01;03;06

К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц

© *Б.В. Бошенятов* [1,2]

[1] Институт прикладной механики РАН, Москва
[2] Национальный исследовательский Томский государственный университет
E-mail:bosbosh@mail.ru

Поступило в Редакцию 4 августа 2014 г.

Получена аналитическая зависимость коэффициентов переноса (теплопроводности, электропроводности, статических магнитной и электрической проницаемости) в монодисперсной суспензии сферических частиц от их концентрации с учетом дистанционного взаимодействия частиц, при произвольном соотношении коэффициентов переноса дисперсных частиц и дисперсионной жидкости. Сравнение с экспериментами и численными расчетами других авторов для частного случая, когда электропроводность дисперсных частиц много больше электропроводности дисперсионной жидкости, показало, что формула пригодна в диапазоне объемных концентраций дисперсных частиц от нуля до 0.55.

Гетерогенные дисперсные среды (туманы, пузырьковые среды, суспензии, эмульсии, композиты и др.) широко распространены в природных явлениях и технологических процессах многих отраслей промышленности. В ряде случаев такие среды можно рассматривать как однородные и изотропные, характеризуя их эффективными физическими параметрами, усредненными по объему Ω, существенно большему масштаба структурных неоднородностей [1]. Задача о вычислении эффективных параметров дисперсных сред при повышенных концентрациях дисперсных частиц, когда необходимо учитывать их влияние друг на друга, является сложной математической проблемой [2–6]. Поскольку электропроводность, теплопроводность, статические магнитная и диэлектрическая проницаемость сред описываются идентичными уравнениями и граничными условиями, то, имея решение любой из перечисленных выше задач, решение остальных получается простой заменой буквенных обозначений соответствующих физических величин [3].

Рассмотрим задачу об электропроводности статистически однородной двухкомпонентной дисперсной среды, состоящей из однородной неограниченной дисперсионной жидкости (матрицы) с электропроводностью σ_1, в которой хаотично расположены однородные сферические частицы радиусом a, имеющие электропроводность σ_2. И далее нижний индекс 1 относится к параметрам дисперсионной жидкости, а индекс 2 — к параметрам дисперсных частиц. На дисперсную среду наложено внешнее однородное электрическое поле. Из определения эффективного значения коэффициента электропроводности σ^* [1] имеем

$$\langle \mathbf{j} \rangle = -\sigma^* \langle \nabla \varphi \rangle, \quad \langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \mathbf{j}_i \, d\Omega,$$

$$\mathbf{j}_i = -\sigma_i \nabla \varphi_i, \quad \langle \nabla \varphi \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \nabla \varphi_i \, d\Omega, \tag{1}$$

где $\mathbf{j}_i$ — поток электричества в i-компоненте дисперсной среды, φ_i — потенциал электрического поля в i-компоненте, $i = 1, 2$. После соответствующих усреднений из соотношений (1) следует [3]

$$\langle \nabla \varphi \rangle = \langle \nabla \varphi_1 \rangle (1 - c) + \langle \nabla \varphi_2 \rangle c \tag{2}$$

и формула для определения σ^*

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} \langle \nabla \varphi \rangle = \langle \nabla \varphi \rangle + \langle \nabla \varphi_2 \rangle (\alpha - 1) c, \tag{3}$$

где $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$, c — объемная концентрация дисперсных частиц.

В проекции на направление внешнего электрического поля формулы (2) и (3) будут иметь вид

$$\langle E \rangle = (1 - c) E_1 + c E_2, \tag{4}$$

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = 1 + \frac{E_2}{\langle E \rangle} (\alpha - 1) c. \tag{5}$$

В формулах (4) и (5) E_1 — среднее поле в дисперсионной жидкости (матрице), E_2 — среднее поле в дисперсной частице. Отметим, что соотношение (4) играет важнейшую роль при вычислении эффективных параметров дисперсной среды, при повышенных концентрациях дисперсных частиц. Так, в работе [7] показано, что поле E_1 в плохо проводящей матрице может значительно превосходить внешнее приложенное поле, а именно это „локальное поле“ E_1 действует на дисперсную частицу и определяет величину поля внутри нее. Поэтому при вычислении эффективного коэффициента электропроводности для дисперсной среды, чтобы учесть влияние геометрического фактора, связанного с уменьшением относительного объема дисперсионной жидкости с повышением концентрации c, вначале необходимо вычислить соотношение полей E_1 и E_2, после чего, используя формулы (4) и (5), определять σ^*.

Найдем выражение для эффективного коэффициента электропроводности σ^* при условии, что влиянием электрических полей дисперсных частиц друг на друга можно пренебречь. Тогда соотношение полей E_1 и E_2 находим из точного решения для одиночной сферы, находящейся в электрическом поле E_1 [1]:

$$E_2 = \frac{3}{\alpha + 2} E_1. \tag{6}$$

Используя (6), из формул (4) и (5) получим знаменитую формулу Максвелла [2], которую в контексте диэлектрической проницаемости называют формулой Клаузиуса–Моссоти (Clausius–Mossotti) [4]:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = 1 + \frac{3\beta c}{1 - \beta c}, \tag{7}$$

где $\beta = (\alpha - 1)/(\alpha + 2)$. При $c \ll 1$ из (7) следует формула для σ^* в приближении $O(c^2)$:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = 1 + 3\beta c. \tag{8}$$

Таким образом, формула (7) математически обоснована для любых концентраций дисперсных сферических частиц, но является приближенной, так как не учитывает эффектов взаимного влияния электрических полей дисперсных частиц.

Аналитическую зависимость для вычисления эффективного коэффициента электропроводности дисперсной среды с учетом взаимодействия частиц получим, используя метод физической аналогии. В работе [4] доказана аналогия задач гидродинамики и электростатики для двухфазных дисперсных сред. Найдем условия соответствия данной физической аналогии.

Дело в том, что потенциальные течения идеальной жидкости, как и потенциал электрического поля, описываются уравнением Лапласа и аналогичным условием на бесконечности (при $\mathbf{r} \to \infty$, $\varphi \to 0$), но условие на границе сред отличается. Вместо $\sigma_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = \sigma_2 \frac{d\varphi_2}{dn}$ в гидродинамике мы имеем $\frac{d\varphi_1}{dn} = \frac{d\varphi_2}{dn}$, где φ — потенциал скорости, n — нормаль к поверхности раздела сред. Таким образом, в гидродинамической задаче параметр ρ (плотность), эквивалентный параметру σ в задаче об электропроводности, отсутствует и в уравнении Лапласа, и в граничных условиях, а содержится в уравнении движения. Поэтому условия соответствия для данной физической аналогии находим из сравнения точных решений: (6) для электростатической задачи и соответствующего решения гидродинамической задачи о движении одиночной сферы в однородном внешнем поле скорости [8] $v_2 = \frac{3}{1+2\gamma} v_1$:

$$v_1 \Rightarrow E_1, \quad v_2 \Rightarrow E_2, \quad \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1} \Rightarrow \frac{\alpha + 1}{2}. \tag{9}$$

Таким образом, условия соответствия для дисперсных сред, в которых взаимодействием частиц можно пренебречь, строго доказаны. По-видимому, эти условия справедливы и для случая взаимодействующих частиц. Ответ на этот вопрос может дать сравнение полученных теоретических выводов с экспериментом.

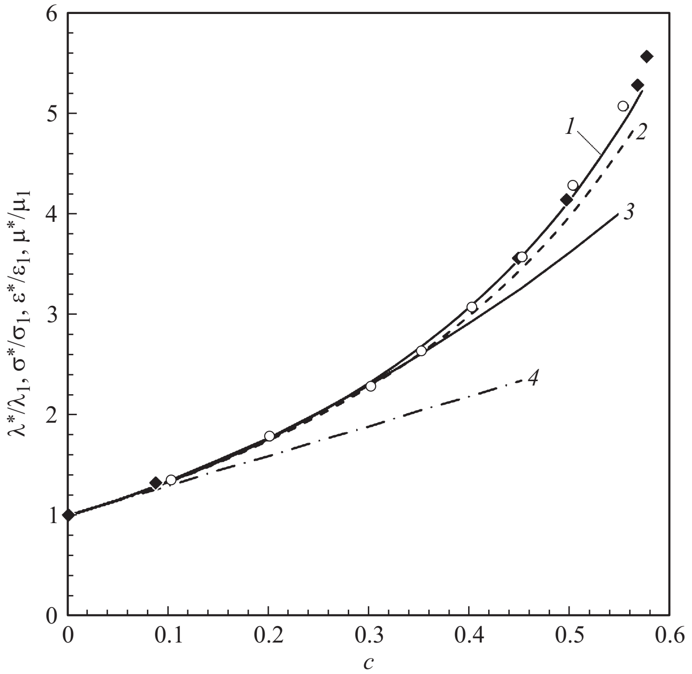
В аналитическом виде решение задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке идеальной жидкости, для произвольного соотношения плотностей компонентов дисперсной среды и с учетом взаимодействия дисперсных сферических частиц было получено в работе [6]. Используя это решение, легко найти

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{1+2\gamma}\left[1 + k(\gamma)c\right],$$

$$k(\gamma) = -\frac{7}{72}\left(\frac{1-\gamma}{1+2\gamma}\right) + \frac{1415}{5632}\left(\frac{1-\gamma}{1+2\gamma}\right)^2 - \frac{5}{2112}\left(\frac{1-\gamma}{1+2\gamma}\right)^3. \tag{10}$$

Подставляя в (10) формулы соответствия (9) для физической аналогии, получим

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{3}{\alpha+2}\left[1 + k(\beta)c\right], \; k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3. \tag{11}$$



Зависимость относительных коэффициентов переноса от объемной концентрации сферических дисперсных частиц при $\alpha \gg 1$ $(\beta = 1)$. Темные точки — эксперименты, светлые точки — результаты численного моделирования [8]; *1* — аналитическая зависимость (11) с учетом взаимодействий; *2* — формула Максвелла (7) без учета взаимодействий, *3* — теоретические и расчетные результаты работы [1] с учетом взаимодействия частиц в приближении $O(c^3)$ и работы [2]; *4* — линейное приближение (8).

Используя (11) и формулы (4) и (5), получим искомую аналитическую зависимость для расчета эффективного коэффициента электропроводности дисперсной среды, которая учитывает взаимодействие дисперсных частиц:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_1} = 1 + 3\beta c(1 + kc)\left[1 - \left(1 - \frac{3kc}{\alpha - 1}\right)\beta c\right]^{-1}. \qquad (12)$$

При $kc \ll 1$, как и следовало ожидать, формула (11) совпадает с формулой Максвелла (7), при $\alpha = 1$ $(\sigma_1 = \sigma_2)$ имеем $\sigma^* = \sigma_1$.

На рисунке приведена (сплошная линия *1*) расчетная по формуле (12) зависимость относительных коэффициентов переноса для суспензии из сферических частиц при значениях $\alpha \gg 1$ ($\beta = 1$, $k = 0.1117$). Там же даны результаты экспериментов (черные точки) МкКензи (D.R. McKenzie) и др., а также результаты численного моделирования (светлые точки) Уайта (Whites K.W.) [5], которые практически совпадают с численными расчетами и экспериментами МкКензи. Кроме того, на рисунке приведены: расчет по формуле Максвелла (7), которая не учитывает взаимодействия частиц (пунктирная линия *2*), и результаты теоретических расчетов (сплошная линия *3*), приведенных в работах [2,4], которые практически совпадают друг с другом. Штрихпунктирной линией *4* показано линейное приближение (5), которое дает надежный результат лишь при значениях $c < 0.1$. Из рисунка видно, что наилучшее совпадение с экспериментом и компьютерным моделированием дает полученная аналитическая зависимость (12). При этом наибольшее отклонение от эксперимента (при значении $c = 0.55$) составляет 3%. Учет взаимодействия частиц при концентрациях $c < 0.3$ не улучшает результат приближенной формулы Максвелла (7), которая в диапазоне концентраций $0 < c < 0.3$ практически совпадает с экспериментом, а при концентрациях $0.3 < c < 0.55$ дает погрешность не более 10%.

Таким образом, сравнение с экспериментом позволило установить границы применимости различных теоретических моделей, используемых ранее для определения коэффициентов переноса в плотных дисперсных средах. Показано, что наилучшее совпадение с экспериментом дают предложенная автором аналитическая зависимость (12), которая учитывает взаимодействие дисперсных частиц, и приближение Клаузиуса–Моссоти или формула Максвелла (7), полученная без учета взаимодействия.

Работа выполнена при частичной поддержке в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 620 с. [*Landau L.D, Lifshitz E.M.* Electrodynamics of continuous media. V. 8. / Pergamon Press, 1960].

[2] *Jeffrey D.J.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1973. V. 335. P. 355.
[3] *Дульнев Г.Н., Новиков В.В.* Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. 248 с.
[4] *Felderhof B.U.* // J. Fluid. Mech. 1991. V. 225. P. 177.
[5] *Whites K.W.* // J. Appl. Phys. 2000. V. 88. N 4. P. 1962.
[6] *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* // Докл. РАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 626. [*Guskov O.B., Boshenyatov B.V.* // Doclady Physics. 2011. V. 56. N 6. P. 352].
[7] *Корнюшин Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. В. 9. С. 50–53.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебн. пособие. В. 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с. [*Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. V. 6. Pergamon Press, 1959. 551 p.]