

Расчет флексоэлектрических деформаций конечных тел

© А.С. Юрков

Редакция журнала „Физика твердого тела“ НАУКА–СПИКФ,
Менделеевская линия, 1, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: fitec@mail.ru

Рассматривается применение развитой ранее приближенной теории флексоэлектрических деформаций конечных тел к некоторым конкретным случаям. Рассмотрены случаи однородно поляризованного шара, круглого стержня и тонкой круглой пластинки из изотропного материала. Для них получены простые алгебраические формулы. В случае шара решение сравнивается с полученным ранее точным решением.

1. Введение

Электромеханические эффекты играют важную роль в физике твердого тела. До последнего времени из электромеханических эффектов рассматривались в основном пьезоэффект и электрострикция. Однако еще с конца 50-х годов известен третий электромеханический эффект — флексоэлектрический (см. обзоры [1,2] и ссылки в них). В обычных условиях этот эффект весьма мал, что и обуславливало то, что им обычно пренебрегали. Однако флексоэлектрический эффект масштабно зависим, и на наномасштабе он становится существенным. Этим объясняется резкий рост интереса к этому эффекту, связанный с развитием нанотехнологий в последнее время.

Существенной частью теории флексоэлектрического эффекта является вычисление флексоэлектрических деформаций конечных тел, причем в последнее время выяснено, что эта задача нетривиальна [3,4,5]. Оказывается, что при ее решении в рамках теории сплошной среды необходимо использовать неклассические механические граничные условия и при этом следует учитывать высшую упругость (пространственную дисперсию упругих модулей).

Точные уравнения упругого равновесия и граничные условия к ним [4,5], слишком сложны для применения в случаях, интересных для приложений. Даже для столь простой геометрии, как однородно поляризованный шар, их решение удается получить лишь ценой введения нестандартных функций, представляемых в виде степенных рядов [5]. Для более сложных случаев получить точное решение весьма затруднительно даже численными методами.

В недавней работе [6] был предложен метод приближенного решения этой задачи, позволяющий эффективно вычислять флексоэлектрические деформации любых тел с достаточно гладкой поверхностью. Представляет интерес его применение к конкретным задачам, важным для практики. Кроме того что это даст простые и удобные расчетные формулы, такое применение позволит лучше понять физические аспекты теории. Также интересно сравнить решение по этой приближенной теории с точным решением, которое имеется для случая однородно поляризованного шара [5]. Эти задачи решаются в настоящей работе.

2. Уравнения, описывающие флексоэлектрические деформации конечных тел

В рамках теории сплошной среды упругое равновесие тела определяется минимумом термодинамического потенциала. Классический упругий потенциал, записанный через тензоры в декартовых компонентах, общеизвестен

$$\Phi_{cl} = \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}. \quad (1)$$

Здесь c_{ijkl} — тензор упругих модулей, u_i — вектор упругих смещений, индекс, отделенный запятой, означает частную производную по соответствующей координате, используется правило суммирования по повторяющимся индексам Эйнштейна.

Для описания флексоэлектрического эффекта к (1) необходимо добавить слагаемое

$$\Phi_{flex} = \frac{1}{2} f_{ijkl} (P_{i,j} u_{k,l} - P_i u_{k,l,j}),$$

где f_{ijkl} — тензор флексоэлектрических модулей среды, P_i — вектор поляризации. Если рассматривается конечное тело, то, как показано в [4], необходимо также добавить слагаемое, описывающее высшую упругость (пространственную дисперсию упругих модулей)

$$\Phi_v = \frac{1}{2} v_{ijklmn} u_{i,j,n} u_{k,l,m}.$$

Здесь v_{ijklmn} — соответствующий материальный тензор.

Чтобы получить уравнения равновесия и граничные условия к ним, нужно проинтегрировать $\Phi = \Phi_{cl} + \Phi_{flex} + \Phi_v$ по объему тела, вычислить вариацию этого интеграла и выразить ее через независимо варьируемые величины. При этом дифференциальные уравнения равновесия получаются из условия равенства нулю суммы тех слагаемых в $\delta\Phi$, которые представляются объемными интегралами, а граничные условия — из равенства нулю суммы слагаемых, представленных поверхностными интегралами. Здесь возникает проблема, связанная с тем, что при объемном интегрировании по частям возникают интегралы по поверхности тела S , в которых содержатся величины $\delta u_{i,j}$, не являющиеся независимыми. Требуется дополнительное поверхностное интегрирование по частям, которое не вполне тривиально.

Указанная проблема была решена в [4] с использованием тензоров в декартовых компонентах и специальной математической техники. Однако конкретные задачи удобнее решать в криволинейных координатах x^α , при этом можно применить ковариантный тензорный анализ, такой же как в общей теории относительности. При этом формализм несколько упрощается тем обстоятельством, что тензор кривизны Римана здесь нулевой тождественно.

Естественно выбрать такую систему криволинейных координат, в которой уравнение поверхности тела имеет простой вид $x^3 = x_S^3$, где x_S^3 — некая константа. При таком выборе поверхностное интегрирование по частям выполняется непосредственно как интегрирование по координатам x^1 и x^2 . В итоге можно получить граничные условия к дифференциальным уравнениям упругого равновесия в различных эквивалентных формах, в частности в такой

$$\Theta^{\alpha 33} \Big|_S = 0, \quad (4)$$

$$\sigma^{\alpha 3} - \Theta^{\alpha \beta 3} \Big|_\beta + \Theta^{\alpha 33} \Big|_{,3} + \Theta^{\alpha(\beta\gamma)} \Gamma_{(\beta\gamma)}^3 \Big|_S = 0, \quad (5)$$

где

$$\sigma^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma;\delta} + f^{\gamma\delta\alpha\beta} P_{\gamma;\delta} - v^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\xi} u_{\gamma;\delta;\xi;\epsilon}, \quad (6)$$

$$\Theta^{\alpha\beta\gamma} = v^{\alpha\beta\epsilon\delta\gamma\xi} u_{\epsilon;\delta;\xi} - \frac{1}{2} f^{\delta\gamma\alpha\beta} P_\delta. \quad (7)$$

Здесь и далее криволинейные индексы обозначаются греческими буквами, индекс, отделенный точкой с запятой, означает ковариантную производную по соответствующей криволинейной координате, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — символы Кристоффеля. Также используется специальное обозначение: индекс в круглых скобках пробегает только значения 1 и 2, несколько индексов в одной паре скобок не равны трем одновременно. Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma^{\alpha\beta} \Big|_\beta = 0. \quad (8)$$

Записанные выше уравнения достаточно сложны. Более того, в сколь-нибудь сложных геометриях их решение проблематично даже численными методами. С математической точки зрения здесь получается сингулярно возмущенная краевая задача, что связано с тем, что в реальности высшие упругие модули $v^{\alpha\beta\epsilon\delta\gamma\xi}$ весьма малы. Поэтому в работе [6] был предложен приближенный метод решения этих уравнений, использующий малость высших упругих модулей.

В соответствии с [6] смещения u_α следует представить в виде суммы двух слагаемых \tilde{u}_α и \hat{u}_α , причем \tilde{u}_α нужно подчинить уравнениям классической теории упругости

$$c^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma;\delta;\beta} + f^{\gamma\delta\alpha\beta} P_{\gamma;\delta;\beta} = 0. \quad (9)$$

Слагаемое \tilde{u}_α было названо классической частью смещений, а \hat{u}_α — неклассической.

Далее удастся показать, что в случае достаточно малых высших упругих модулей неклассическая часть

удовлетворяет, в главном приближении, дифференциальным уравнениям

$$c^{\alpha 3\gamma 3} \hat{u}_{\gamma;3,3} - v^{\alpha 3\gamma 333} \hat{u}_{\gamma;3,3,3,3} = 0 \quad (10)$$

и граничным условиям

$$v^{\alpha 3\epsilon 333} \hat{u}_{\epsilon;3,3} \Big|_S = \frac{1}{2} f^{\delta 3\alpha 3} P_\delta \Big|_S, \quad (11)$$

где фигурируют уже не ковариантные, а обычные частные производные по третьей координате. Дополнительно нужно наложить условие, что неклассическая часть смещений \hat{u}_α сосредоточена вблизи поверхности и экспоненциально затухает вглубь тела.

Вообще говоря, $c^{\alpha 3\gamma 3}$ и $v^{\alpha 3\gamma 333}$ являются функциями координат, в том числе функциями x^3 . Однако в тонком приповерхностном слое зависимость от x^3 можно пренебречь, положив $c^{\alpha 3\gamma 3} \approx c^{\alpha 3\gamma 3} \Big|_S$ и аналогично для $v^{\alpha 3\gamma 333}$. При этом (10) оказывается системой трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение такой системы не составляет серьезной проблемы. В общем случае требуется лишь найти обобщенные собственные числа и векторы пары положительно определенных матриц $c^{\alpha 3\gamma 3}$ и $v^{\alpha 3\gamma 333}$.

Классическая часть смещений \tilde{u}_α находится путем решения (9) с граничными условиями к этим уравнениям, полученными в [6]. Эти граничные условия имеют следующий вид:

$$c^{\alpha 3\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma;\delta} \Big|_S = s^\alpha - f^{\gamma\delta\alpha 3} P_{\gamma;\delta} - \frac{1}{2} f^{\delta 3\alpha(\beta)} P_{\delta;(\beta)} + \frac{1}{2} f^{\delta(\gamma)\alpha(\beta)} P_\delta \Gamma_{(\beta)(\gamma)}^3, \quad (12)$$

где

$$s^\alpha = c^{\alpha(\beta)\gamma 3} \hat{u}_{\gamma;(\beta)} - c^{\alpha\beta\gamma\delta} \Gamma_{\delta\beta}^3 \hat{u}_\gamma - c^{\alpha\beta\gamma 3} \Gamma_{\gamma\beta}^\epsilon \hat{u}_\epsilon - h^{\alpha\beta} \hat{u}_{\beta;3,3}, \quad (13)$$

$$h^{\alpha\beta} = v^{\alpha(\gamma)\beta 3(\delta)3} \Gamma_{(\gamma)(\delta)}^3 - v^{\alpha 3\gamma 333} \Gamma_{\gamma 3}^\beta - 2v^{\alpha 3\beta\delta 33} \Gamma_{\delta 3}^3 - v^{\alpha\beta 33\delta 3} \Gamma_{\delta\epsilon}^3. \quad (14)$$

Граничные условия (12) имеют вполне классический вид и соответствуют телу, подверженному действию внешних сил на поверхности. Действительно, в рамках классической теории упругости $c^{\alpha 3\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma;\delta}$ это ничто иное, как напряжения $\tilde{\sigma}^{\alpha 3}$ (тильда означает, что это классические напряжения). Легко показать, что если система криволинейных координат такая, что уравнение поверхности тела имеет вид $x^3 = \text{const}$, то ковариантный вектор нормали к этой поверхности n_α имеет единственную компоненту n_3 . Так что $\tilde{\sigma}^{\alpha 3}$ однозначно определяет $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} n_\beta$, что и есть плотность поверхностных сил. Отметим, что в случае однородной поляризации эти силы возникают только на тех участках поверхности, которые не являются плоскими (для многогранника — на ребрах, которые можно трактовать как предельный

случай искривленного участка поверхности). Кроме того, нужно сказать, что физически никаких внешних сил на поверхности тела нет, это лишь математическое представление, описывающее взаимодействие неклассической и классической частей решения.

3. Однородно поляризованный шар из изотропного материала

В данном разделе приближенным методом, описанным в предыдущем разделе, вычисляются деформации однородно поляризованного шара из изотропного материала. Очевидно, что для шара в качестве системы координат можно взять обычную сферическую координатную систему: $x^1 = \psi$, $x^2 = \theta$, $x^3 = r$, где θ — полярный угол, ψ — азимутальный угол, r — радиальная координата. В этих координатах x^3 — ничто иное как радиус шара R . Поляризация далее предполагается направленной по оси z с абсолютной величиной, равной P .

В тензорных выражениях конкретные значения криволинейных индексов далее обозначаются и как 1, 2, 3, и как ψ , θ , r , не делая различия между этими обозначениями. Так что, к примеру, для вектора u_3 и u_r — это одно и то же. Конкретные значения декартовых индексов далее обозначаются как x, y, z .

Из соотношений между декартовыми и криволинейными координатами $x = r \sin \theta \cos \psi$, $y = r \sin \theta \sin \psi$, $z = r \cos \theta$ прямым дифференцированием легко получить выражения для метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и символов Кристоффеля $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Мы не будем их выписывать в связи с тем, что они нужны лишь в промежуточных выкладках, в итоговые формулы они не входят.

Неклассическая часть смещений находится с помощью уравнений (10) и граничных условий (11). В рассматриваемом случае шара из изотропного материала матрицы $c^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $v^{\alpha\beta\gamma\delta}$ оказываются диагональными, так что \tilde{u}_γ находится практически сразу. Получается следующее:

$$\begin{cases} \tilde{u}_r = \frac{f_{12}+2f_{44}}{2(c_{12}+2c_{44})} P \cos \theta e^{\lambda_r R(\xi-1)}, \\ \tilde{u}_\theta = -R \frac{f_{44}}{2c_{44}} P \sin \theta e^{\lambda_\theta R(\xi-1)}, \\ \tilde{u}_\psi = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где $\xi = r/R$ — нормированная безразмерная координата, c_{ij} и f_{ij} — упругие и флексоэлектрические модули в фойгтовских обозначениях,¹

$$\lambda_\theta = \sqrt{\frac{c_{44}}{v_1 + 2v_2}}, \quad (16)$$

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{c_{12} + 2c_{44}}{9v_1 + 6v_2}}. \quad (17)$$

¹ Отметим, что для флексоэлектрического тензора фойгтовские обозначения могут использоваться лишь в случае, когда симметрия среды не ниже кубической.

$v_{i=1,2}$ — параметры высшей упругости входящие в следующее представление (в декартовых компонентах) тензора высших упругих модулей изотропной среды

$$\begin{aligned} v_{ijklm} = & v_1(\delta_{ij}\delta_{lm}\delta_{nk} + \delta_{ij}\delta_{nl}\delta_{mk} + \delta_{ij}\delta_{nm}\delta_{lk} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} \\ & + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}) \\ & + v_2(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{nm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{nm} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{nk} \\ & + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk}). \end{aligned} \quad (18)$$

При известных символах Кристоффеля, метрическом тензоре и неклассической части решения \tilde{u}_γ для нахождения поверхностных значений $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}$ (граничных условий к классическим уравнениям) нужно лишь воспользоваться явными формулами, приведенными в предыдущем разделе. Несколько громоздкие, но вполне прямые выкладки дают для однородно поляризованного шара следующий результат:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^{33}|_S = \frac{P \cos \theta}{R} \left[\frac{2c_{44}(f_{12}+2f_{44})}{c_{12}+2c_{44}} - 2f_{44} \right], \\ \tilde{\sigma}^{23}|_S = \frac{P \sin \theta}{R^2} \left[\frac{f_{12}}{2} - \frac{c_{12}(f_{12}+2f_{44})}{2(c_{12}+2c_{44})} \right], \\ \tilde{\sigma}^{13}|_S = 0. \end{cases} \quad (19)$$

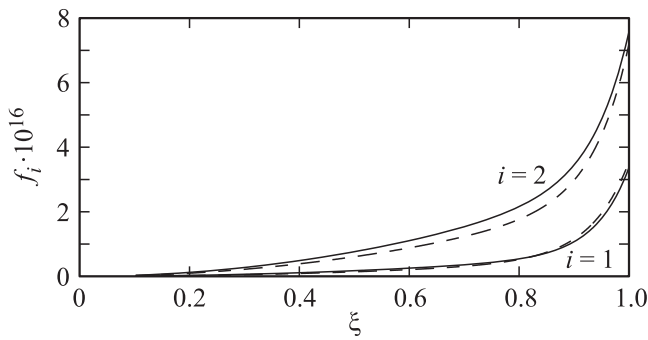
В случае однородной поляризации второе слагаемое в левой части (9) тождественно обращается в ноль. Таким образом, для нахождения \tilde{u}_γ получается граничная задача в шаровой области, состоящая из классических уравнений упругого равновесия $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ и граничных условий к ним (19). Также как и в [5] можно показать, что азимутальная компонента смещений \tilde{u}_ψ и все производные по ψ тождественно обращаются в ноль, а зависимости от полярного угла θ сводятся к синусу и косинусу. Получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных зависимостей, решение которой выражается через элементарные функции. В итоге в терминах функций только лишь радиальной координаты $\tilde{f}_1 = \tilde{u}_r / \cos \theta$ и $\tilde{f}_2 = -\tilde{u}_\theta / (r \sin \theta)$ получается следующее:

$$\tilde{f}_1 = \frac{P(c_{12}f_{44} - c_{44}f_{12})(c_{12} - c_{44})}{c_{44}(c_{12} + 2c_{44})(3c_{12} + 2c_{44})} \xi^2, \quad (20)$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{P(c_{12}f_{44} - c_{44}f_{12})(2c_{12} + 3c_{44})}{c_{44}(c_{12} + 2c_{44})(3c_{12} + 2c_{44})} \xi^2. \quad (21)$$

Для применения в практических целях полезно дополнительно записать \tilde{u}_α в декартовых компонентах и в зависимости от декартовых же координат. Прямые преобразования дают следующий результат:

$$\begin{cases} \tilde{u}_z = a_1 z^2 + a_2(x^2 + y^2), \\ \tilde{u}_y = (a_1 - a_2)yz, \\ \tilde{u}_x = (a_1 - a_2)xz, \end{cases} \quad (22)$$



Сравнение точного решения с приближенным для однородно поляризованного шара из изотропного материала при следующих параметрах: $R = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $P = 1.0$, $c_{44} = 1.1 \cdot 10^{12}$, $c_{12} = 3.4 \cdot 10^{12}$, $f_{44} = f_{12} = 1.0 \cdot 10^{-3}$, $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.1$. Сплошная линия — приближенное решение (настоящая работа), штриховая — точное [5].

где

$$a_1 = \frac{P(c_{12}f_{44} - c_{44}f_{12})(c_{12} - c_{44})}{R^2c_{44}(c_{12} + 2c_{44})(3c_{12} + 2c_{44})}, \quad (23)$$

$$a_2 = \frac{P(c_{12}f_{44} - c_{44}f_{12})(2c_{12} + 3c_{44})}{R^2c_{44}(c_{12} + 2c_{44})(3c_{12} + 2c_{44})}. \quad (24)$$

Важно сравнить полученное здесь решение с точным решением, полученным в [5]. Для этого нужно лишь сложить функции $\hat{f}_{i=1,2}$, определяемые по формулам (20) и (21), с функциями $\hat{f}_1 = \hat{u}_r / \cos \theta$, $\hat{f}_2 = -\hat{u}_\theta / (r \sin \theta)$, где \hat{u}_r определяется с помощью (15). Если предложенная в [6] теория верна, то функции $f_i = \hat{f}_i + \tilde{f}_i$ должны быть близки к f_i из [5].

Сравнение для некоторого набора параметров показано на рисунке. Из рисунка видно, что полученное в данной работе приближенное решение весьма близко к точному. Существенно, что при уменьшении параметров высшей упругости это соответствие становится лучше, а на рисунке приведены графики для неадекватно большой высшей упругости, иначе разница была бы просто не видна. Таким образом, при физически адекватных параметрах приведенные выше приближенные формулы являются вполне применимыми, а теория [6] подтверждается, во всяком случае на этом частном примере.

4. Однородно поляризованный стержень из изотропного материала

Протестировав в предыдущем разделе теорию [6] на частном примере однородно поляризованного шара, в этом разделе мы переходим к применению теории к более актуальному с практической точки зрения случаю: к случаю однородно поляризованного стержня из изотропного материала. Общий порядок вычислений здесь мало чем отличается от случая шара, используются те же самые уравнения.

Флексоэлектрические деформации зависят от поляризации линейно. Поэтому для однородной поляризации

достаточно ограничиться лишь случаями поперечной и продольной поляризации, что и делается далее. При произвольно направленной поляризации деформация будет соответствующей суперпозицией.

Для круглого стержня естественно применить цилиндрическую систему координат: $x^1 = x$, $x^2 = \phi = \arctg(y/z)$, $x^3 = r = \sqrt{y^2 + z^2}$. В таких координатах, делая совершенно прямые выкладки, аналогичные описанным в предыдущем разделе, можно получить следующие выражения для неклассической части упругих смещений вблизи цилиндрической поверхности стержня. Для продольной поляризации

$$\begin{cases} \hat{u}_x = \hat{u}_1 = P \frac{f_{44}}{2c_{44}} e^{\lambda_x R(\xi-1)}, \\ \hat{u}_\phi = \hat{u}_2 = 0, \\ \hat{u}_r = \hat{u}_3 = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Для поперечной поляризации вдоль оси z (в силу аксиальной симметрии стержня достаточно лишь такого случая)

$$\begin{cases} \hat{u}_x = 0, \\ \hat{u}_\phi = -PR \frac{f_{44}}{2c_{44}} \sin \phi e^{\lambda_\phi R(\xi-1)}, \\ \hat{u}_r = P \frac{f_{12} + 2f_{44}}{2(c_{12} + 2c_{44})} \cos \phi e^{\lambda_r R(\xi-1)}. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь, вполне аналогично случаю шара, введена безразмерная радиальная координата $\xi = r/R$, R — радиус стержня. Величины λ_α определяются следующим образом

$$\lambda_x = \lambda_\phi = \sqrt{\frac{c_{44}}{\nu_1 + 2\nu_2}}, \quad (27)$$

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{c_{12} + 2c_{44}}{9\nu_1 + 6\nu_2}}. \quad (28)$$

При вычислении плотности сил, описывающих взаимодействие неклассической и классической частей u_α на цилиндрической поверхности стержня, получается следующее. При продольной поляризации таких сил не возникает вообще. При поперечной поляризации такие силы возникают и определяются формулами

$$\begin{cases} \sigma^{13}|_S = 0, \\ \sigma^{23}|_S = -\frac{P \sin \phi}{R^2} \frac{1}{2} \left[\frac{c_{12}(f_{12} + 2f_{44})}{c_{12} + 2c_{44}} - f_{12} \right], \\ \sigma^{33}|_S = \frac{P \cos \phi}{R} \left[\frac{c_{44}(f_{12} + 2f_{44})}{c_{12} + 2c_{44}} - f_{44} \right]. \end{cases} \quad (29)$$

Заметим, что силы на боковой поверхности поперечно поляризованного стержня лежат в плоскости, перпендикулярной оси стержня, причем их интеграл по углу ϕ равен нулю. Из этого следует, что они не приводят к изгибу стержня. Конечно, такие силы несколько деформируют сечение стержня (на качественном уровне оно подобно деформации шара в меридиональном сечении),

но, поскольку основная деформация — это изгиб стержня, мы опустим соответствующие формулы. Подчеркнем, что хотя силы на цилиндрической поверхности стержня и не приводят к изгибу, этот изгиб все же возникает за счет краевых эффектов на концах стержня.

Поскольку изгиб однородно поляризованного стержня определяется эффектами на его концах, нужно также вычислить силы на поверхностях вблизи этих концов. Теория [6] предполагает гладкую поверхность тела, поэтому нельзя просто ограничить стержень плоскостями. Нужно или слегка сгладить получающиеся при этом острые кромки, используя четверть поверхности тора, или, например, считать, что стержень заканчивается полушариями. Вычисления были проделаны для обоих этих вариантов, причем оказалось, что изгиб при этом одинаков. Мы не будем детально рассматривать эти довольно простые вычисления, отметив лишь, что для случая стержня с полушариями на концах можно применить результаты предыдущего раздела, а в случае слегка сглаженных кромок малый участок тороидальной поверхности можно приближенно считать участком цилиндрической поверхности и, преобразовав координаты, применить формулы, записанные выше в данном разделе.

В результате вычислений получается, что если стержень поляризован продольно, то на его концах не возникает ни изгибающего момента (так и должно быть уже из симметрии), ни суммарной силы, сжимающей или растягивающей стержень. Для поперечно поляризованного стержня не возникает его растяжения или сжатия, но изгибающий момент на конце возникает и определяется формулой

$$M_y = \frac{P\pi R^2(c_{44}f_{12} - c_{12}f_{44})}{c_{12} + 2c_{44}}. \quad (30)$$

Эта формула записана для изгибающего момента на конце стержня, соответствующего положительному направлению оси x , для противоположного конца изгибающий момент имеет противоположный знак.

Таким образом, задача о флексоэлектрическом изгибе однородно поляризованного круглого стержня сводится к стандартной задаче классической теории упругости (см., например, [7]): нахождению изгиба стержня под действием равных по абсолютной величине и противоположных по знаку изгибающих моментов на концах. Формула для этих моментов приведена выше, так что задача тем самым фактически решена.

5. Тонкая круглая пластинка

В этом разделе мы рассматриваем тонкую круглую пластинку с радиусом R и толщиной h , однородно поляризованную нормально к ее плоскости. Для определенности считаем, что средняя поверхность пластинки расположена в плоскости OXY .

Большая часть поверхности пластинки (перпендикулярная z) является плоской, так что на этой части

поверхности сил не возникает, в рамках рассматриваемой теории изгиб пластинки определяется краевыми эффектами. В этом смысле ситуация довольно близка к случаю стержня, рассмотренному выше. Интересуясь в основном изгибом пластинки, мы опускаем формулы для неклассической части смещений, имеющихся вблизи плоских поверхностей.

В данном случае для нахождения классической части деформации можно воспользоваться хорошо известной теорией тонких пластинок [7]. Известно, что смещение средней поверхности пластинки $\xi(x, y)$ удовлетворяет двумерному билапласовому уравнению

$$\Delta\Delta\xi = 0, \quad (31)$$

причем ненулевые компоненты тензора деформаций могут быть выражены через ξ

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -z\xi_{,x,x}; & u_{yy} &= -z\xi_{,y,y}; & u_{xy} &= -z\xi_{,x,y} \\ u_{xz} &= u_{yz} = 0; & u_{zz} &= z \frac{c_{12}}{c_{12} + 2c_{44}} (\xi_{,x,x} + \xi_{,y,y}). \end{aligned} \quad (32)$$

Перейдя к полярным координатам, легко найти регулярное в нуле, аксиально симметричное решение уравнения (31). Оно определяется единственной постоянной интегрирования G , представляющей собой кривизну изгиба пластинки

$$\xi(x, y) = -\frac{Gr^2}{2} = -\frac{G}{2}(x^2 + y^2). \quad (33)$$

Далее совершенно прямыми вычислениями через G выражаются компоненты тензоров деформаций и напряжений.

Как указывалось выше, изгиб пластинки определяется краевыми эффектами. Заметим, что на краю пластинки возникает линейная плотность изгибающего момента M . В силу аксиальной симметрии достаточно посчитать эту плотность изгибающего момента лишь в одной точке, скажем, в точке пересечения оси x с краем пластинки

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx}(z)z dz = \frac{h^3}{6} G \frac{c_{44}(3c_{12} + 2c_{44})}{c_{12} + 2c_{44}}. \quad (34)$$

Ту же самую плотность изгибающего момента можно вычислить и через силы, возникающие за счет флексоэлектрического эффекта на кривых поверхностях на краю пластинки. Здесь, как и для стержня, необходимо сгладить острые кромки, что было сделано в двух вариантах: замена каждой острой кромки четвертью тороидальной поверхности и замена всего края пластинки на половину тора. В обоих вариантах получено одно и то же выражение

$$M = \frac{Ph(c_{44}f_{12} - c_{12}f_{44})}{c_{12} + 2c_{44}}. \quad (35)$$

Остается лишь приравнять два выражения для M и выразить кривизну изгиба пластинки через поляризацию P

$$G = \frac{6P(c_{44}f_{12} - c_{12}f_{44})}{h^2c_{44}(3c_{12} + 2c_{44})}. \quad (36)$$

Интересно сравнить формулу (36) с результатом, полученным в [3] прямой минимизацией энергии пластинки. Элементарными преобразованиями формулы из [3] приводятся к виду, отличающемуся от (36) лишь тем, что в числителе вместо 6 оказывается 12. Однако следует иметь в виду, что в [3] рассматривался случай, когда в тонком приповерхностном слое вблизи плоской поверхности пластинки поляризация падает до нуля. Если расчеты [3] модифицировать для случая, когда поляризация строго однородна по толщине пластинки, что и соответствует вычислениям, представленным здесь, то получается в точности формула (36).

Таким образом, в двух разных случаях поведения поляризации в непосредственной близости от поверхности пластинки для флексоэлектрического изгиба получаются два разных результата: кривизна пластинки отличается ровно в два раза. Может показаться, что это противоречит требованию обратимости флексоэлектрического эффекта, вытекающему из общих принципов термодинамики. Однако аккуратный анализ электрического отклика пластинки на ее изгиб показывает, что для прямого флексоэлектрического эффекта также возникает отличие в два раза в зависимости от того, какие граничные условия наложены на поляризацию. Так что нарушения общих принципов термодинамики нет. Детальное обсуждение этого вопроса составляет предмет отдельной статьи, которая будет опубликована позднее.

6. Заключение

В данной работе рассмотрено применение приближенной теории флексоэлектрических деформаций конечных тел, развитой в [6] к трем частным случаям: однородно поляризованному шару, круглому стержню и круглой пластинке.

Случай шара интересен в основном тем, что для него имеется точное (в рамках теории сплошной среды) решение [5]. Поэтому можно сравнить приближенное решение по предложенному методу с точным решением. Такое сравнение показало адекватность приближенного метода, причем даже для весьма больших параметров пространственной дисперсии упругих модулей. При меньшей пространственной дисперсии, что, по видимому, более адекватно реальной ситуации, точность приближения становится еще выше, так что в реальных условиях предложенная теория вполне применима в практических целях.

Случаи стержня и пластинки интересны с практической точки зрения. Здесь получены простые алгебраические формулы, описывающие их флексоэлектрический изгиб. Интересно при этом отметить, что в случае

однородной поляризации, как оказалось, этот изгиб полностью определяется краевыми эффектами на концах стержня или на краю пластинки. Теория требует гладкой поверхности, так что при расчете острые кромки на краях пришлось сгладить. Во всяком случае для рассмотренных вариантов такого сглаживания оказалось, что результат не зависит от того, как именно делается это сглаживание.

Интересно также отметить, что во всех рассмотренных случаях параметры высшей упругости не вошли в выражения для классической части деформации, они сократились. Насколько это общее явление сказать пока затруднительно.

Автор благодарит А.К. Таганцева за критику, способствовавшую значительному улучшению текста статьи.

Список литературы

- [1] P.V. Yudin, A.K. Tagantsev. *Nanotechnology* **24**, 432 001 (2013).
- [2] P. Zubko, G. Catalan, A.K. Tagantsev. *Ann. Rev. Mater. Res.* **43**, 387 (2013).
- [3] A.K. Tagantsev, A.S. Yurkov. *J. Appl. Phys.* **112**, 044 103 (2012).
- [4] А.С. Юрков. Письма в ЖЭТФ **94**, 490 (2011).
- [5] A.S. Yurkov. arXiv:1304.1868 (2013).
- [6] A.S. Yurkov. Pis'ma v ZhETF **99**, 241 (2014); arXiv:1305.3874v3 (2013).
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Курс теоретической физики. Т. 7. Физматлит, М. (2001).