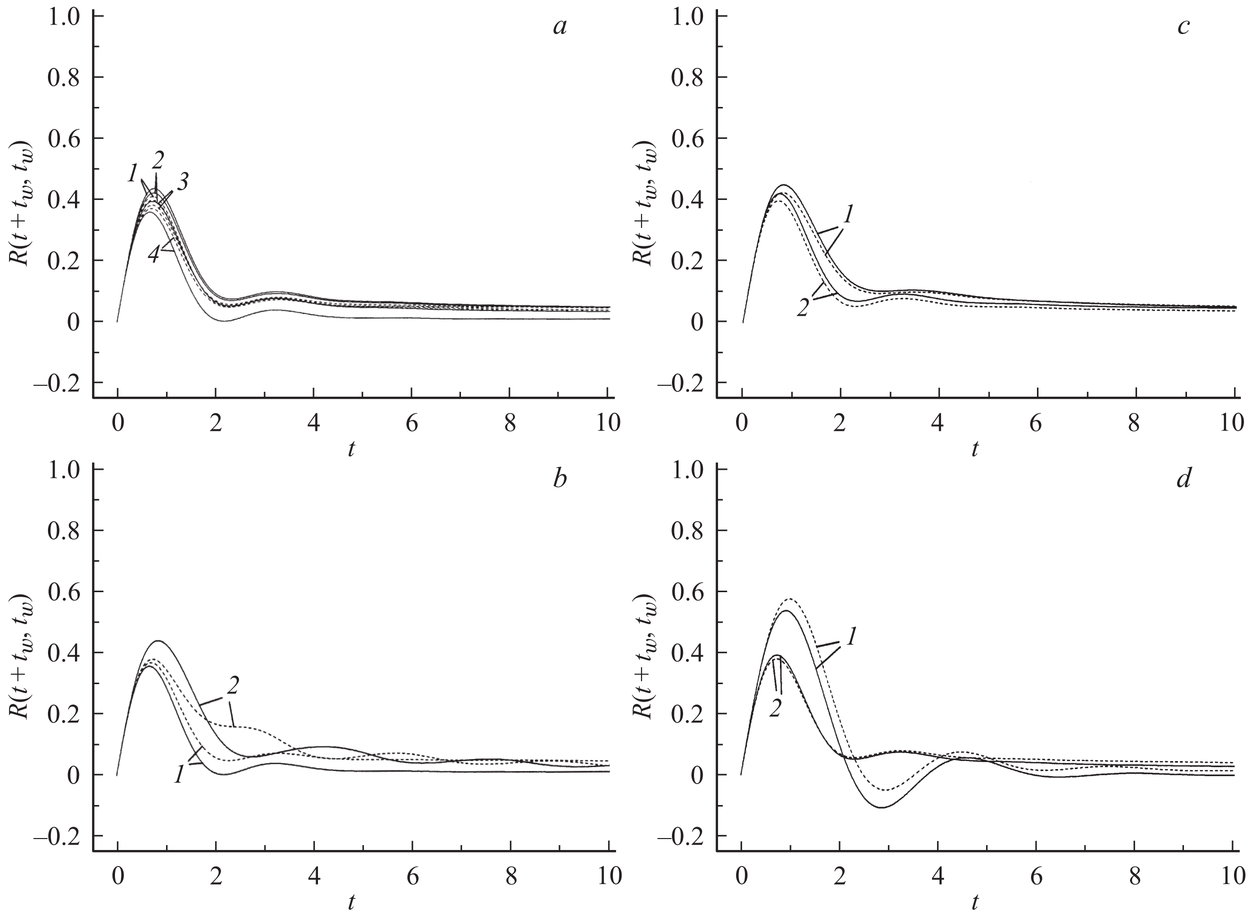

Рис. 2. a — зависимость функции отклика $R(t+t_w, t_w)$ от t при различных h_t ($h_t = 0$ — *1*, $h_t = 0.5$ — *2*, $h_t = 1$ — *3*, $h_t = 2$ — *4*), t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\alpha = 1$, $\tilde{J} = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 5$, $\omega_0 = 0.1$. b — зависимость $R(t+t_w, t_w)$ от t при различных ω_0 ($\omega_0 = 0.1$ — *1*, $\omega_0 = 1$ — *2*), t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\alpha = 1$, $\tilde{J} = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 5$, $h_t = 2$. c — зависимость $R(t+t_w, t_w)$ от t при различных константах спинового взаимодействия $\tilde{J}$ ($\tilde{J} = 0.5$ — *1*, $\tilde{J} = 1$ — *2*), различных t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\alpha = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 5$, $h_t = 0.5$, $\omega_0 = 0.1$. d — зависимость $R(t+t_w, t_w)$ от t при различных константах связи с баней α ($\alpha = 0.2$ — *1*, $\alpha = 1$ — *2*), t_w ($t_w = 5$ — сплошные линии, $t_w = 10$ — штриховые линии) и для $\tilde{J} = 1$, $\Gamma = 1$, $T = 0.5$, $\omega_c = 5$, $h_t = 1$, $\omega_0 = 0.1$.

от значения амплитуды $h_t = 0.5$ и выше, причем чем больше амплитуда, тем сильнее полевая зависимость. При этом с ростом амплитуды поля значения автокорреляционной функции уменьшаются. На рис. 1, b показано влияние частоты внешнего переменного поля на поведение $C(t+t_w, t_w)$, видно, что с ростом угловой частоты ярче проявляется осцилляционный характер кривых.

На рис. 2, a показано поведение функции отклика $R(t+t_w, t_w)$ в зависимости от времени t для двух значений времени ожидания: $t_w = 5$ и $t_w = 10$ при различных амплитудах внешнего поля h_t (остальные параметры те же, что и на рис. 1, a). Кривая функция отклика $R(t+t_w, t_w)$ быстро возрастает от нулевого значения до значения, меньшего единицы, при малых t. Затем кривая быстро спадает, и наблюдается медленное приближение к ненулевому значению функции, меньшему по сравнению с функцией корреляции. Функция отклика обнаруживает более слабую полевую зависимость от внешнего переменного поля (по сравнению с полевой зависимостью автокорреляционной функции), которая начинает проявляться при $h_t = 1$ и 2, причем значения функции отклика уменьшается с ростом амплитуды поля при увеличении времени t. Слабее проявляется осцилляционный характер кривых $R(t+t_w, t_w)$ (по сравнению с кривыми $C(t+t_w, t_w)$). На рис. 2, b показано влияние частоты внешнего поля на $R(t+t_w, t_w)$, видно, что увеличение частоты практически не влияет на функцию отклика $R(t+t_w, t_w)$.

В спин-стекольной фазе рассмотрим два значения $\tilde{J}$: $\tilde{J} = 0.5$ и 1. При меньшем значении константы спинового взаимодействия $\tilde{J} = 0.5$ у кривых $C(t+t_w, t_w)$ медленная динамика подавляется быстрее, чем в случае $\tilde{J} = 1$. Уменьшение константы спинового взаимодействия в случае $R(t+t_w, t_w)$ незначительно увеличивает значение функции отклика.

На рис. 1, d и 2, d показано, как влияет величина связи с баней α на $C(t+t_{w,}t_w)$ и $R(t+t_w,t_w)$. В парамагнитной фазе ($\alpha = 0.2$) поведение кривых $C(t+t_w,t_w)$ и $R(t+t_w,t_w)$ носит осцилляционный характер вокруг значений, приближающихся к нулю при больших амплитудах поля. При $\alpha = 1$ кривые $C(t+t_w,t_w)$ и $R(t+t_w,t_w)$ проходят выше нуля, приближаясь к некоторому ненулевому значению, что свидетельствует о спин-стекольной фазе [2]. Поведение кривых $C(t+t_w,t_w)$ и $R(t+t_w,t_w)$ в спин-стекольной фазе ($\alpha = 1$) заметно отличается от поведения в парамагнитной фазе, где осцилляции затрагивают область отрицательных значений.

5. Заключение

Рассмотрим влияние внешнего переменного магнитного поля и влияние окружения (бани квантовых осцилляторов) на неравновесную динамику квантовой системы. Показано, что затухание симметризованной автокорреляционной функции и функции отклика происходит в двух временны́х режимах (на малых временах и на больших временах). Проанализирована роль спинового взаимодействия, роль связи системы с окружением и внешним полем. Для квантовой системы это сделано впервые. Показано, что, когда система сильнее связана с внешним полем и окружением, релаксация, как видно из рисунков, замедляется по сравнению со случаем более слабой связи с окружением и внешним полем. При этом двухрежимный характер спада автокорреляционной функции и функции отклика остается. Чем сильнее связь с окружением, тем предпочтительнее состояние стекла. Это следует из поведения $C(t+t_w,t_w)$ и $R(t+t_w,t_w)$ при различных α. Наоборот, старение прекращается в сильном поле. Таким образом, квантовые флуктуации, важные при низких температурах, и слабое внешнее осциллирующее поле не нарушают спиновое упорядочение, и эффект старения можно наблюдать в рассматриваемой системе. В отсутствие внешнего переменного поля наши результаты сходны с теоретическими результатами, полученными в [19].

Мы благодарим Л.Ф. Кульяндоло, С. Франца и М.П. Мезарда за любезно предоставленный алгоритм численного метода. Авторы благодарят Отделение физических наук Университета г. Салерно за теплый прием.

Список литературы

[1] Spin-glasses and random fields / Ed. by A.P. Young. World Scientific, Singapore (1998).
[2] L.F. Cugliandolo, D.R. Grempel, G. Lozano, H. Lozza, C.A. da Silva Santos. Phys. Rev. **B 66**, 014 444 (2002).
[3] M.P. Kennett, C. Chamon, J. Ye. Phys. Rev. **B 64**, 224 408 (2001).
[4] A.J. Leggett, S. Chakravarty, A.T. Dorsey, M.P.A. Fisher, A. Garg, W. Zwerger. Rev. Mod. Phys. **67**, *3*, 725 (1995).
[5] G. Busiello, R.V. Saburova, V.G. Sushkova. Solid. Stat. Commun. **123**, *1*, 37 (2002).
[6] Г. Бузиелло, Р.В. Сабурова, В.Г. Сушкова, Г.П. Чугунова. ФММ **95**, *5*, 1 (2003).
[7] L. Berthier, L.F. Cugliandolo, J.L. Iguain. Phys. Rev. **E 63**, 051 302 (2001).
[8] L.F. Cugliandolo, J. Kurchan. Phys. Rev. Lett. **71**, *1*, 173 (1993).
[9] H.E. Castillo, C. Chamon, L.F. Cugliandolo, M.P. Kennett. Cond-mat/01112272.
[10] T.R. Kirkpatrick, D. Thirumalai. Phys. Rev. **B 36**, *10*, 5388 (1987).
[11] B. Derrida. Phys. Rev. **B 24**, *5*, 2613 (1981).
[12] D.J. Gross, M. Mezard. Nucl. Phys. **B 240**, *2*, 431 (1984).
[13] J. Zinn-Justin. Quantum field theory and critical phenomena. Oxford Science Publ., Oxford (1996). 1008 p.
[14] J. Schwinger. J. Math. Phys. **2**, *3*, 407 (1961).
[15] Л.В. Келдыш. ЖЭТФ **47**, *4*, 1515 (1964).
[16] K. Chou, Z. Su, B. Hao, L. Yu. Phys. Rep. **118**, *1–2*, 3 (1985).
[17] P.C. Martin, E.D. Siggia, H.A. Rose. Phys. Rev. **A 8**, *1*, 423 (1973).
[18] R.P. Feynman, F.L. Vernon. Ann. Phys. (N.Y.) **24**, *1*, 118 (1963).
[19] L.F. Cugliandolo, G. Lozano. Phys. Rev. **B 59**, *2*, 915 (1999).
[20] H. Sompolinsky, A. Zippelius. Phys. Rev. Lett. **47**, *5*, 359 (1981).