

01

## **Модельная система с дискретным временем, демонстрирующая „перемежаемость перемежаемостей“**

© О.И. Москаленко, А.А. Короновский, М.О. Журавлев,  
А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Саратовский государственный технический университет  
им. Гагарина Ю.А.  
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

*Поступило в Редакцию 8 августа 2014 г.*

Построена модельная система с дискретным временем, в которой одновременно существуют 2 различных типа перемежаемости: перемежаемость типа I и перемежаемость „игольного ушка“. Найдены статистические характеристики для данного типа поведения; полученные данные сопоставлены с выведенными теоретическими закономерностями. Показано хорошее соответствие между аналитически и численно полученными результатами.

Изучение перемежающегося поведения всегда представляло значительный интерес для исследователей, связанный, в первую очередь, с тем, что это явление характерно для широкого класса систем и является фундаментальным [1]. Тем не менее все известные до настоящего времени работы (см., например, [2–4]) были направлены на рассмотрение случаев, когда в системе при фиксированных значениях управляющих параметров 2 типа поведения последовательно сменяют друг друга, т.е. реализуется один конкретный тип перемежаемости. Однако недавно было установлено, что в нелинейных системах возможна и такая ситуация, когда при фиксированных значениях управляющих параметров одновременно существуют 2 различных типа перемежаемости, т.е. реализуется режим так называемой „перемежаемости перемежаемостей“ [5]. Такая ситуация наблюдается, в частности, в потоковых динамических системах вблизи границ возникновения синхронных режимов на граничных временных масштабах наблюдения (см., например, [5,6]), однако в системах с дискретным временем до настоящего

момента подобное явление обнаружено не было. Представленная работа направлена на поиск системы с дискретным временем, способной при фиксированных значениях управляющих параметров одновременно демонстрировать 2 различных типа перемежающегося поведения. Подобная задача представляет большой интерес с фундаментальной точки зрения, так как эти исследования позволяют более глубоко понять и осмыслить механизмы и природу таких явлений, как перемежаемость и хаотическая синхронизация.

Поиск модельной системы с дискретным временем, способной демонстрировать явление „перемежаемости перемежаемостей“, будем осуществлять путем конструирования такой системы из эталонных моделей дискретных отображений. Для этого рассмотрим 2 связанных между собой отображения окружности:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon, \quad \text{mod } 2\pi, \\y_{n+1} &= y_n + 2\Omega(1 - \cos y_n) - \gamma + \kappa \cos(\alpha/x_n^3), \quad \text{mod } 2\pi,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\Omega$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$  — управляющие параметры в данной системе. Отметим, что связь между отображениями окружности реализуется посредством слагаемого  $\kappa \cos(\alpha/x_n^3)$ , добавленного во второе уравнение системы (1). Таким образом в системе (1) реализуется однонаправленная связь. Для того чтобы одновременно наблюдать в исследуемой системе 2 типа перемежающегося поведения, необходимо ввести в рассмотрение новую переменную  $z_n$ , которая определяется следующим образом:

$$z_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.\tag{2}$$

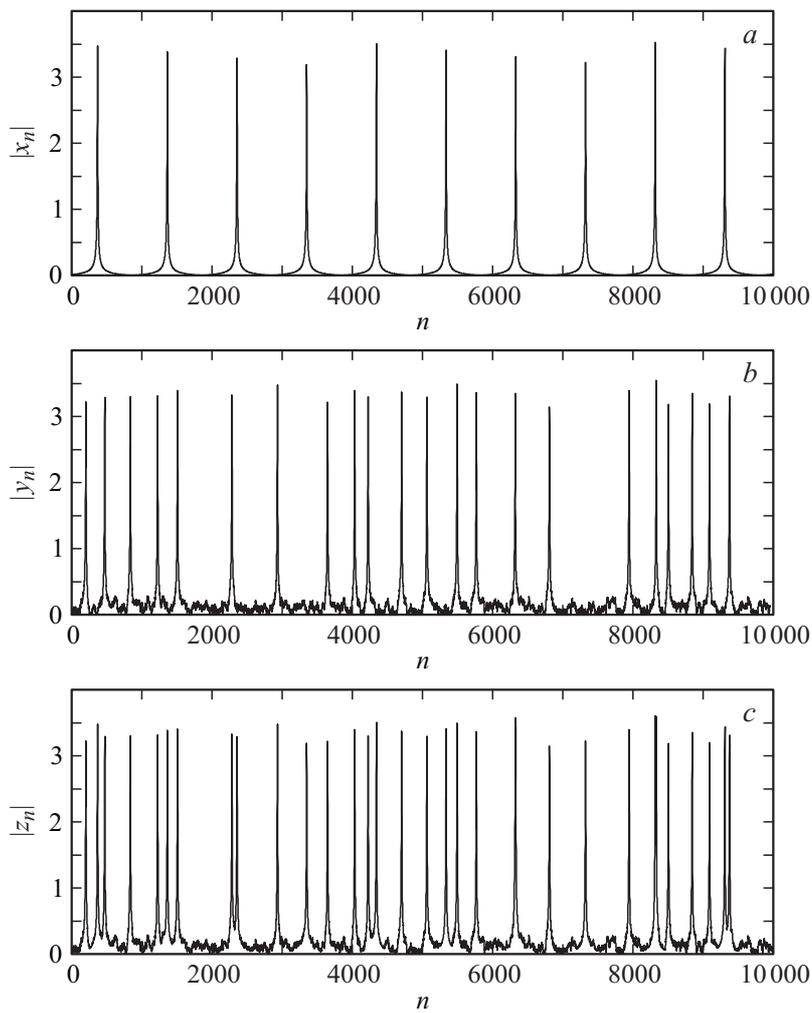
Введенная таким образом переменная  $z_n$  позволяет рассматривать систему уравнений (1) как двумерную динамическую систему с дискретным временем, одновременно демонстрирующую 2 типа перемежающегося поведения. Это связано с тем, что если рассматривать отдельно переменную  $x_n$ , то в зависимости от значения параметра  $\varepsilon$  она может демонстрировать известный тип перемежающегося поведения (перемежаемость типа I). Рассматривая отдельно переменную  $y_n$  и варьируя параметр  $\gamma$ , можно обнаружить, что данная переменная может демонстрировать другой тип перемежающегося поведения, так как на нее еще воздействует дополнительный сигнал  $\kappa \cos(\alpha/x_n^3)$ . Таким образом, переменная  $z_n$ , определяемая соотношением (2) и представляющая

собой комплекс двух переменных  $x_n$  и  $y_n$ , будет демонстрировать одновременно 2 различных типа перемежающегося поведения. Исходя из вышеизложенного, можно говорить, что полученная система (1) с дискретным временем способна демонстрировать сосуществование 2 типов перемежающегося поведения.

Зафиксируем значения управляющих параметров  $\Omega = 0.1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\kappa = 0.025$ ,  $\varepsilon = -0.0001$  и  $\gamma = 0.0005$  и исследуем динамику системы (1). На рис. 1, *a* и *b* приведены временные реализации  $x_n$  и  $y_n$  соответственно. Видно, что для обеих переменных можно выделить 2 характерных типа поведения: первый, когда значение переменной близко к нулю, и второй, когда значение переменной резко возрастает. Таким образом, можно говорить о том, что переменные  $x_n$  и  $y_n$  демонстрируют перемежающееся поведение, где ламинарные участки соответствуют значениям переменных, близким к нулю, а турбулентные — резкому возрастанию этих значений. Из качественного сопоставления рис. 1, *a* и *b* видно, что типы перемежающегося поведения, которые демонстрируют переменные  $x_n$  и  $y_n$ , являются различными. Статистический анализ характеристик данных типов перемежающегося поведения показывает, что при выбранных значениях управляющих параметров переменная  $x_n$  демонстрирует перемежаемость типа I [2], а переменная  $y_n$  — перемежаемость „игольного ушка“ [4,7] (которая также может рассматриваться как перемежаемость типа I с шумом [7]).

Используя введенную в рассмотрение с помощью соотношения (2) переменную  $z_n$ , рассмотрим в целом динамику системы (1), которая способна демонстрировать одновременно 2 различных типа перемежающегося поведения: перемежаемость типа I и перемежаемость „игольного ушка“. Поведение переменной  $z_n$  при тех же значениях управляющих параметров представлено на рис. 1, *c*. Видно, что так же, как и для переменных  $x_n$  и  $y_n$ , ламинарная фаза реализуется при значениях переменной, близких к нулю, в то время как момент резкого возрастания значения переменной соответствует началу турбулентного участка динамики.

На основании общей теории сосуществования 2 различных типов перемежаемости, предложенной в [5], получим теоретическую закономерность распределения длительностей ламинарных фаз для перемежаемости перемежаемостей типа I и „игольного ушка“. Принимая во внимание тот факт, что в режиме перемежаемости „игольного ушка“ распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспонен-



**Рис. 1.** Временные зависимости  $x_n$  (a),  $y_n$  (b) и  $z_n$  (c) системы (1)–(2) в режиме перемежаемости (a, b) и сосуществования 2 различных типов перемежаемости (c).

циальному закону [7]

$$p_1(\tau) = \frac{1}{KT_1} \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right), \quad (3)$$

а при перемежаемости типа I может быть приближенно описано  $\delta$ -функцией [2]

$$p_2(\tau) = \delta(\tau - T_2) \quad (4)$$

(где  $K = e^{-x/T_1}$  — коэффициент нормировки,  $x$  — минимальное значение длительности ламинарных фаз, подчиняющееся закономерности (3),  $T_{1,2}$  — средние длительности ламинарных фаз для перемежаемостей „игольного ушка“ и типа I соответственно), распределение длительностей ламинарных фаз при одновременном существовании перемежаемостей „игольного ушка“ и типа I будет иметь вид

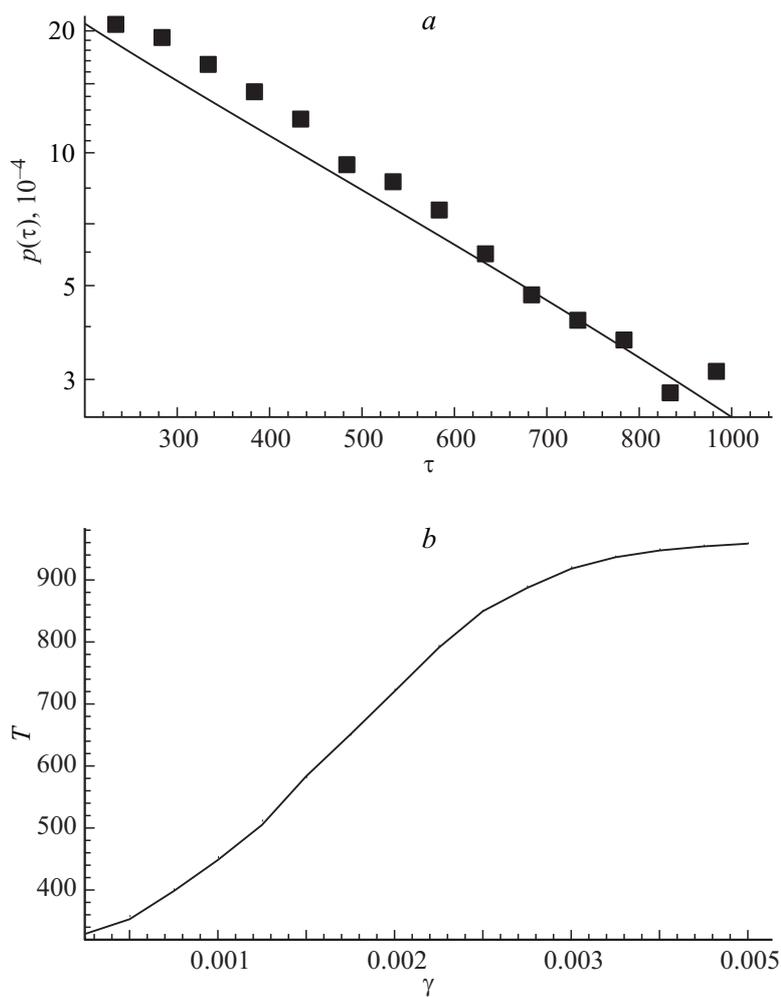
$$p(\tau) = \frac{\delta(\tau - T_2) \left( \exp\left[\frac{x-\tau}{T_1}\right] T_1 - \tau \exp\left[\frac{x}{T_1}\right] \Gamma\left[0, \frac{\tau}{T_1}\right] \right) + \exp\left[\frac{x-\tau}{T_1}\right] \left( \frac{T_1 + T_2 - \tau}{T_1} + \exp\left[\frac{\tau}{T_1}\right] \Gamma\left[0, \frac{\tau}{T_1}\right] \right)}{T_1 + T_2 + x \left( \exp\left[\frac{x}{T_1}\right] \text{Ei}\left[-\frac{x}{T_1}\right] - 1 \right)}, \quad (5)$$

где  $\text{Ei}(z) = -\int_{-z}^{\infty} (e^{-t}/t) dt$  — интегральная показательная функция,  $\Gamma(a, z)$  — неполная гамма-функция.

Подставляя закономерность (5) в выражение для средней длительности ламинарных фаз  $T = \int_x^{\infty} \tau p(\tau) d\tau$ , получим следующее соотношение для средней длительности ламинарных фаз при перемежаемости перемежаемостей типа I и „игольного ушка“:

$$T = \frac{\exp\left[\frac{x-T_2}{T_1}\right] \left( T_1 \left( T_1 \left( 1 - \exp\left[\frac{T_2}{T_1}\right] \right) + T_2 \left( 1 + 2 \exp\left[\frac{T_2}{T_1}\right] \right) \right) - T_2^2 \exp\left[\frac{T_2}{T_1}\right] \left( \text{Ei}\left[-\frac{T_2}{T_1}\right] - 2\Gamma\left[0, \frac{T_2}{T_1}\right] \right) \right)}{2 \left( T_1 + T_2 + x \left( \exp\left[\frac{x}{T_1}\right] \text{Ei}\left[-\frac{x}{T_1}\right] - 1 \right) \right)}. \quad (6)$$

Проанализируем численно полученные статистические характеристики (распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности) для переменной  $z_n$ . На рис. 2, а представлено распределение длительностей ламинарных фаз при вышеуказанных значениях управляющих



**Рис. 2.** Распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров (*a*) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра  $\gamma$  (*b*) для системы (1)–(2). Данные численного моделирования показаны точками, теоретические аппроксимации законами (5) и (6) — сплошными линиями. Значения параметров аппроксимации на рис. 2, *a* выбраны следующими:  $T_1 = 534$ ,  $T_2 = 965$ ,  $x = 65$ .

параметров, а на рис. 2, *b* приведена зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра  $\gamma$ . Видно, что теоретические зависимости хорошо соотносятся с результатами численного моделирования, что говорит о корректности использования предложенной в работе [5] теории для описания сосуществования „перемежаемости перемежаемости“ типа I и „игольного ушка“ в системах с дискретным временем.

Таким образом, в работе построена модельная система с дискретным временем, способная одновременно демонстрировать 2 типа перемежаемости: перемежаемость типа I и перемежаемость „игольного ушка“. Построена теория этого типа „перемежаемости перемежаемости“, получены закон распределения длительностей ламинарных фаз и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Теоретические закономерности сопоставлены с результатами численного моделирования, показано хорошее соответствие между ними.

Исследование выполнено при поддержке Совета по грантам президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-807.2014.2), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-02-31088-мол-а) и Министерства образования и науки РФ (проект 3.23.2014К).

## Список литературы

- [1] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
- [2] Manneville P., Pomeau Y. // *Physica. D.* 1980. V. 1. N 2. P. 167.
- [3] Boccaletti S., Valladares D.L. // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62. N 5. P. 7497.
- [4] Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. N 1. P. 47.
- [5] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Zhuravlev M.O., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. // *CHAOS.* 2013. V. 23. P. 033 129.
- [6] Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // *Письма в ЖТФ.* 2013. Т. 39. В. 14. С. 1.
- [7] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I. // *Phys. Lett. A.* 2011. V. 375. P. 1646.