

01

## Влияние сверхпроводящего покрытия на равновесное состояние системы двух концентрических ферромагнитных сфер в магнитном поле

© С.Н. Сазонов

Уфимский государственный авиационный технический университет,  
450000 Уфа, Россия  
e-mail: SazonovSN@mail.ru

(Поступило в Редакцию 16 июня 2014 г.)

В рамках теории Лондона найдена свободная энергия системы, состоящей из двух концентрических однородно намагниченных сфер и покрывающей их сферической сверхпроводящей оболочки во внешнем магнитном поле, параллельном намагниченности наружной сферы при произвольной величине угла между векторами магнитных моментов сфер. Вычислено поле переключения намагниченности внутренней сферы от антипараллельной магнитному моменту наружной сферы к параллельной, и определены условия, при которых такое переключение не вызывает перехода оболочки в нормальное состояние.

Рассмотрим изображенную на рисунке систему из двух концентрических однородно намагниченных ферромагнитных магнито жестких сфер и оболочки из сверхпроводящего материала внутреннего радиуса  $h$  и наружного радиуса  $a$ , покрывающей наружную сферу (2). Температура системы ниже температуры сверхпроводящего перехода материала оболочки в нулевом поле. Сфера 2 закреплена и является магнито жесткой, а магнитный момент  $\mathbf{p}_1$  внутренней сферы 1 может свободно поворачиваться в пространстве (в контексте рассматриваемой задачи не имеет значения относительно своей кристаллической решетки неподвижной в пространстве или вместе с ней). Ось  $Oz$  декартовой системы координат направлена вдоль вектора  $\mathbf{p}_2$  магнитного момента наружной сферы 2, а ее плоскость  $Oxz$  является плоскостью, в которой поворачивается вектор  $\mathbf{p}_1$ . Система находится во внешнем поле  $\mathbf{H}_0$ , созданном ферромагнитным, однородно намагниченным вдоль оси  $Oz$  шаром 3, радиусом намного большим величины  $a$ , вблизи северного магнитного полюса которого располагается сверхпроводящая оболочка.

Таким образом, поле намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{R})$  в пространстве

$$\mathbf{M}(\mathbf{R} \subset V_1) = M_s \sin \alpha \mathbf{e}_x + M_s \cos \alpha \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{R} \subset V_2) = M_s \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{R} \subset V_3) = J_s \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор,  $V_i$  — объем, занимаемый  $i$ -ой сферой ( $i = 1-3$ ),  $J_s, M_s$  — величины намагниченности материалов,  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$  — орты выбранной декартовой системы координат,  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Не уменьшая общности, считаем, что величины объемов  $V_1$  и  $V_2$  равны, так что  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p_m$ , а зазоры между объектами системы отсутствуют. Найдем равновесное значение угла  $\alpha$ .

Пусть  $\mathbf{H}_j$  — напряженность поля сверхтока,  $\mathbf{H}_D(\mathbf{R})$  — суммарное поле сверхтока и магнитных моментов атомов ферромагнитных сфер 1 и 2 внутри них. Тогда, согласно [1], свободная энергия системы, состоящей из сверхпроводника и ферромагнетиков 1 и 2 во внешнем поле  $\mathbf{H}_0$ , равна

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_s = & - \int_{V_1+V_2} \mathbf{M}(\mathbf{R}) \left( \mathbf{H}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{H}_D(\mathbf{R}) \right) dV \\ & - \frac{1}{2} \int_{V_3} \mathbf{M}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{H}_j(\mathbf{R}) dV. \end{aligned} \quad (4)$$

Для простой кубической решетки ферромагнетиков 1, 2 ([2])

$$\mathbf{H}_D(\mathbf{R}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) - \mathbf{H}_0 + \frac{4}{3} \pi \mathbf{M}(\mathbf{R}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{H}(\mathbf{R})$  — макроскопическая напряженность поля в данной точке ферромагнетика, соответствующая непрерывному полю намагниченности (1), (2). Предположим (это будет доказано ниже), что поле сверхтока  $\mathbf{H}_j$  внутри оболочки при  $R < h$  однородно, а вне ее при  $R > a$  совпадает с полем точечного диполя, имеющего магнитный момент  $\varrho$ . При этом (4) с учетом (5) приводится к виду

$$\mathfrak{F}_s = - \left( \mathbf{p} + \frac{1}{2} \varrho \right) \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{H}_j, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 2p_m \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \mathbf{e}_{\alpha/2}, \quad (7)$$

а  $\mathbf{e}_{\alpha/2}$  — орт, ориентированный в плоскости  $Oxz$  под углом  $\alpha/2$  к оси  $Oz$ . Напряженность поля сверхтока  $\mathbf{H}_j(R < h)$  можно найти, зная макроскопическую напряженность поля  $\mathbf{H}$  внутри сверхпроводника, созданного

всеми источниками:

$$\mathbf{H}_j = \left( \mathbf{H} - \mathbf{H}_0 - \frac{3(\mathbf{pR})\mathbf{R} - \mathbf{pR}^2}{R^5} \right) \Big|_{R=h+\varepsilon}, \quad (8)$$

( $\varepsilon$  — бесконечно малое расстояние). Будем считать сверхпроводник лондоновским. Тогда

$$\text{rot rot } \mathbf{H} + \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H} = 0, \quad h \leq R \leq a, \quad (9)$$

где  $\lambda$  — лондоновская глубина проникновения магнитного поля. Для решения задачи общее решение уравнения (9) необходимо сшить при  $R = h$  и  $R = a$  с решениями уравнений магнитостатики

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad R < h \cup a < R. \quad (10)$$

Ввиду линейности уравнений (9), (10)

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b, \quad (11)$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_a + \mathfrak{p}_b, \quad (12)$$

где  $\mathbf{H}_a$  и  $\mathfrak{p}_a$  — поле в пространстве и магнитный момент сверхпроводящей оболочки, возникающие при ее помещении в однородное внешнее поле  $\mathbf{H}_0$  (задача А),  $\mathbf{H}_b$  и  $\mathfrak{p}_b$  — поле и магнитный момент той же оболочки, соответствующие случаю, когда внутри нее находятся показанные на рисунке ферромагнитные сферы, но  $\mathbf{H}_0 = 0$  (задача Б).

Поле  $\mathbf{H}_a$  удовлетворяет условию на бесконечности  $\mathbf{H}_a(R \rightarrow \infty) = \mathbf{H}_0$  и требованию конечности при  $R \rightarrow 0$ . Что касается поля  $\mathbf{H}_b$ , то, поскольку ([3]) его вид при  $R \geq h$  не зависит от того, находится внутри оболочки однородно намагниченная сфера или же точечный диполь в центре с тем же, что и у сферы, магнитным моментом, граничные условия для поля  $\mathbf{H}_b$  удобно взять в виде  $\mathbf{H}_b(R \rightarrow \infty) = 0$  и

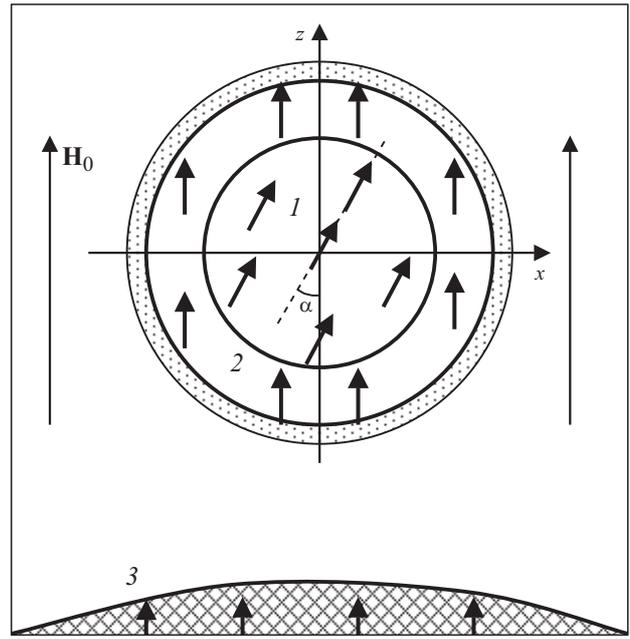
$$\mathbf{H}_b(R \rightarrow 0) \cong \frac{3(\mathbf{pR})\mathbf{R} - \mathbf{pR}^2}{R^5} + O(1). \quad (13)$$

С учетом этих граничных условий решение задачи А:

$$\mathbf{H}_a = \frac{2a}{\lambda S} \mathbf{H}_0, \quad R < h, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_a = & \frac{3H_0 a}{S} \frac{\lambda}{R^2} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{R}\right) U \exp\left(\frac{R-h}{\lambda}\right) \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{\lambda}{R}\right) W \exp\left(\frac{h-R}{\lambda}\right) \right] \cos \theta \mathbf{e}_R - \frac{3H_0 a}{2SR} \\ & \times \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{R} + \frac{\lambda^2}{R^2}\right) U \exp\left(\frac{R-h}{\lambda}\right) - \left(1 + \frac{\lambda}{R} + \frac{\lambda^2}{R^2}\right) \right. \\ & \left. \times W \exp\left(\frac{h-R}{\lambda}\right) \right] \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad h \leq R \leq a, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_a = \frac{3(\mathfrak{p}_a \mathbf{R})\mathbf{R} - \mathfrak{p}_a R^2}{R^5} + \mathbf{H}_0, \quad a < R, \quad (16)$$



Ферромагнитные сферы 1 и 2, покрытые сверхпроводящей оболочкой (показана пунктиром) во внешнем поле  $\mathbf{H}_0$ , созданном ферромагнитным шаром 3 (заштрихован). Радиус шара 3 для наглядности восприятия сильно уменьшен. Короткие стрелки — векторы намагниченности в соответствующей области пространства.

где

$$S = U \exp\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) - W \exp\left(-\frac{\Delta}{\lambda}\right), \quad U = \frac{h^3}{3\lambda^2} + \frac{h}{\lambda} + 1,$$

$$W = \frac{h^2}{3\lambda^2} - \frac{h}{\lambda} + 1, \quad \Delta = a - h,$$

$$\mathfrak{p}_a = -\frac{3H_0 a \lambda^2}{2S} \left( U \tilde{U} \exp\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) - W \tilde{W} \exp\left(-\frac{\Delta}{\lambda}\right) \right), \quad (17)$$

$\tilde{U} = \frac{a^2}{3\lambda^2} - \frac{a}{\lambda} + 1$ ,  $\tilde{W} = \frac{a^2}{3\lambda^2} + \frac{a}{\lambda} + 1$ ,  $\theta$  — полярный угол в сферической системе координат, имеющей общую ось  $Oz$  и центр с декартовой системой координат, введенной ранее,  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  — ее орты.

Решение задачи Б:

$$\mathbf{H}_b = \frac{3(\mathbf{pR})\mathbf{R} - \mathbf{pR}^2}{R^5} - \frac{4\mathbf{p}}{3\lambda^2 h S} \sinh\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right), \quad R < h, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_b = & \frac{p}{\lambda SR^2} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{R}\right) \exp\left(\frac{R-a}{\lambda}\right) + \left(1 + \frac{\lambda}{R}\right) \right. \\ & \left. \times \exp\left(\frac{a-R}{\lambda}\right) \right] 2 \cos \theta' \mathbf{e}_R - \frac{p}{\lambda^2 SR} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{R} + \frac{\lambda^2}{R^2}\right) \right. \\ & \left. \times \exp\left(\frac{R-a}{\lambda}\right) - \left(1 + \frac{\lambda}{R} + \frac{\lambda^2}{R^2}\right) \exp\left(\frac{a-R}{\lambda}\right) \right] \\ & \times \sin \theta' \mathbf{e}_\theta, \quad h \leq R \leq a, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_b = \frac{3((\mathbf{p} + \mathfrak{P}_b)\mathbf{R})\mathbf{R} - (\mathbf{p} + \mathfrak{P}_b)R^2}{R^5}, \quad a < R, \quad (20)$$

где

$$\mathfrak{P}_b = \left( \frac{2a}{\lambda S} - 1 \right) \mathbf{p}, \quad (21)$$

$\theta'$  — полярный угол в сферической системе координат, повернутой на угол  $a/2$  вокруг оси  $Oy$  относительно исходной,  $\mathbf{e}_{\theta'}$  — ее орт.

Однородность поля оболочки при  $R < h$  и его дипольный характер при  $R > a$  в обоих случаях очевидны. Подставляя (14) и (18) в (11), (17) и (21) в (12), (11) в (8), а (8) и (12) в (6), получим

$$\mathfrak{S}_s = \frac{4p_m}{\lambda^2 h S} \left( \frac{2}{3} p_m \sinh \frac{\Delta}{\lambda} - H_0 \lambda h a \right) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + C, \quad (22)$$

где  $C = H_0 \mathfrak{S}_a / 2$ .

Когда внешнее поле отсутствует, система, как следует из (22), находится в состоянии устойчивого равновесия при  $\alpha = \pi$  независимо от величины  $p_m$ . Если увеличивать внешнее поле от нуля, то при достижении величиной  $H_0$  значения

$$H_{0,up} = \frac{2p_m}{3\lambda h a} \sinh \frac{\Delta}{\lambda}, \quad (23)$$

произойдет переключение намагниченности внутренней сферы  $I$  от значения  $\alpha = \pi$  к  $\alpha = 0$ . Дальнейшие расчеты проведем при соблюдении дополнительных условий  $h \gg \Delta$  и  $\Delta \geq \lambda$ . При этом, как показывают элементарные вычисления по формулам (11), (15) и (19), максимальное значение поля при  $H_0 = H_{0,up}$  достигается внутри сверхпроводника на его наружном экваторе и равно

$$H_{max} \cong \frac{3}{2} H_{0,up} \left( 1 + O \left( \frac{\lambda}{h} \right) \right), \quad (24)$$

как и в случае сплошного шара в однородном внешнем поле. Потребуем, чтобы при  $H_0 = H_{0,up}$  и при любом  $\alpha$  свободная энергия системы была мала по сравнению с ее энергией, когда оболочка находится в нормальном состоянии:

$$\mathfrak{S}_s(H = H_{0,up}) \ll \mathfrak{S}_n(H = H_{0,up}). \quad (25)$$

Последняя при произвольном  $H_0$  равна

$$\mathfrak{S}_n = \frac{H_{cr}^2}{8\pi} \tilde{V} - p H_0 \cos \alpha, \quad (26)$$

где  $H_{cr}$  — критическое магнитное поле при данной температуре,  $\tilde{V}$  — объем оболочки. Подставляя (23), (24) и (26) в (25), получим, что, если неравенство (25) выполнено при  $\alpha = 0$ , то оно будет выполнено и для произвольного  $\alpha$ , при  $\alpha = 0$  оно сводится к

$$H_{0,up}^2 \ll \frac{2\Delta}{a} H_{cr}^2, \quad (27)$$

что автоматически приводит к выполнению критерия применимости теории Лондона к задаче, имеющего вид  $H_{max} \ll H_{cr}$  ([4]).

Зависимость максимального магнитного момента сферы  $I$ , перематничиваемого внешним полем 1 мОе, от температуры

$T/T_{cr}$	0.9990	0.99925	0.99950
$p_m, \mu A mm^2$	7.2	12.8	26.2

Рассмотрим оболочку из Pb с  $h = 1$  см и  $\Delta = 2 \mu m$  в температурном интервале  $T/T_{cr} = 0.9990 - 0.9995$ , где  $T_{cr} = 7.19$  К — критическая температура сверхпроводящего перехода в Pb в нулевом поле ([5]). При этих температурах лондоновская глубина проникновения поля, рассчитанная по эмпирической формуле  $\lambda(T) = \lambda(0) / \sqrt{1 - (T/T_{cr})^4}$  и из значения  $\lambda(0) = 39$  нм ([5]), лежит в интервале  $\lambda(T) = 0.6 - 0.9 \mu m$ , нижняя граница которого значительно больше размера куперовской пары  $\xi_0 = 83$  нм в данном материале ([6]), так, что использование локального уравнения (9) можно считать корректным. В этом же интервале температур величина  $H_{cr}(T)$  убывает линейно примерно от  $H_{cr,1} = 1.0$  Ое до  $H_{cr,2} = 0.5$  Ое ([7]). Неравенству (27) при этом удовлетворяет значение поля  $H_0 = 1$  мОе. В таблице представлены максимальные величины магнитного момента внутренней сферы  $p_m$ , перематничиваемого таким полем в рассмотренном интервале температур, рассчитанные по формуле (23). Таким образом, выше показано следующее:

1. Наличие сверхпроводящей сферической оболочки поверх сферического магнита 2 меняет равновесное состояние системы. Если в отсутствие оболочки сфера  $I$  находится в состоянии безразличного равновесия, подстраивая свой свободно ориентированный магнитный момент под вектор сколь угодно слабого внешнего поля, появление оболочки делает устойчивым состояние с антипараллельной ориентацией магнитных моментов обеих сфер вплоть до некоторого критического поля разворота магнитного момента внутренней сферы.

2. Требуемые для наблюдения эффекта значения геометрических размеров системы, внешнего поля и намагниченности магнитных материалов технически реализуемы.

## Список литературы

- [1] *Беспярых Ю.И., Василевский В., Гайдек М., Симонов А.Д., Харитонов В.Д.* // ФТТ. 1994. Т. 36. Вып. 3. С. 586–594.
- [2] *Браун У.Ф.* Микромагнетизм. М.: Наука, 1977. С. 50.
- [3] *Сазонов С.Н.* // Физ. образование в вузах. 2013. Т. 19. Вып. 3. С. 111–122.
- [4] *Гинзбург В.Л.* // УФН. 2000. Т. 170. Вып. 6. С. 619–630.
- [5] *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000. 398 с.
- [6] *де Жен П.Г.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968. С. 31.
- [7] *Ашкрофт Н., Мермин Н.Д.* Физика твердого тела. Т. 2. М.: Мир, 1979. С. 360.