

11

Синхронизация элементов сложной сети при различных размерах их ансамблей

© В.В. Макаров^{1,2}, Г.В. Осипов¹, В.А. Максименко^{1,2},
А.А. Харченко²

¹ Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород

² Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
E-mail: vladmak404@gmail.com

Поступило в Редакцию 27 августа 2014 г.

Изучена возможность исследования режимов синхронизации в сложной сети с помощью интегральных характеристик, снимаемых с большого количества взаимодействующих осцилляторов (макроскопических сигналов). Показано, что при расчете индекса синхронизации с использованием фаз макроскопических сигналов возможна потеря информации об асинхронных осцилляторах, пропорциональная размеру ансамблей, порождающих макроскопические сигналы.

Одной из наиболее значимых задач современной науки в области исследования сетевых структур является изучение режимов синхронизации взаимодействующих элементов [1,2]. Исследование взаимодействия элементов сложных реальных систем часто связано с недостатком информации о векторах состояния отдельных узлов сети, при этом исследователи имеют дело с суммарными сигналами, порождаемыми группами взаимодействующих элементов [3,4]. Одним из наглядных примеров таких исследований является изучение патологической и когнитивной активности головного мозга при помощи магнитоэнцефалографии и электроэнцефалографии [5–8], где регистрируемые сигналы, снимаемые с различных областей головного мозга, представляют собой суммарную активность больших нейронных ансамблей.

В то же самое время задачи, связанные с диагностикой синхронных режимов в нейронных сетях головного мозга, представляют большой интерес для исследований патологической активности, в частности, эпилептической, характеризующейся гиперсинхронной активностью нейронов [4,5,9,10].

В данной статье мы приводим исследование возможности определения степени синхронизации сложной сети взаимодействующих элементов по интегральным характеристикам, соответствующим суммарным активностям ее различных частей, и анализируем возможную потерю информации о системе при этом.

В настоящем исследовании используется модель Курамото, являющаяся одной из наиболее распространенных сетевых моделей, которая была предложена в 1975 году [11] в качестве математической интерпретации коллективной динамики химических и биологических осцилляторов [12]. В последнее время различные модификации данной модели сети фазовых осцилляторов активно применяются для анализа процессов кластеризации и синхронизации, в том числе и в нейронных сетях и социальных системах [13].

В работе рассматривается сеть, состоящая из $N = 200$ связанных осцилляторов. Каждый i -й узел рассматриваемой сети характеризуется фазой φ_i и взаимодействует со всеми остальными $N-1$ узлами. Динамика каждого осциллятора описывается уравнением

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \lambda \sum_j^N w_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad (1)$$

где ω_i — заданные случайным образом натуральные частоты в диапазоне $[1, 10]$; w_{ij} — вес связи, соединяющей узлы j и i , и λ — сила связи. Изначально фазы взаимодействующих элементов заданы случайно и распределены равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, при этом веса связей также заданы случайно.

Для того чтобы охарактеризовать степень синхронизации сети количественно, будем рассматривать индекс синхронизации, который представляет собой степень фазовой когерентности осцилляторов [14,15]:

$$\sigma = \frac{1}{TN} \int_{t-T}^t \left| \sum_{i=1}^N e^{i\varphi_i(t)} \right| dt, \quad (2)$$

где φ_i — фаза i -го генератора сети, T — длительность временной реализации, в течение которой проводилось моделирование процессов в сети. Значения индекса синхронизации, близкие к нулю, означают, что в сети очень малое число генераторов находятся в режиме синхронизации, в то время как рост величины σ свидетельствует о том, что

в сети все большее число осцилляторов становится синхронизованным друг с другом и, наконец, при $\sigma = 1$ мы имеем режим полной фазовой синхронизации в исследуемой сети.

Для анализа синхронизации с использованием интегральных характеристик вводились следующие функции, представляющие собой усредненные сигналы по некоторому подмножеству M элементов сети:

$$X_k(t) = \frac{1}{M} \sum_{n=k}^{k+M} x_n(t), \quad (3)$$

где M — число элементов, по которым проводится усреднение, k — номер первого элемента, по которому проводится усреднение. При этом сеть разбивалась на непересекающиеся подсети, содержащие равное количество элементов M . Каждый сигнал $x_n(t)$ представляет собой

$$x_n(t) = A \cos(\varphi_i(t)), \quad (4)$$

где φ_i — фаза элемента с номером i в каждый момент времени t , амплитуда сигналов каждого осциллятора предполагалась единичной ($A = 1.0$).

Характеристика (3) может рассматриваться как аналог сигнала электроэнцефалограммы и характеризует вклад группы осцилляторов (нейронов локальной области головного мозга, близких к регистрируемому электроду [16]) в сигнал, регистрируемый в эксперименте.

Для исследования степени синхронизации системы по интегральным характеристикам в уравнении (2) вместо фаз отдельных элементов использовались фазы суммарных сигналов, полученных с подсетей, содержащих M элементов, таким образом рассчитывался интегральный индекс синхронизации.

На рис. 1 представлена зависимость индекса синхронизации и интегрального индекса синхронизации от силы связи между взаимодействующими осцилляторами. Легко заметить, что зависимость индекса синхронизации нелинейна: индекс синхронизации слабо возрастает при увеличении силы связи до ≈ 4.7 , резко возрастая при дальнейшем ее увеличении. Обратимся к значениям интегрального индекса синхронизации. Отметим, что при разбиении исследуемой сети ($N = 200$) на подмножества $M = 50$ узлов мы получаем 4 макроскопических сигнала, по фазам которых происходит расчет интегрального индекса

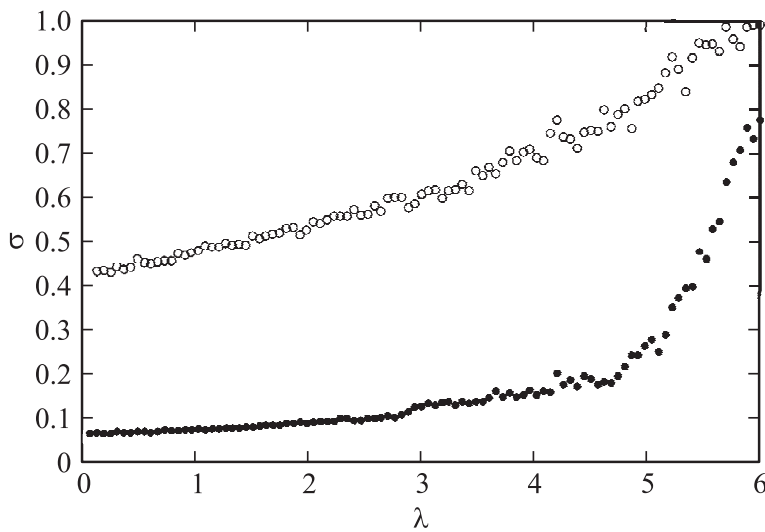


Рис. 1. Зависимость индекса синхронизации σ от силы связи λ при различном размере подсети: $M = 1$ (сплошные точки) и $M = 50$ (полые точки). Количество элементов сети $N = 200$.

синхронизации. При этом значения σ существенно выше, чем в случае расчета по отдельным элементам, что говорит о значительной потере информации о динамике осцилляторов. Кроме того, вид зависимости сильно меняется: с увеличением силы связи интегральный индекс синхронизации возрастает практически линейно. В области $\lambda > 5$ разница между зависимостями сокращается. Последнее свидетельствует о том, что при оценке степени синхронизации системы с помощью интегральных характеристик происходит потеря информации о динамике асинхронных осцилляторов.

Для детального изучения возможности оценки синхронизации по интегральным характеристикам было проведено двухпараметрическое исследование значения интегрального индекса синхронизации от силы связи и размера M подсети, генерирующей макроскопический сигнал, результаты которого приведены на рис. 2. Для наглядности на рисунок наложены линии уровня для $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$. Хорошо видно, что отклонение от истинного значения (индекса синхронизации, рассчитан-

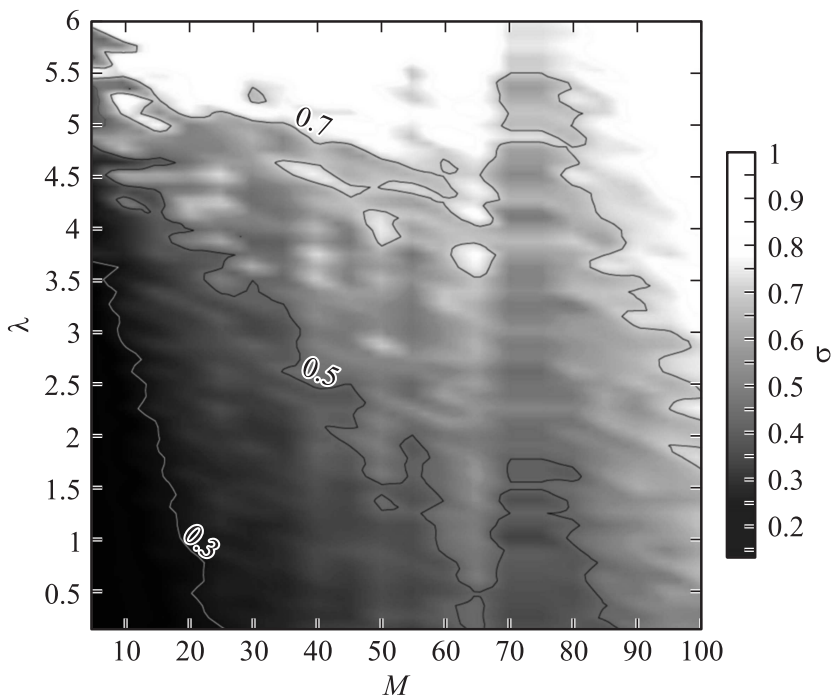


Рис. 2. Двухпараметрическая зависимость индекса синхронизации от количества элементов в подсети M и силы связи между осцилляторами λ . Количество элементов сети $N = 200$.

ного по фазам каждого элемента) линейно нарастает при увеличении количества элементов M в подсетях.

В заключение отметим, что в данной работе изучена возможность исследования синхронизации сложной сети связанных осцилляторов по интегральным сигналам, снимаемым с большого количества элементов. Построена характерная зависимость интегрального индекса синхронизации от размера ансамблей осцилляторов, с которых снимается интегральный сигнал. Показано, что при увеличении размера подсети зависимость индекса синхронизации от силы связи между элементами стремится к линейной. Обнаружено, что при увеличении количества

элементов, входящих в ансамбль, возрастает потеря информации об асинхронных осцилляторах, что говорит о корректности использования данного метода оценки степени синхронизации в сетях сильносвязанных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации государственного задания в сфере научной деятельности (проект 3.23.2014К (СГТУ-157)), РФФИ (проект 14-12-00811), а также Совета по грантам президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-807.2014.2).

В. Максименко благодарит также Фонд „Династия“ за стипендию, направленную на поддержку его научной деятельности.

Список литературы

- [1] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 432 p.
- [2] *Boccaletti S.* The Synchronized Dynamics of Complex Systems. Elsevier, 2008.
- [3] *Van Ooyen A.* // Network: Computation in Neural Systems. 2001. V. 12.
- [4] *Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова Е.Ю., Макаров В.А., Овчинников А.А.* // УФН. 2012. Т. 182. № 9. С. 905 [*Pavlov A.N., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Sitnikova E.Yu., Makarov V.A., Ovchinnikov A.A.* // Physics-Uspekhi. 2012. V. 55. N 9. С. 845].
- [5] *Короновский А.А., Макаров В.А., Павлов А.Н., Ситникова Е.Ю., Храмов А.Е.* Вейвлеты в нейродинамике и нейрофизиологии. М.: Физматлит, 2013. 272 с.
- [6] *Ossenblok P., Kornips B., Carpay H., Boon P., Van Luijtelaaar G.* (2010). Spatiotemporal imaging of „generalized“ seizure activity using MEG. Front. Neurosci. Conference Abstract: Biomag 2010 — 17th International Conference on Biomagnetism.
- [7] *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Koronovskii A.A.* // Brain research. 2014. V. 1543. P. 290.
- [8] *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Koronovskii A.A.* // Brain research. 2012. V. 1436. P. 147.
- [9] *Ossenblok P., van Houdt P., Kornips B., Colon A., van Luijtelaaar G.* // Clinical Neurophysiology. 2012. V. 1. N 42. P. 62–63.
- [10] *Moskalenko O.I., Phrolov N.S., Koronovskii A.A.* et al. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. P. 2571–2582.

-
- [11] *Kuramoto Y.* // Lect. Notes in Physics. 1975. V. 30. N 420.
- [12] *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence. N.Y.: Springer-Verlag, 1984. 156 p.
- [13] *Assenza S., Gutierrez R., Gomez-Gardenes J.* et al. // Scientific Reports. 2013. V. 1. N 99. P. 1.
- [14] *Tass P., Rosenblum M.G., Weule J.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 3291–3294.
- [15] *Moskalenko O.I., Phrolov N.S., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. P. 2571.
- [16] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A.* et al. Wavelets in Neuroscience. N. Y.: Springer-Verlag, 2015. 318 p.