01.3

Исследование пространственно-распределенных систем вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на граничных временны́х масштабах наблюдения

© *М.О. Журавлев* [1,2,3], *Г.В. Осипов* [3], *А.О. Сельский* [1,2]

[1] Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
[2] Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
[3] Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail:zhuravlevmo@gmail.com

Поступило в Редакцию 26 сентября 2014 г.

На примере однонаправленно связанных диодов Пирса рассмотрено поведение пространственно-распределенных систем вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временны́х масштабах. Показано, что в этом случае возможно одновременное существование двух типов перемежающегося поведения. Результаты численного моделирования сопоставлены с теоретическими зависимостями, получено хорошее соответствие между ними.

В настоящее время установлено, что перемежающееся поведение характерно для широкого круга нелинейных систем [1]. В частности, данный тип поведения наблюдается при переходе от периодических колебаний к хаотическим, а также вблизи границ возникновения различных типов хаотической синхронизации неавтономных и связанных осцилляторов.

Для перемежающегося поведения существует определенная классификация, в частности, выделяют перемежаемость типов I–III [1], on-off-перемежаемость [2], перемежаемость игольного ушка [3], перемежаемость кольца [4]. Несмотря на то что все типы перемежающегося поведения имеют некоторое сходство между собой (наличие во временно́м ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), каждый тип перемежающегося поведения обладает своими собственными статистическими характеристиками (зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров). При этом механизмы, которые приводят к возникновению перемежающегося поведения, для каждого из типов перемежаемости оказываются различными.

Необходимо отметить, что в ходе недавно проведенных исследований [5,6] было показано, что нелинейные динамические системы способны находиться в режиме, когда в них одновременно существуют два различных типа перемежаемости. Данный тип поведения получил название „перемежаемости перемежаемостей". Возникает он в результате того, что в исследуемой системе сосуществуют два различных механизма, приводящие к возникновению турбулентных участков поведения системы, в результате чего в системе одновременно существуют два различных типа перемежаемости. Стоит отметить, что проведенные ранее исследования данного типа поведения были сделаны для нелинейных систем с малым числом степеней свободы. В связи с этим возникает вопрос, возможно ли существование „перемежаемости перемежаемостей" в пространственно-распределенных системах и будет ли корректно описывать такое поведение пространственно-распределенных систем теоретическая модель, разработанная для систем с малым числом степеней свободы.

В данной работе на примере системы двух однонаправленно связанных диодов Пирса рассматривается одновременное сосуществование двух типов перемежаемости в пространственно-распределенных системах: премежаемость игольного ушка, которую можно наблюдать вблизи границы фазовой хаотической синхронизации, и перемежаемость кольца, которая наблюдается в определенном диапазоне временны́х масштабов. Основные уравнения, описывающие динамику системы двух однонаправленно связанных диодов Пирса в рамках гидродинамического приближения описываются самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и уравнения Пуассона [7,8]:

$$\frac{\partial v^{1,2}}{\partial t} = v^{1,2}\frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^{1,2}}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho^{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho^{1,2}v^{1,2})}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{1,2}}{\partial x^2} = -\alpha_{1,2}^2(\rho^{1,2} - 1) \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\nu^{1,2}(0,t) = 1, \quad \rho^{1,2}(0,t) = 1, \quad \varphi^{1,2}(0,t) = 0, \tag{4}$$

где φ — безразмерный потенциал поля пространственного заряда, ρ — безразмерная плотность заряда, ν — безразмерная плотность потока, x — безразмерная координата и t — безразмерное время. Индексы 1 и 2 отвечают первой (ведущей) и второй (ведомой) пучково-плазменным системам соответственно. Единственным управляющим параметром, характеризующим динамику системы, является параметр Пирса α — невозмущенный угол пролета электронов по плазменной частоте. Для ведущей системы выберем его равным $\alpha_1 = 2.858\pi$, для ведомой системы положим $\alpha_2 = 2.860\pi$, чтобы задать расстройку между взаимодействующими системами.

Однонаправленная связь между системами осуществляется с помощью изменения значения безразмерного потенциала на правой границе ведомой системы, в то время как потенциал на правой границе ведущей системы остается неизменным:

$$\begin{cases} \varphi^1(1,t) = 0, \\ \varphi^2(1,t) = \varepsilon\big(\rho^2(x=1,t) - \rho^1(x=1,t)\big), \end{cases} \tag{5}$$

здесь ε — коэффициент связи между системами; $\rho^{1,2}(x=1,t)$ — колебания безразмерной плотности пространственного заряда, регистрируемые на выходе каждой из систем. Таким образом, ведущая система находится в режиме автономных колебаний, воздействуя на ведомую систему.

Необходимо отметить, что исследование поведения системы двух однонаправленно связанных диодов Пирса проводилось на различных временны́х масштабах [9,10]. В этом случае вводится в рассмотрение непрерывное множество фаз исследуемых сигналов с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s,t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^*\left(\frac{t-t_0}{s}\right) dt, \tag{6}$$

где $x(t)$ — временна́я реализация хаотического сигнала; $\psi_{s,t_0}(t)$ — материнский вейвлет; s — временно́й масштаб, определяющий ширину вейвлета; символ $*$ обозначает комплексное сопряжение. В качестве сигнала $x(t)$ для исследуемых диодов Пирса будем использовать плотности пространственного заряда $\rho_{1,2}$ взаимодействующих систем, снятые в конкретной точке $x = 0.2$ пространства взаимодействия.

В качестве материнского вейвлета целесообразно использовать комплексный вейвлет Морле

$$\psi(\eta) = (1/\sqrt[4]{\pi})\exp(j\Omega_0\eta)\exp(-\eta^2/2) \tag{7}$$

с параметром $\Omega_0 = 2\pi$, что обеспечивает однозначную взаимосвязь между временны́м масштабом s вейвлетного преобразования и частотой f фурье-преобразования, а именно $f = 1/s$. Использование комплексного вейвлетного базиса позволяет ассоциировать каждый временно́й масштаб с фазой $\varphi(s,t) = \arg W(s,t)$, где $W(s,t)$ — комплексная вейвлетная поверхность, определяемая соотношением (6).

Считается, что две связанные хаотические системы $\mathbf{x}_{1,2}(t)$ находятся в режиме синхронизации временны́х масштабов, если существует диапазон синхронных временны́х масштабов $s \in [s_1; s_2]$, для которого выполняется условие захвата фаз

$$|\varphi_1(s,t) - \varphi_2(s,t)| < 2\pi, \tag{8}$$

и доля энергии вейвлетного спектра, падающая на этот диапазон, оказывается положительной

$$E_{snhr} = \int_{s_1}^{s_2} \langle |W(s,t)|^2 \rangle ds > 0. \tag{9}$$

Как и для систем с малым числом степеней свободы, для пространственно-распределенных сред при определенных значениях управляющих параметров можно диагностировать режим синхронизации временны́х масштабов. При этом в данной системе будут существовать как синхронные, так и асинхронные временны́е масштабы, для которых не выполняются условия (8) и (9). Для того чтобы в исследуемой системе можно было диагностировать синхронизацию временны́х масштабов, данная система должна находиться в режиме фазовой хаотической

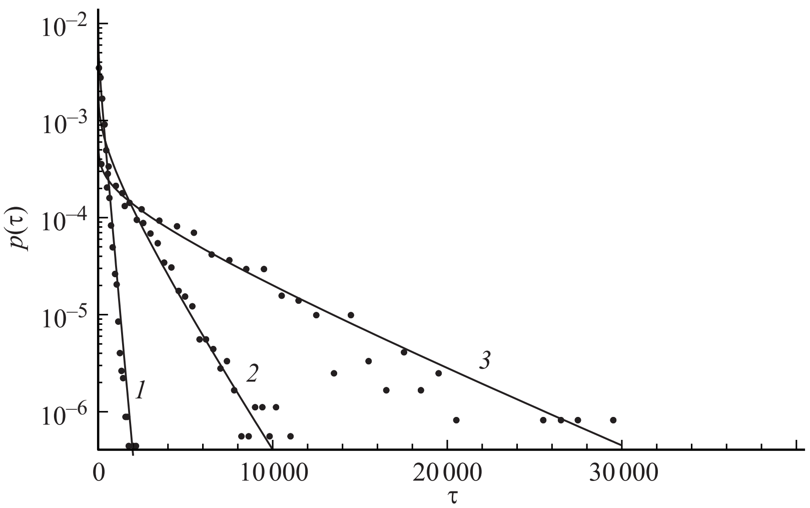

Рис. 1. Распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров для режима одновременного существования перемежаемости игольного ушка и перемежаемости кольца для системы двух однонаправленно связанных диодов Пирса (1)–(3) и аналитические зависимости (10), соответствующие этим распределениям. Ось ординат показана в логарифмическом масштабе. Кривая *1* — $\varepsilon = 0.006$, $s = 2.7225$, $T_e = 2976$, $T_r = 250$; кривая *2* — $\varepsilon = 0.006$, $s = 2.73$, $T_e = 2976$, $T_r = 3125$; кривая *3* — $\varepsilon = 0.007$, $s = 2.7325$, $T_e = 20920$, $T_r = 8474$.

синхронизации, аналогично тому, как это было сделано в работах [5,6]. В режиме фазовой синхронизации на граничных временны́х масштабах наблюдения имеет место перемежающееся поведение. Исследуем характеристики этого типа перемежаемости в пространственно-распределенных системах.

Распределения длительности ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров, полученные численно для системы двух однонаправленно связанных диодов Пирса, находящихся в режиме одновременного существования перемежаемости игольного ушка и перемежаемости кольца, приведены на рис. 1 для трех различных наборов значений коэффициента связи ε и временно́го масштаба s, на котором осуществлялось наблюдение. Поскольку механизмы, приводящие к перемежаемости кольца и перемежаемости игольного ушка, различаются, то можно разделить проскоки фазы, относящиеся к одному и другому типам перемежающегося поведения, после чего можно оценить значения T_e и T_r (значения средней длительности участка ламинарного поведения для перемежаемости типа игольного ушка T_e и для перемежаемости кольца T_r), входящих в теоретическое соотношение для распределения длительности ламинарных фаз при перемежаемости перемежаемостей, полученное ранее [5]:

$$p(\tau) = \frac{\exp(-\tau/T_e)}{(T_e + T_r)}\left(1-\frac{\tau}{T_e}\right)\Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) + \frac{T_e^2 + T_r^2}{T_e T_r (T_e+T_r)}\exp\left(-\frac{\tau}{T_e}-\frac{\tau}{T_r}\right)$$
$$+ \frac{\exp(-\tau/T_r)}{(T_e + T_r)}\left(1-\frac{\tau}{T_r}\right)\Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right). \quad (10)$$

Из рис. 1 отчетливо видно, что численно полученные распределения длительности участков ламинарного поведения хорошо соотносятся с теоретической зависимостью (10), что позволяет говорить о наличии в системе „перемежаемости перемежаемостей".

Еще одним из неоспоримых доказательств наличия „перемежаемости перемежаемостей" в системе двух однонаправленно связанных диодов Пирса является рассмотрение динамики систем на вращающейся плоскости, аналогично тому, как это было сделано в работах [5,6]. Данный подход заключается в том, что переменные (в данном случае $x_{1,2} = \operatorname{Re} W_{1,2}(s,t)$ и $y_{1,2} = \operatorname{Im} W_{1,2}(s,t)$) рассматриваются на плоскости, вращающейся вокруг начала координат [4]:

$$\begin{aligned} x' &= x_2\cos\varphi_1 + y_2\sin\varphi_1, \\ y' &= -x_2\sin\varphi_1 + y_2\cos\varphi_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Рис. 2 иллюстрирует поведение взаимодействующих диодов Пирса на вращающейся плоскости (11). Из рисунка видно, что можно выделить области значений параметра связи ε и временны́х масштабов, где наблюдается либо перемежаемость игольного ушка (рис. 2, b), либо перемежаемость кольца (рис. 2, c). Существуют также области значений параметра связи и временны́х масштабов, для которых оба данных явления наблюдаются одновременно (рис. 2, d). Это означает, что перемежаемость игольного ушка прерывается перемежаемостью кольца, и наоборот. Таким образом, поведение фазовой траектории также говорит

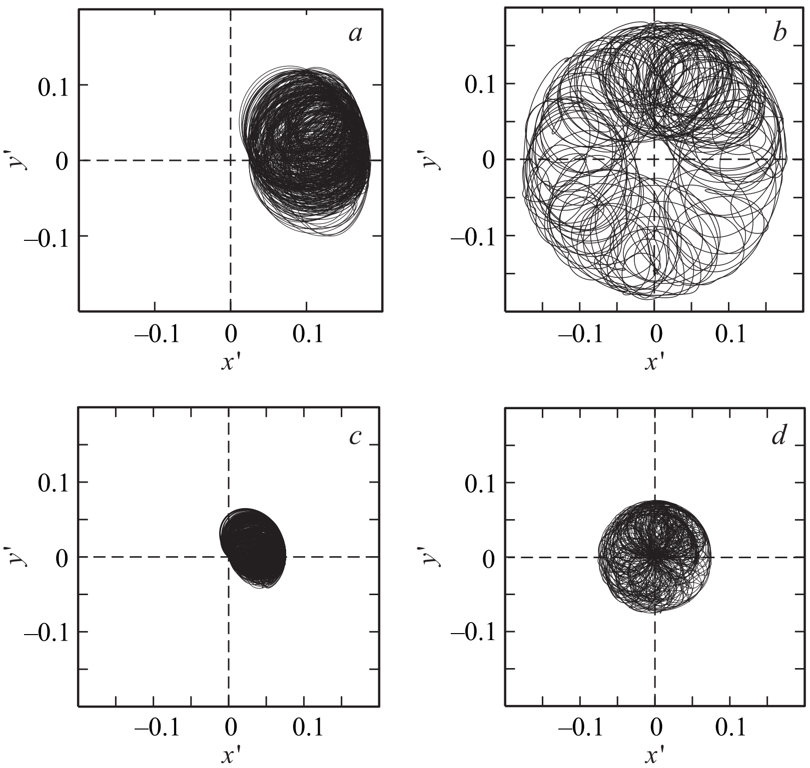

Рис. 2. Фазовая траектория ведомой системы на плоскости (x', y'), вращающейся вокруг начала координат: a — $\varepsilon = 0.02$, $s = 4.71875$ — синхронный режим; b — $\varepsilon = 0.007$, $s = 4.71875$ — перемежаемость игольного ушка; c — $\varepsilon = 0.02$, $s = 2.71875$ — перемежаемость кольца; d — $\varepsilon = 0.007$, $s = 2.71875$ — сосуществование двух типов перемежающегося поведения.

о том, что в исследуемой пространственно-распределенной системе наблюдается одновременное существование двух типов перемежаемости. В этом режиме фазовая траектория на плоскости (x', y') вращается вокруг начала координат (что является проявлением перемежаемости игольного ушка) и время от времени охватывает начало координат, что свидетельствует о наличии перемежаемости кольца.

Работа поддержана грантом (соглашение от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ); Министерством образования и науки РФ (задание 3.23.2014К); РНФ (грант № 14-12-00811), фондом некоммерческих программ „Династия“.

Список литературы

[1] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253 с.
[2] *Boccaletti S., Valladares D.L.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62(5). P. 7497–7500.
[3] *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 79(1). P. 47–50.
[4] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 114 101.
[5] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Zhuravlev M.O., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // CHAOS. 2013. V. 23(3). P. 033 129.
[6] *Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 14. Р. 1–7.
[7] *Aranson I.S., Kramer L.* // Rev. Modern Physics. 2002. V. 74. P. 99–143.
[8] *Kocarev L., Tasev Z., Parlitz U.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79(1). P. 51–54.
[9] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Chaos. 2004. V. 14(3). P. 603–610.
[10] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Physica. D. 2005. V. 206(3-4). P. 252–264.