

01

## Аналитическое решение уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля с использованием зеркально-диффузной модели взаимодействия молекул газа со стенками канала

© С.В. Гулакова, В.Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,  
163002 Архангельск, Россия  
e-mail: v.popov@narfu.ru

(Поступило в Редакцию 22 января 2014 г. В окончательной редакции 9 июля 2014 г.)

В рамках кинетического подхода построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля. В качестве граничного условия на стенках канала используется модель зеркально-диффузного отражения. С учетом построенной функции распределения для различных значений толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала вычислен расход массы, приходящийся на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными численными методами. Выполнен анализ полученных результатов при переходе к гидродинамическому и близким к гидродинамическому режимам течения газа.

### Введение

Строгое теоретическое решение задач в промежуточной области динамики разреженного газа, когда неприменимы концепции континуума Навье–Стокса или свободномолекулярного течения, должно получаться в результате интегрирования уравнения Больцмана (или системы уравнений Больцмана, если газ состоит из молекул разной природы) при соответствующих граничных и начальных условиях. После того как найдена функция распределения, с помощью квадратур определяются любые макроскопические параметры газа (скорость, температура, давление, тепловой поток и т.д.) [1]. В силу сложности уравнения Больцмана описанная выше процедура в полном объеме может быть реализована лишь с использованием методов прямого численного моделирования, что требует больших затрат как оперативной памяти, так и процессорного времени [2]. В связи с этим особый интерес представляет собой развитие и применение к решению задач промежуточной области динамики разреженного газа строгих аналитических методов в рамках модельных кинетических уравнений. Модельные кинетические уравнения достаточно широко используются для решения граничных задач кинетической теории газов [3]. При этом в большинстве работ используются уравнения с постоянной частотой столкновений. Однако предположение о независимости частоты столкновений молекул газа от их скорости представляет собой достаточно сильное упрощение. Более реалистичным является предположение о постоянстве длины свободного пробега молекул газа, по крайней мере, для молекул, взаимодействие которых между собой можно аппроксимировать моделью твердых сфер. Это предположение эквивалентно тому, что частота столкновений молекул должна быть пропорциональна абсолютной величине (модулю) их тепловой скорости. Последнее предположение приводит

к следующей коррекции БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели кинетического уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f).$$

Здесь  $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$ ,  $\mathbf{v}$  — скорость молекул газа,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$  — массовая скорость газа,  $\mathbf{r}'$  — размерный радиус-вектор,  $l_g = \eta_g \beta^{-1/2} / p$  — средняя длина свободного пробега молекул газа,  $p$  и  $\eta_g$  — давление и коэффициент динамической вязкости газа,  $\beta = m / 2k_B T$ ,  $T$  — температура газа,  $m$  — масса молекулы газа,  $k_B$  — постоянная Больцмана,

$$f_* = n_* \left( \frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

Все основные свойства интеграла столкновений Больцмана при такой коррекции сохраняются, однако величины  $n_*$ ,  $\mathbf{u}_*$  и  $T_*$ , входящие в  $f_*$ , уже не локальные плотность, температура и скорость, а некоторые параметры, которые выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [3]. Полученное в результате такой коррекции модельное уравнение называется БГК-моделью кинетического уравнения Больцмана с частотой столкновений, зависящей от скорости, или модельным уравнением Вильямса. Значение  $\gamma = 15\sqrt{\pi}/16$  в построенном уравнении выбирается исходя из того, что полученные на его основе результаты при переходе к гидродинамическому пределу должны переходить в соответствующие результаты классической гидродинамики. Основным недостатком уравнения Вильямса заключается в том, что оно приводит к значению числа Прандтля  $\text{Pr} = 8/9$ , что отличается от аналогичного значения  $\text{Pr} = 2/3$ , получаемого как из самого уравнения Больцмана, так и из эксперимента для одноатомных газов. В то же время, оно несколько ближе к реальному

значению по сравнению со значением  $\text{Pr} = 1$ , к которому приводит БГК-модель с постоянной частотой столкновений. Цель представленной работы состоит в построении с использованием уравнения Вильямса аналитического решения задачи о течении Пуазейля — установившегося течения газа в канале с параллельными стенками под действием малого перепада давления. С использованием аналитических методов эта задача решена в [4,5] на основе ЭС (эллипсоидально-статистической) модели кинетического уравнения Больцмана. При этом в качестве граничного условия на стенках канала в [4] использовалась модель почти зеркального отражения, а в [5] — диффузного. Следует заметить, что использованные в [4,5] модели граничных условий являются излишне идеализированными. Почти зеркальные граничные условия в кинетической теории разреженного газа практически не реализуются. В то же время для легких газов, таких, как гелий и неон, коэффициент аккомодации тангенциального импульса может существенно отличаться от единицы. Кроме того, на значение коэффициента аккомодации тангенциального импульса существенное влияние оказывает степень обработки поверхности стенок канала: для загрязненной поверхности коэффициент аккомодации тангенциального импульса больше, чем в случае специально обработанной, например путем химической очистки поверхности [6]. В представленной работе в качестве граничного условия на стенках канала используется более общая, по сравнению с [4,5], модель зеркально-диффузного отражения. В качестве приложения для различных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса построен профиль массовой скорости газа в канале и вычислен расход массы газа, приходящийся на единицу ширины канала. Полученные результаты сравниваются с аналогичными результатами, полученными в [7–9] методом дискретных ординат с использованием БГК-модели кинетического уравнения Больцмана [7], модели Шахова [8], модели с комбинированным ядром [8], а также линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер [9].

## Вывод основных уравнений. Построение функции распределения

Рассмотрим канал толщиной  $D'$ , стенки которого расположены в плоскостях  $x' = \pm d'$  прямоугольной декартовой системы координат ( $d' = D'/2$ ). Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления. Направим ось  $Oy'$  вдоль градиента давления. В выбранной системе координат уравнение Вильямса записывается в виде

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{\eta_g} (f_* - f). \quad (1)$$

Будем считать, относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда задача допускает, что линеаризацию и функцию рас-

пределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(y) \beta^{3/2} \pi^{-3/2} [1 + C_z G_n Z(x; C_x)]. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$  — безразмерная скорость молекул газа,  $x = x'/l_g \gamma$  и  $y = y'/l_g \gamma$  — безразмерные координаты,  $G_n$  — безразмерный градиент давления. Подставляя (2) в (1), после линеаризации  $f_*(n_*, T_*, \mathbf{u}_*)$  относительно абсолютного максвеллиана приходим к уравнению для нахождения  $Z(x, C_x) = Z(x, \mu, C)$ :

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu, C) + \frac{1}{C} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) d\mu' \times \int_0^{+\infty} \exp(-C'^2) C'^5 Z(x, \mu', C') dC'. \quad (3)$$

При записи (3) перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей  $C_x = C \cos \theta$ ,  $C_y = C \sin \theta \cos \chi$ ,  $C_z = C \sin \theta \sin \chi$ , выполнили в полученном выражении интегрирование по азимутальному углу  $\chi$  от 0 до  $2\pi$  и ввели обозначение  $\mu = \cos \theta$ . Условия для функции  $Z(x, \mu, C)$  на стенках канала с учетом принятой в работе зеркально-диффузной модели граничного условия записываются в виде

$$Z(-d, \mu, C) = (1 - q)Z(-d, -\mu, C), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (4)$$

$$Z(d, \mu, C) = (1 - q)Z(d, -\mu, C), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (5)$$

Здесь  $q$  — коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала. Решение (3) ищем в виде

$$Z(x, \mu, C) = Z_1(x, \mu) + \left( \frac{1}{C} - \alpha \right) Z_2(x, \mu), \quad \alpha = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), приходим к системе уравнений для нахождения  $Z_1(x, \mu)$  и  $Z_2(x, \mu)$ :

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) + \gamma = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) Z_1(x, \mu') d\mu', \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x, \mu) + 1 = 0. \quad (8)$$

Граничные условия (4), (5) с учетом (6) перепишем в виде ( $k = 1, 2$ )

$$Z_k(-d, \mu) = (1 - q)Z_k(-d, -\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (9)$$

$$Z_k(d, \mu) = (1 - q)Z_k(d, -\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (10)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение уравнения (8) с граничными условиями (9), (10) имеет вид

$$Z_2(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x+d}{\mu}\right) H_+(\mu) + \exp\left(-\frac{x-d}{\mu}\right) H_+(-\mu) - 1, \quad (11)$$

где  $H_+(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 0 \\ 1, & \text{если } \mu > 0 \end{cases}$  — ступенчатая функция

Хэвисайда.

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$Z_1(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta) F(\eta, \mu) d\eta + \gamma(x^2 - 2x\mu + 2\mu^2), \quad (12)$$

где  $A_0, A_1$  и  $a(\eta)$  — неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению,

$$F(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu)$$

— собственные векторы непрерывного спектра,

$$\lambda(z) = 1 + \frac{3}{4} z \int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau^2) d\tau}{\tau - z}$$

— дисперсионная функция Вильямса [10],  $P \frac{1}{\eta - \mu}$  и  $\delta(\eta - \mu)$  — распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от  $1/z$  и дельта-функция Дирака. Подставляя (12) в граничные условия (9), (10), после преобразований, приведенных в [11], приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[B(\eta; -d) + B(-\eta; d)] d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} \\ & \times [B(\mu; -d) + B(-\mu; d)] = -2q[\gamma(d^2 + 2\mu^2) + A_0] \\ & - 4(2 - q)\gamma d\mu - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[B(-\eta; -d) + B(\eta; d)] d\eta}{\eta + \mu}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[B(\eta; -d) - B(-\eta; d)] d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} \\ & \times [B(\mu; -d) - B(-\mu; d)] = -2qA_1d - 2(2 - q)A_1\mu \\ & - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta[B(-\eta; -d) - B(\eta; d)] d\eta}{\eta + \mu}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$B(\eta; x) = a(\eta) \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) - (1 - q)a(-\eta) \exp\left(\frac{x}{\eta}\right). \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что (14) с учетом (15) при  $a(-\eta) = a(\eta)$  и  $A_1 = 0$  обращается в тождество. Уравнение (13) при этом можно переписать в виде

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta B(\eta; -d) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} B(\mu; -d) = f(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f(\mu) = & -q[\gamma(d^2 + 2\mu^2) + A_0] - 2(2 - q)\gamma d\mu \\ & - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta B(\eta; d) d\eta}{\eta + \mu}. \quad (17) \end{aligned}$$

Решение (16) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши:

$$n(z) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta B(\eta; -d) d\eta}{\eta - z}.$$

Учитывая краевые значения функций  $N(z)$  и  $\lambda(z)$  на верхнем и нижнем берегах разреза и используя решение задачи факторизации, полученное в [10], сингулярное интегральное уравнение (14) сведем к краевой задаче Римана

$$N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) = \frac{3}{2} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \pi i \mu (1 - \mu^2) f(\mu). \quad (18)$$

Разрезы функций, входящих в (18), совпадают с контуром краевого условия, следовательно, получили задачу отыскания кусочно-аналитической функции по заданному скачку. Ее решение записываем на основании формул Сохоцкого

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu) \mu (1 - \mu^2) f(\mu) d\mu}{\lambda^-(\mu) \mu - z}. \quad (19)$$

Раскладывая (19) в окрестности бесконечно удаленной точки, приходим к условию разрешимости краевой задачи (18)

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu (1 - \mu^2) f(\mu) d\mu = 0. \quad (20)$$

Подставляя (17) в (20), после преобразований находим коэффициент  $A_0$ :

$$\begin{aligned} A_0 = & -\gamma(d^2 + 2X_3) \\ & - \frac{1}{q} \left[ 2(2 - q)\gamma dX_2 - \frac{3}{4} \int_0^1 \eta X(-\eta) B(\eta, d) d\eta \right], \end{aligned}$$

где  $X_2 = 0.581946$ ,  $X_3 = 0.3383616$ , а для нахождения коэффициентов  $a(\eta)$  приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = h(\mu) \left[ 2\gamma b(\mu) + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta X(-\eta) b_2(-d, \eta) a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad (21)$$

$$h(\mu) = -\frac{(1-\mu^2)X(-\mu)}{5|\lambda^+(\mu)|^2 b_2(d, \mu)},$$

$$b_2(x, \eta) = \left[ \exp\left(\frac{x}{\eta}\right) - (1-q) \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \right],$$

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp[V(z)], \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{[\theta(\tau) - \pi] d\tau}{\tau - z},$$

$$\theta(\tau) = \text{arccctg} \frac{4\lambda(\tau)}{3\pi\tau(1-\tau^2)}, \quad b(\mu) = q(\mu + X_2) + (2-q)d.$$

Решение (21) ищем в виде степенного ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \quad \lambda = \frac{3}{4}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , находим

$$a_0(\mu) = 2\gamma h(\mu)b(\mu), \quad a_1(\mu) = 2\gamma h(\mu) \int_0^1 \frac{g(\eta_1)b(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1 + \mu},$$

$$a_2(\mu) = 2\gamma h(\mu) \int_0^1 g(\eta_1)d\eta_1 \int_0^1 \frac{g(\eta_2)b(\eta_2)d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1},$$

...

$$a_k(\mu) = 2\gamma h(\mu) \int_0^1 g(\eta_1)d\eta_1 \int_0^1 g(\eta_2)d\eta_2 \dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k)b(\eta_k)d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$g(\mu) = \mu h(\mu)X(-\mu)b_2(-d, \mu).$$

Таким образом, решение уравнения (3) с граничными условиями (4), (5) построено.

### Вычисление параметров газа в канале

С учетом построенного решения находим скорость газа в канале  $U_y(x)$  и приходящийся на единицу ширины канала поток массы газа  $J_M$ :

$$U_y(x) = \frac{\gamma}{2} \left[ x^2 - d^2 - 2X_3 + \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k J_k(x) + \frac{1}{q} \left( \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k I_k - 2(2-q)dX_2 \right) \right] - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{9\pi}{32} \right) \times \left[ 1 - \frac{3q}{4} \int_0^1 (1-\mu^2) \frac{\exp(\frac{x-d}{\mu}) + \exp(-\frac{x+d}{\mu})}{1 - (1-q)\exp(-\frac{2d}{\mu})} d\mu \right], \quad (23)$$

$$J_M = \gamma \left[ \frac{D}{6} + \frac{2-q}{q} X_2 + \frac{1}{D} \left( 2X_3 - \frac{4}{5} \left( 1 - \frac{16}{9\pi} \right) - \frac{3}{2q} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k I_k \right) - \frac{1}{D^2} \left[ \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k K_k - \frac{3q}{5} \left( 1 - \frac{32}{9\pi} \right) \right] \right] \times \int_0^1 \mu(1-\mu^2) \frac{1 - \exp(-\frac{2d}{\mu})}{1 - (1-q)\exp(-\frac{2d}{\mu})} d\mu \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{matrix} I_0 \\ J_0(x) \\ K_0 \end{matrix} \right\} = \int_0^1 \left\{ \begin{matrix} g(\eta) \\ \gamma(x, \eta) \\ \xi(\eta) \end{matrix} \right\} b(\eta) d\eta,$$

$$\left\{ \begin{matrix} I_k \\ J_k(x) \\ K_k \end{matrix} \right\} = \int_0^1 \left\{ \begin{matrix} g(\eta) \\ \gamma(x, \eta) \\ \xi(\eta) \end{matrix} \right\} d\eta$$

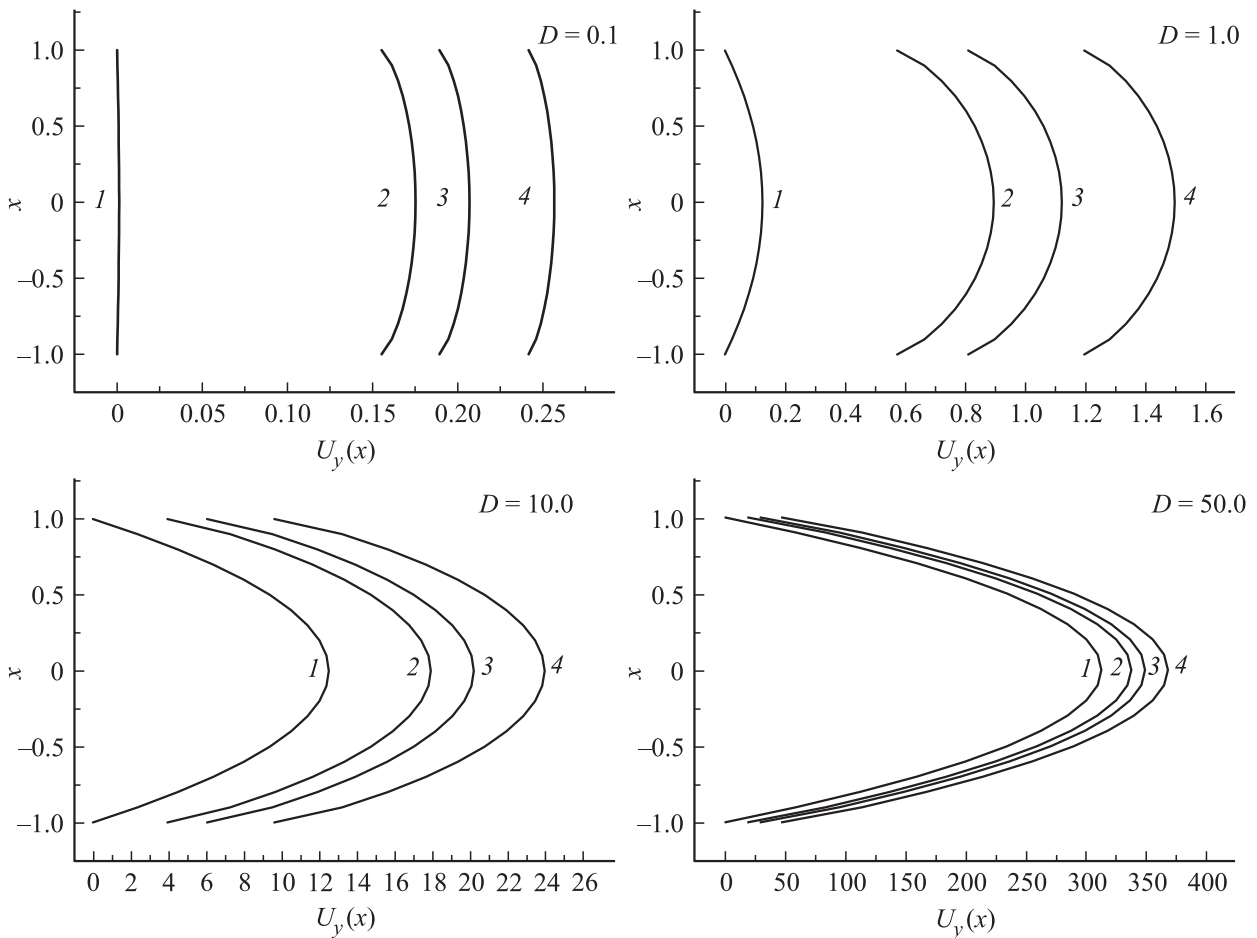
$$\times \int_0^1 \frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta + \eta_1} \dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k)b(\eta_k)d\eta_k}{\eta_{k-1} + \eta_k},$$

$$\gamma(x, \eta) = 2h(\eta) \text{ch}(x/\eta), \quad \xi(\eta) = 4\eta h(\eta) \text{sh}(d/\eta).$$

Значения  $J_M$ , вычисленные согласно (24), приведены в таблице. Там же приведены аналогичные результаты, полученные в [7–9] методом дискретных ординат с использованием БГК-модели кинетического уравнения Больцмана (BGK), модели Шахова (S), модели с комбинированным ядром (CES), а также линейаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер (LBE). Как видно из приведенной таблицы, полученные в работе результаты находятся в хорошем согласии с аналогичными результатами [7–9]. Имеющиеся отличия объясняются слабой зависимостью результатов от модели интеграла столкновений. Графики скорости газа, построенные согласно (23), приведены на рисунке, из которого видно, что профиль массовой скорости газа, рассчитанный согласно уравнениям классической гидродинамики при малой толщине канала, существенно

Зависимость  $J_M$  от  $D$  при различных значениях  $q$

$D$	$J_M$ (24)	BGK [7]	S [8]	CES [9]	LBE [9]
$q = 0.1$					
0.1	21.066			19.984	20.243
1.0	17.643			17.522	17.564
10.0	18.708			18.737	18.743
$q = 0.5$					
0.1	4.761	4.556406	4.5801	4.3156	4.3868
1.0	3.387	3.368218	3.3928	3.2959	3.3264
10.0	4.509		4.5837	4.5285	4.5346
$q = 1.0$					
0.1	2.130	2.032256	2.0395	1.9259	1.9499
1.0	1.545	1.538678	1.5536	1.4863	1.5067
10.0	2.715		2.7799	2.7220	2.7296



Зависимости \$U\_y(x)\$ при различных значениях толщины канала \$D\$ и коэффициента аккомодации тангенциального импульса \$q\$: 1 — классическая гидродинамика, 2 — 1.0, 3 — 0.8, 4 — 0.6.

отличается от полученного в рамках кинетического подхода. Причем отличие становится все существеннее при уменьшении значения коэффициента аккомодации.

### Анализ полученных результатов

Достоинство аналитических методов заключается в том, что полученные на их основе результаты позволяют получать асимптотические выражения, пригодные для различных режимов течения. Так, если в (23) и (24) перейти к размерным величинам, оставив только главные члены разложения, то получим результаты, совпадающие с аналогичными результатами, полученными в рамках классической гидродинамики:

$$u_y(x') = \frac{(x')^2 - (D'/2)^2}{2\eta_g} \frac{dp}{dy'}, \quad J'_M = \frac{\rho}{12\eta_g} (D')^3 \frac{dp}{dy'}.$$

Учет следующих слагаемых в (23), (24) приводит к результатам, получаемым в рамках гидродинамики со скольжением

$$u_y(x') = \frac{1}{2\eta_g} \left[ (x')^2 - \left(\frac{D'}{2}\right)^2 - \frac{2-q}{q} \gamma D' l_g X_2 \right] \frac{dp}{dy'},$$

$$J'_M = \frac{\rho}{2\eta_g} (D')^2 \left[ \frac{D'}{6} + \frac{2-q}{q} l_g \gamma X_2 \right] \frac{dp}{dy'}.$$

Здесь \$\gamma X\_2 = 0.967005\$. Соответствующие выражения, полученные с использованием БГК-модели кинетического уравнения Больцмана, имеют вид

$$u_y(x') = \frac{1}{2\eta_g} \left[ (x')^2 - \left(\frac{D'}{2}\right)^2 + \frac{2-q}{q} D' l_g Q_1 \right] \frac{dp}{dy'},$$

$$J'_M = \frac{\rho}{2\eta_g} (D')^2 \left[ \frac{D'}{6} - \frac{2-q}{q} l_g Q_1 \right] \frac{dp}{dy'},$$

где \$Q\_1 = -1.01619\$ — значение интеграла Лойалки. Если в (24) под знаками суммы оставить только первые члены разложения, то при \$q = 1\$ получаем формулу Вильямса

$$J'_M = \frac{D'}{6} + 0.967005 + \frac{0.9112667}{D'} - \frac{0.999374}{(D')^2}.$$

Аналогичный результат в [12], полученный в рамках линеаризованного уравнения Больцмана для молекул жестких сфер, записывается в виде

$$J'_M = \frac{D'}{6} + 0.9790 + \frac{0.7089}{D'} - \frac{1.0872}{(D')^2}.$$

## Заключение

Итак, в работе в виде ряда Неймана построено аналитическое решение уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля. Для произвольных значений толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала построен профиль скорости газа и вычислен расход массы газа, приходящийся на единицу ширины канала. Проведен численный анализ полученных выражений, а также их анализ при переходе к гидродинамическому режиму и режимам, близким к гидродинамическому. Сравнение полученных результатов с аналогичными результатами, найденными с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер, говорит, с одной стороны, о хорошем качестве модели Вильямса. С другой стороны, хорошее согласие с результатами, полученными на основе БГК- и S-моделей, говорит, скорее всего, о слабой зависимости результатов расчета в рассматриваемой задаче от модели межмолекулярного взаимодействия. Полученные результаты обнаруживают также сильную зависимость от модели взаимодействия молекул газа со стенками канала.

## Список литературы

- [1] Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
- [2] Клосс Ю.Ю., Черемисин Ф.Г., Шувалов П.В. // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 144–152.
- [3] Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
- [4] Латышев А.В., Юшканов А.А. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 27–32.
- [5] Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. // ПМТФ. 2012. № 4. С. 48–56.
- [6] Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.
- [7] Barhcello L.B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C.E. // ZAMP. 2001. Vol. 52. P. 517–534.
- [8] Siewert C.E. // European J. Mech. B Fluid. 2002. Vol. 21. P. 579–597.
- [9] Siewert C.E. // ZAMP. 2003. Vol. 54. P. 273–303.
- [10] Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография. М.: МГОУ, 2004. 271 с.
- [11] Попов В., Тестова И., Юшканов А. Математическое моделирование течений газа в каналах: монография. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic publishing, 2012. 116 с.
- [12] Loyalka S.K., Hickey K.A. // Physica. A. 1989. Vol. 160. P. 395–408.