

03

Поведение тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, в плоском потоке Куэтта и Пуазейля

© В.Б. Федосеев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: vbfedoseev@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 22 января 2014 г. В окончательной редакции 30 июля 2014 г.)

На основе термодинамического подхода получено выражение для выталкивающей силы, действующей на тела, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда, в течении Куэтта и Пуазейля. Показана связь выталкивающей силы с плотностью, формой, ориентацией тела и его скоростью относительно среды.

Введение

Проблема описания поведения тел в потоке актуальна для систем разных масштабов и типов, от геологических до биологических. Экспериментальные наблюдения потоков в двухфазных системах демонстрируют, что тела — частицы дисперсной фазы — смещаются (мигрируют) перпендикулярно оси потока в различных направлениях. Распределение дисперсной фазы может быть неоднородным, жидкие частицы могут образовывать пленки на стенках, пузырьки всплывают преимущественно по центральной области вертикальных потоков, крупные частицы могут двигаться, сталкиваясь со стенками. Частицы с нулевой плавучестью концентрируются на удалении и от стенок, и от центра потока, либо осциллируют внутри потока. Двух- и многофазные смеси часто образуют слоистые течения разного типа [1–3]. На движение отдельных частиц оказывает влияние множество факторов, в частности геометрия, скорость, плотность частиц и среды. Рост количества обзорных работ, результатов численных и экспериментальных исследований [4–7] свидетельствуют о том, что проблема описания миграции частиц в потоке и структуры многофазных течений остается актуальной.

Обычно для решения проблемы миграции частиц в потоке используется аппарат гидродинамики [2,3,8]. Реже применяются методы статистической физики и термодинамики [7,9,10].

В настоящей работе для рассмотрения процессов массопереноса в стационарном гидродинамическом поле использован термодинамический подход [11–13]. Это дает более простую оценку для движущих сил, вызывающих миграцию частиц, и облегчает поиск наиболее вероятного положения частиц разной плотности и формы в потоке. Термодинамическая оценка устойчивых и неустойчивых состояний системы дополняет и упрощает интерпретацию результатов численного моделирования гидродинамическими методами поведения отдельных частиц, траектории которых могут меняться во времени непрерывно и весьма сложным образом.

Теоретическая часть

Поместим тело массой m_b в среду с плотностью ρ , которая движется равномерно и прямолинейно. При этом сечение потока, средняя скорость и эпюра скоростей остаются постоянными по всей длине потока.

Простейшими примерами таких потоков являются течение Куэтта — ламинарное течение вязкой жидкости между двумя параллельными стенками, одна из которых движется относительно другой (рис. 1, *a*), и течение Пуазейля — ламинарное течение вязкой жидкости через канал в виде прямого кругового цилиндра либо слоя между параллельными стенками (рис. 1, *b*).

Свяжем систему координат с неподвижной границей потока так, чтобы ось x совпала с направлением потока, а ось z была нормальна его границам (рис. 1).

Прежде всего рассмотрим случай, когда скорость движения центра тела $v(r)$ равна скорости течения среды на уровне r (рис. 1, 2). Пусть за время наблюдения тело не смещается по направлению z и не поворачивается под действием обтекающих его потоков. Система является стационарной, так как ее полная и внутренняя энергия, импульс, количество вещества, состав, масса, объемы жидкой и твердой фаз, не зависят от времени.

Опишем состояние системы в зависимости от положения тела. Полная энергия системы „тело+среда“, складывающаяся из кинетической энергии тела и среды,

$$W = \frac{MV_0^2}{2} + U, \quad (1)$$

где масса системы $M = \sum m_i$ складывается из масс m_i , составляющих систему компонентов, V_0 — скорость движения центра инерции системы в выбранной системе координат, т.е. относительно неподвижной стенки. Внутренняя энергия U по определению включает кинетическую энергию относительного (по отношению к центру инерции системы) движения всех частей системы и потенциальную энергию их взаимодействия.

Потенциальную энергию взаимодействия тело—среда примем равной нулю (либо постоянной), и внешние факторы (гравитационное, вибрационное поля, внешнее давление и прочее) в рассматриваемой системе отсутствуют. В таком случае внутренняя энергия системы

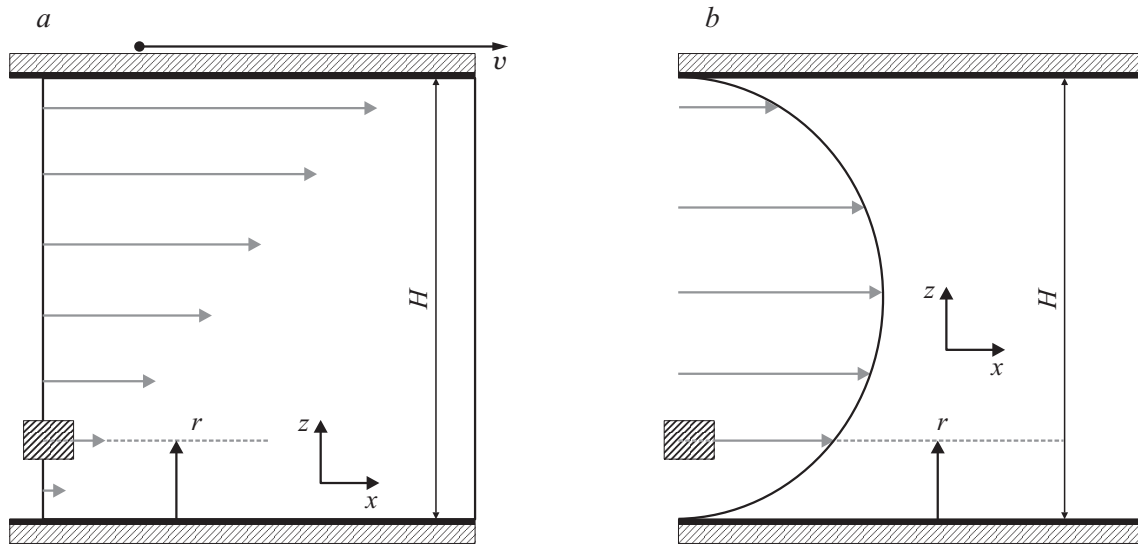


Рис. 1. Тело кубической формы в течении Куэтта (а), течении Пуазейля (b).

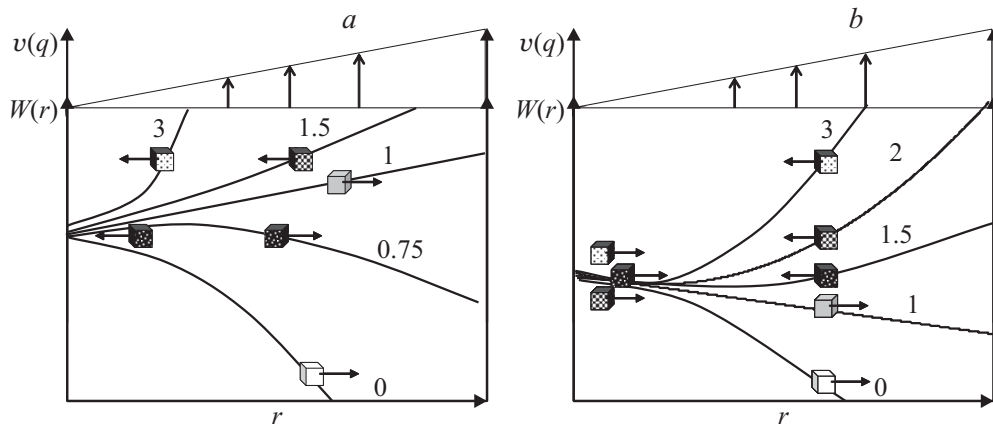


Рис. 2. Зависимость энергии системы (4) от положения тела r в потоке Куэтта для тел, опережающих поток (а) и отстающих от потока (b). Рядом с кривыми указано отношение плотностей тел к плотности среды ρ_b/ρ_0 . Стрелками показано направление выталкивающей силы, действующей на частицы разной плотности.

включает только кинетическую энергию движения среды и частицы относительно центра инерции системы, движущегося с постоянной (при неизменном положении тела) скоростью V_0 . Пренебрегая локальными потоками среды в окрестности частицы, связанными с тем, что один край частицы опережает поток, другой движется медленнее, представим полную энергию системы как

$$W = A\rho_0 \int_0^H v^2(z)dz + \frac{m_b v^2(r)}{2} - \frac{L_x L_y \rho_0}{2} \int_{r-\frac{1}{2}L_z}^{r+\frac{1}{2}L_z} v^2(z)dz + \Delta W_{\text{loc}}. \quad (2)$$

Здесь A — параметр, по смыслу соответствующий площади горизонтального сечения системы, ΔW_{loc} — вклад энергии локальных потоков, возникающих в окрестности тела.

Первое слагаемое в (2) соответствует кинетической энергии среды при отсутствии тела, второе — кинетической энергии тела, третье — энергия той части среды, которую вытеснило тело, помещенное на уровень r .

Для тел, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами L_x, L_y, L_z с основанием, параллельным стенке потока (рис. 1), выражение (2) принимает вид

$$W(r) = A\rho_0 \int_0^H v^2(z)dz + \frac{L_x L_y}{2} \int_{r-\frac{1}{2}L_z}^{r+\frac{1}{2}L_z} (\rho_b v^2(r) - \rho_0 v^2(z))dz + \Delta W_{\text{loc}}. \quad (3)$$

При этом $m_b = L_x L_y L_z \rho_b$ — масса, ρ_b — плотность, $L_x L_y L_z$ — объем тела.

Ограничивая рассмотрение медленными течениями с малыми градиентами скорости потока, можно пренебречь последним слагаемым ($\Delta W_{\text{loc}} \approx 0$). Так как полная энергия (3) зависит от положения тела r , то на систему действует обобщенная сила $F(r) = -\frac{d}{dr} W(r)$, стремящаяся изменить ее состояние, меняя положение тела в потоке. Сила является аналогом силы Архимеда и определяет направление перемещения компонентов системы (тела и среды), которое приводит к понижению полной энергии.

Обобщим этот случай рассмотрением тел, движущихся относительно среды с произвольной, но постоянной скоростью $v_b = v(r) + \Delta v$ параллельно потоку. Полная энергия системы примет вид

$$W(r) = A\rho_0 \int_0^H v^2(z) dz + \frac{L_x L_y}{2} \int_{r-\frac{1}{2}L_z}^{r+\frac{1}{2}L_z} (\rho_b(v(r) + \Delta v)^2 - \rho_0 v^2(z)) dz + \Delta W_{\text{loc}}. \quad (4)$$

При больших отклонениях скорости тела от скорости среды пренебрежение кинетической энергией локальных потоков, возникающих в окрестности тела ΔW_{loc} , становится некорректным. Воспользуемся приближением $\Delta W_{\text{loc}} \approx 0$ и опишем некоторые частные случаи.

Тело в течении Куэтта

Рассмотрим плоское сдвиговое течение Куэтта ($v(z) = az$, где $a = \frac{dv}{dz}$ — скорость сдвига). Согласно (3), выталкивающая сила $F(r) = -\frac{d}{dr} W(r)$, вызывающая миграцию тела поперек потока, имеет вид

$$F(r) = -\frac{dW(r)}{dr} = m_0 a^2 r \left(1 - \frac{\rho_b}{\rho_0} \left(1 - \frac{\Delta v}{ar} \right) \right) - \frac{d}{dr} \Delta W_{\text{loc}}. \quad (5)$$

Здесь $m_0 = L_x L_y L_z \rho_0$ — масса среды, вытесненной телом, ρ_b, ρ_0 — плотность тела и среды соответственно.

Выполним простые оценки. Согласно (5), на тела с нулевой плавучестью ($\rho_b = \rho_0$), переносимые потоком Куэтта ($\Delta v = 0$), выталкивающая сила не действует. Для „легких“ ($\rho_b < \rho_0$) тел при $\Delta v = 0$ сила направлена в сторону роста скорости потока. „Тяжелые“ ($\rho_b > \rho_0$) тела при $\Delta v = 0$ выталкиваются силой в сторону уменьшения скорости потока (к неподвижной границе).

Существенное отличие „выталкивающей“ силы (5) от силы Архимеда состоит в том, что она зависит от положения тела относительно границ системы. Для течения Куэтта это может казаться странным, ведь в окрестности тела на любом удалении от границы разность скоростей в окрестности тела одинакова. Однако вспоминая, что обобщенная сила действует и на тело, и на среду, можно представлять, что слои, расположенные между неподвижной стенкой и телом, играют роль

„рычага“. Величина r является обобщенной координатой, и формально сила привязана к положению тела, создавая иллюзию, что она действует именно на тело. Обобщенная или „термодинамическая“ сила действует на систему в целом, а не на отдельные ее компоненты.

Количественно оценить значение выталкивающей силы (5) при $\Delta v = 0$ можно, сопоставив ее с другой силой, действующей на то же тело в той же среде. Отношение выталкивающей силы (5) к выталкивающей силе Архимеда $F_{Ar} = m_0 g \left(1 - \frac{\rho_b}{\rho_0} \right)$, действующей на то же тело в той же среде, равно $\frac{F}{F_{Ar}} = \frac{a^2 r}{g}$. Выталкивающая сила в течении Куэтта сопоставима с силой Архимеда ($F \geq 0.1 F_{Ar}$) при скорости сдвига $a \sim 1 \text{ s}^{-1}$ на удалении около 1 м от неподвижной границы, при $a \sim 10 \text{ s}^{-1}$ — на удалении около 1 см.

Чтобы сопоставить (5) с известными в гидродинамике силами [2], перегруппируем уравнение (5) следующим образом:

$$F(r, \Delta v) = \left[\frac{ar}{\Delta v} \left(1 - \frac{\rho_b}{\rho_0} \right) + \frac{\rho_b}{\rho_0} \right] \rho_0 L^3 \Delta v a. \quad (6)$$

Выражения (5), (6) не зависят от предыстории, поэтому не связаны с силой Бассэ–Бусинеска, возникающей при ускоренном движении частицы. В работе [14] для частиц аэрозоля приведено простое выражение силы, названной „силой Архимеда“ $F_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_b \frac{dv_b}{dt}$, но и в этом выражении присутствует ускорение, которое в рассматриваемом случае равно нулю. По условию тело не вращается, поэтому зависящие от угловой скорости силы Магнуса и Саффмана тоже не имеют отношения к (6). Рассматриваемая модель не учитывает вязкость среды, следовательно, (6) не относится и к силам трения.

Описывая движение невращающегося тела в сдвиговом потоке, наиболее часто используют силу Саффмана

$$F_S = - \left(C_S \frac{\mu^{0.5}}{L} \right) m_0 \Delta v a^{0.5},$$

где μ — вязкость среды. Она получена Саффманом для неинерционной системы отсчета (привязанной к движущемуся телу сферической формы) [15]. Это осложняет сопоставление с (6), поскольку F_S включает в себя силы инерции, отсутствующие в использованной выше системе отсчета. Величина C_S сложным образом зависит от скорости потока и свойств среды [16], а при изменении условий течения C_S меняется не только по величине, но и по знаку (направлению) [17].

Применяются и другие выражения силы, вызывающей поперечную миграцию тел в сдвиговом потоке [18]. В частности, $F_M = 1.96(b_1 \text{Re}_p + b_2) \rho_0 d^3 \Delta v a$ [19], или полученное для конкретного эксперимента эмпирическое выражение $F_Y = 0.052 \rho_0 d^3 \Delta \bar{v} a$ [20]. В (6), как и в других приведенных уравнениях, сила пропорциональна массе жидкости, вытесненной телом, $m_0 \sim \rho_0 L^3 \sim \rho_0 d^3$, разности скоростей потока и тела Δv , скорости сдвига a . Оценка (5), имея аналитический вид и простой физический смысл, обобщает приведенные эмпирические

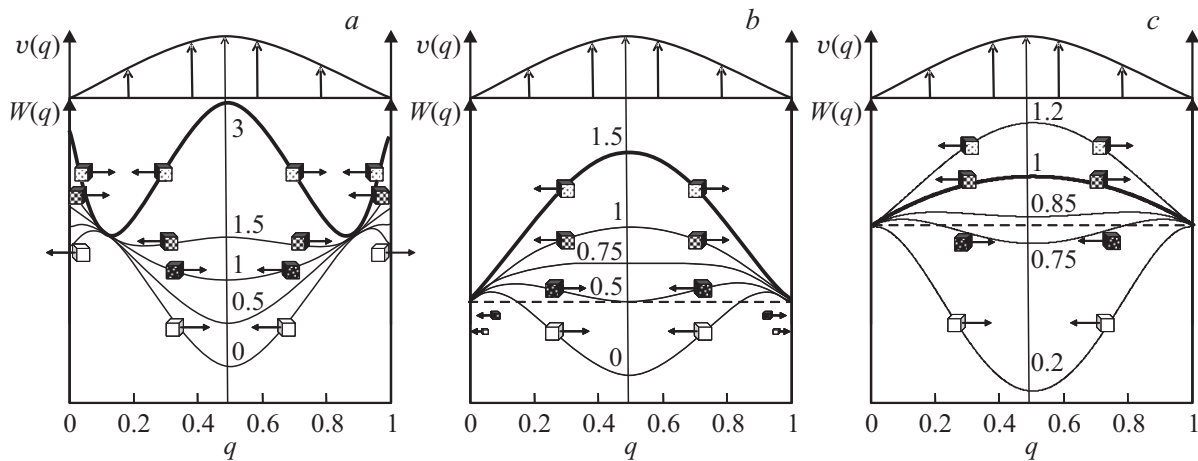


Рис. 3. Зависимость энергии системы (4) от положения тела r в потоке Пуазейля при: $a - \Delta v < 0$, $b - \Delta v = 0$, $c - \Delta v > 0$. Около кривых указано отношение ρ_b/ρ_0 . Стрелками показано направление выталкивающих сил.

выражения и может быть использована для частиц разной плотности и формы, при разной конфигурации ламинарного потока.

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Для тел очень малой плотности (пузырьки, каверны или полости) $\rho_0 \gg \rho_b$ в приближении малой скорости относительного движения частиц в среде $|\Delta v| \ll d|a| < r|a|$, согласно (6), силу можно описать как

$$F(r, \Delta v) \approx \left(\frac{ar}{\Delta v} + \frac{\rho_b}{\rho_0} \right) m_0 \Delta v a. \quad (7)$$

Сила направлена в сторону увеличения r и стремится сместить пузырьки в направлении увеличения скорости потока, когда пузырек опережает поток $\Delta v > 0$. Если же пузырек движется со скоростью, меньшей, чем скорость потока $\Delta v < 0$ (например, в нисходящем потоке), сила меняет знак на расстоянии $r_0 = \frac{\rho_b}{\rho_0} \left| \frac{\Delta v}{a} \right|$ от неподвижной стенки. При $r > r_0$ сила направлена от неподвижной стенки в сторону роста скорости потока, при $r < r_0$ в сторону неподвижной стенки. Таким образом, пузыри, двигающиеся в потоке, „разбегаются“ от некоторого уровня r_0 . Мелкие легкие тела с размерами $L \ll r_0$ при этом могут прижиматься силой (7) к неподвижной стенке. Эти закономерности можно увидеть на зависимости энергии системы от положения тела (рис. 2). Самопроизвольное перемещение тела и направление силы определяются стремлением системы понизить полную энергию.

Для тел большой $\rho_0 \ll \rho_b$ плотности из (6) получим

$$F(r, \Delta v) \approx \left(1 - \frac{ar}{\Delta v} \right) \frac{\rho_b}{\rho_0} \rho_0 L^3 \Delta v a. \quad (8)$$

В этом случае выталкивающая сила смещает тело, двигающееся медленнее потока $\Delta v < 0$, к неподвижной стенке. Частицы, опережающие поток $\Delta v > 0$ (например, тяжелые частицы в восходящих потоках), выталкиваются на уровень $r = \frac{\Delta v}{a}$, где находится положение устойчивого равновесия.

Тело в течении Пуазейля

Рассмотрим поток с нелинейным распределением скорости. Скорость в течении Пуазейля описывается параболической зависимостью $v(z) = bz(H - z)$, где H — ширина русла, b связано с максимальной скоростью $b = 2v(H/2)/H^2$ (в центре потока).

Для этого случая выражение (4) имеет вид

$$W(r) = A\rho_0 \int_0^H (bz(H - z))^2 dz + \frac{L_x L_y}{2} \times \int_{r - \frac{1}{2}L_z}^{r + \frac{1}{2}L_z} (\rho_b (br(H - r) + \Delta v)^2 - \rho_0 (bz(H - z))^2) dz + \Delta W_{\text{loc}}. \quad (9)$$

Зависимость полной энергии системы от положения тела показана на рис. 3 для тел, двигающихся вместе с потоком $\Delta v = 0$ (рис. 3, b), отстающих от потока (рис. 3, a) или опережающих поток (рис. 3, c).

Зависимости энергии от положения тела позволяют оценивать направление и величину выталкивающих сил и равновесные положения (устойчивые, неустойчивые, метастабильные) тела в потоке.

Для тел кубической формы в плоском потоке Пуазейля уравнение $F(r) = -\frac{dW(r)}{dr}$ удобно анализировать в безразмерном виде, используя переменные $q = z/H$, $0 \leq q \leq 1$ и $\lambda = L/H$, $0 \leq \lambda < 1$:

$$F(q) = C \left[\left(1 - \frac{\rho_b}{\rho_0} \right) (2q^3 - 3q^2 + q) + \left(q - \frac{1}{2} \right) \left(2 \frac{\rho_b}{\rho_0} \frac{\Delta v}{b} + \frac{\lambda^2}{2} \right) \right], \quad (10)$$

где $C = \rho_0 L^3 H^3 b^2 = m_0 H^3 b^2$ — коэффициент, включающий геометрические и размерные характеристики.

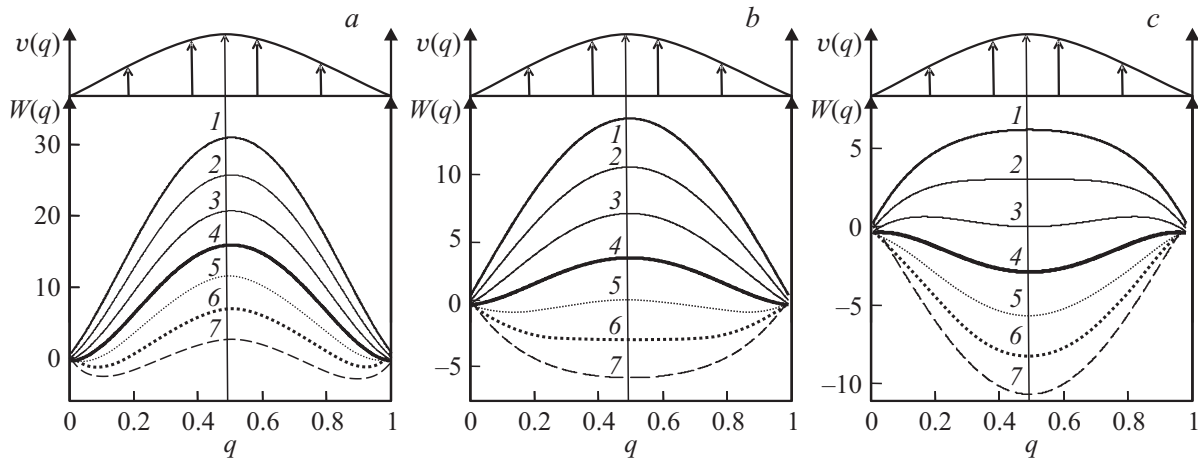


Рис. 4. Зависимость полной энергии для тел кубической формы с плотностью: *a* — $\rho_b = 1.5\rho_0$, *b* — $\rho_b = 1.1\rho_0$, *c* — $\rho_b = 0.9\rho_0$. Относительная скорость движения тела по и против течения на всех графиках: 1 — $\Delta v = 0.2 v_{\max}$, 2 — $0.1 v_{\max}$, 0.05 v_{\max} , 3 — $0.05 v_{\max}$, 4 — $0 v_{\max}$, 5 — $(-0.05 v_{\max})$, 6 — $(-0.1 v_{\max})$, 7 — $(-0.2 v_{\max})$ соответственно, где v_{\max} — скорость течения среды в центре потока.

Полином $2q^3 - 3q^2 + q$ имеет корни 1, 1/2, 0, соответствующие границам и середине потока. В этих слоях вклад первого слагаемого равен нулю. В экстремумах полинома $q = 1/2 \pm \sqrt{3}/6$ (0.211 и 0.789) вклад первого слагаемого в выталкивающую силу максимален. Вклад второго слагаемого пропорционален размерам тела и линейно растет при удалении от центра потока. Его знак зависит от скорости „отставания“: при $\Delta v < -\frac{b\lambda^2}{4} \frac{\rho_0}{\rho_b}$ эта составляющая силы направлена к центру потока, при $\Delta v > -\frac{b\lambda^2}{4} \frac{\rho_0}{\rho_b}$ направлена к стенкам. Эффект стенки наблюдается экспериментально и является предметом исследований в работах [21,22].

Согласно (10), выталкивающая сила в потоке Пуазейля зависит от положения тела относительно стенки и от размеров тела. В потоке Куэтта размерной зависимости выталкивающей силы в явном виде (5) нет. Сила (10) симметрична относительно середины потока. В центре потока ($q = 0.5$) сила равна нулю. Это соответствует положению равновесия, которое в зависимости от размеров и плотности частицы может быть как устойчивым, так и неустойчивым (рис. 4).

Выталкивающая сила (10) зависит от соотношения плотностей тела и среды. Для частиц очень большой плотности $\rho_b > \rho_0$ сила всюду направлена к ближайшей стенке (рис. 5), но максимальное по величине значение она имеет на некотором удалении от стенки. Для частиц, плотность которых меньше плотности среды, в центральной части потока сила направлена к центру, а на периферии — к стенкам (рис. 5). Положения около $q \approx 1/2 \pm \sqrt{3}/6$ ($q < 0.211$ и $q \geq 0.789$), где выталкивающая сила обращается в нуль и меняет направление, зависят от размера и плотности частицы. Они соответствуют максимумам энергии (рис. 5) и являются неустойчивым равновесием. Эти положения можно сопоставить с экспериментальными наблюдениями двухфазных потоков, где частицы концентрировались в положении $q \approx 0.1-0.2$ и $q \approx 0.8-0.9$, причем

центральная часть потока содержит сравнительно мало частиц [3].

Уравнения (9)–(10) описывают и скопления легких компонентов у стенок, которые образуют слои,двигающиеся в обратном основному потоку направлении. Течения дисперсно-кольцевой структуры являются одним из наиболее распространенных режимов двухфазного течения в каналах различной геометрии в ядерно-энергетических установках, химико-технологических реакторах по переработке нефти и других видов сырья, при сборе и транспортировке продукции газоконденсатных и нефтяных месторождений [2].

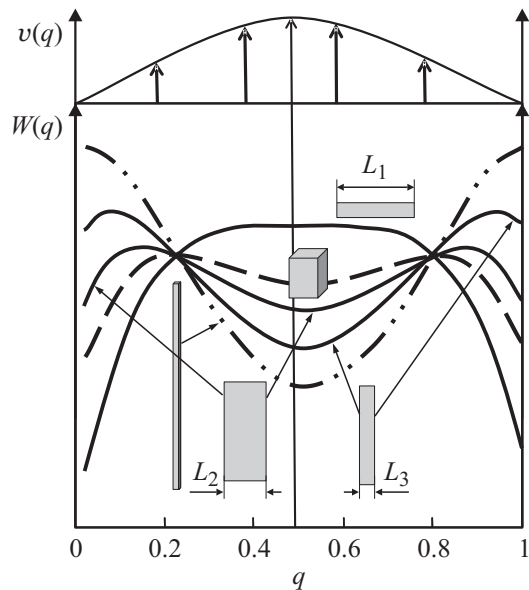


Рис. 5. Зависимость полной энергии для тел разной формы (пластина с размерами L_1, L_2, L_3 в трех разных ориентациях, куб $L_1 = L_2 = L_3$ и стержень $L_1 \gg L_2, L_3$) с плотностью $\rho_b = 0.99$ при $\Delta v = 0$.

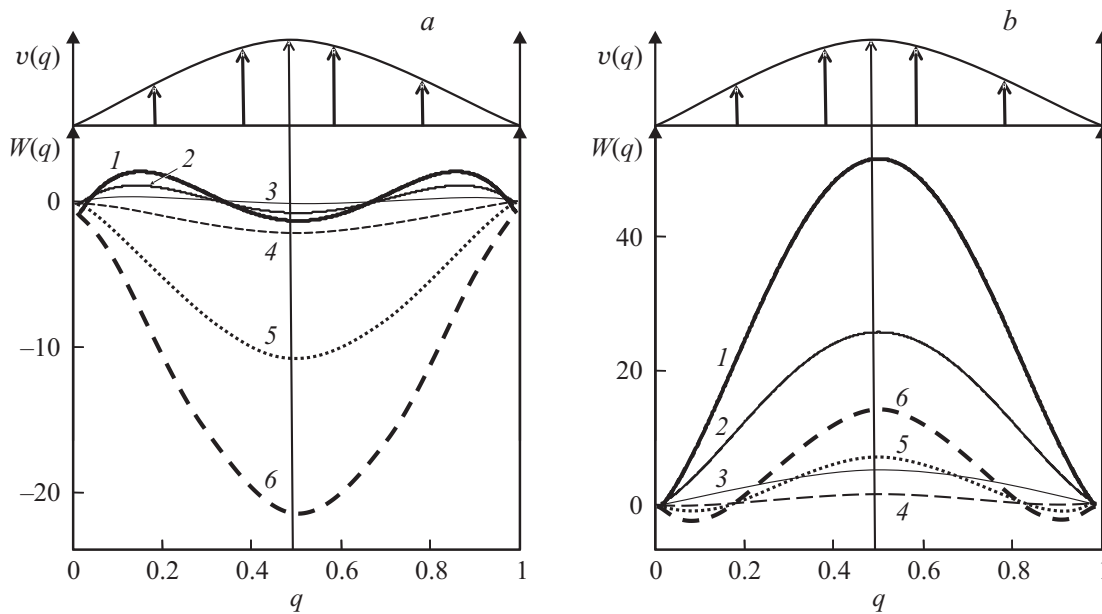


Рис. 6. Зависимость полной энергии для тел кубической формы с плотностью: $a - \rho_b = 0.8\rho_0$ и $b - \rho_b = 1.5\rho_0$. Относительная скорость движения тел относительно среды $\Delta v = 0.1 v_{\max}$ по течению (линии 1–3) либо против течения (линии 4–6). Размеры частиц относятся как 1:2:4, жирными линиями выделены крупные частицы.

Теперь рассмотрим тела, перемещающиеся вдоль потока с разными скоростями. Для тел кубической формы характерный вид зависимости полной энергии от положения тела приведен на рис. 4, при этом поведение легких и тяжелых частиц одинакового размера существенно различается.

Как видно на рис. 4, устойчивое положение тела в потоке существенно зависит от его относительной скорости и плотности. Различия скорости движения тела и среды могут возникнуть как под действием внешних причин (электрическое, магнитное, гравитационное поле), так и просто в результате быстрого смещения тела поперек потока. Например, восходящий или нисходящий поток с частицами разной плотности [23–25]. Одним из следствий является осциллирующее или блуждающее поведение тела, часто наблюдаемое в экспериментах [26–28].

Влияние формы тела на поведение тела в течении Пуазейля

Рис. 3, 4 позволяют описать поведение в сдвиговом потоке тел кубической формы. Выражение (4) можно использовать и для описания поведения тел более сложной формы. Меняя соотношение сторон L_x, L_y, L_z прямоугольного параллелепипеда, кроме куба ($L_x = L_y = L_z$) можно получить пластины ($L_1, L_2 \gg L_3$) и стержни ($L_1, L_2 \ll L_3$) и задать их ориентацию в потоке.

Рассмотрим тела равного объема ($L_1 L_2 L_3 = \text{const}$), движущиеся с потоком ($\Delta v = 0$). На рис. 5 показана зависимость энергии от положения тел разной формы, имеющих плавучесть, близкую к нулевой ($\rho_b \approx \rho_0$). Для

тел почти нулевой плавучести различия в энергии по абсолютной величине малы, однако они демонстрируют сильно различающиеся варианты поведения при изменении ориентации (рис. 5).

На этом и следующих рисунках направление выталкивающих сил не показано. Направлены они в сторону понижения энергии, а их величину можно оценить по наклону касательных.

Стержень, ориентированный вдоль потока, при $\Delta v = 0$ имеет единственное устойчивое равновесие — в центре потока. На пластину (и стержень), ориентированную длинной стороной поперек потока, действует сила, направленная к границам потока. При других ориентациях пластина и куб имеют несколько устойчивых состояний — около стенок и в центре. При наличии относительной скорости $\Delta v \neq 0$ характер зависимости энергии от положения в потоке тел разной формы и ориентации весьма сильно определяется плотностью тела и величиной Δv .

В результате, как отмечено в [29], численные модели движения одиночной цилиндрической частицы в сдвиговом потоке, основанные на методах гидродинамики, не дают приемлемых результатов.

Влияние размера тела

Другим параметром, влияющим на направление и величину выталкивающей силы в потоке Пуазейля, является объем тела. На рис. 6 показаны зависимости энергии системы для кубических частиц разной плотности и объема.

Согласно (10), чем крупнее частица, тем больше по абсолютной величине выталкивающая сила, вызывающая

миграцию тела поперек потока. Это подтверждается численным моделированием и экспериментальными наблюдениями, которые воспроизводят эти авторы.

Заключение

Термодинамический подход к описанию закономерностей миграции тел в сдвиговых потоках позволяет использовать в качестве основных факторов, влияющих на поведение тела, его плотность, размеры, форму, объем, скорость движения тела относительно среды, а также характеристики потока. Предложенное описание позволяет смоделировать все основные типы поведения, наблюдавшиеся при экспериментальных исследованиях миграции тел в потоке, и распределения компонентов двухфазного потока. Анализ энергии системы дает достаточно простую оценку величины и направления сил, возникающих в системе, областей существования различных режимов течения дисперсной фазы. Зависимость полной энергии системы тело—среда от положения тела показывает, что эта система в некоторых условиях весьма чувствительна даже к небольшим вариациям параметров. Поэтому при описании многофазных течений предлагаемый подход в ряде случаев может оказаться проще и эффективнее, чем детальное численное моделирование поведения отдельных частиц или их ансамблей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-03-12225-офи-м).

Список литературы

- [1] Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975. 380 с.
- [2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. (В 2-х ч.) М.: Наука, 1987. 464 с., 360 с.
- [3] Уоллис Г. Двухфазные одномерные течения. М.: Мир, 1972. 436 с.
- [4] Min K.H., Kim C. // *AIChE Journal*. 2010. Vol. 56. P. 2539–2550.
- [5] Powell R.L. // *Phys. Fluids*. 2008. Vol. 20. P. 040605.
- [6] Вараксин А.Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М.: Физматлит, 2003. 192 с.
- [7] Зайчик Л.И., Алипченков В.М. Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007. 312 с.
- [8] Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем. М.: МЭИ, 2000. 374 с.
- [9] Долгунин В.Н., Борщев В.Я. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов: техника измерения, закономерности, технологическое применение. М.: Машиностроение-1, 2005. 112 с.
- [10] Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. 352 с.
- [11] Савельев Д.Е., Федосеев В.Б. // *Руды и металлы*. 2011. С. 35–42.
- [12] Федосеев В.Б. // *Вестник научно-технического развития*. 2011. Т. 9. С. 14–20.
- [13] Федосеев В.Б. // *Вестник КГТУ*. 2010. С. 67–70.
- [14] Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. // *Актуальные проблемы механики сплошной среды*. 2011. Т. 1. С. 82–97.
- [15] Saffman P.G. // *J. Fluid Mech.* 1965. Vol. 22. P. 385–400.
- [16] Яценко В.П. // *Физика аэродисперсных систем*. 2002. Т. 39. С. 240–248.
- [17] Mc Laughlin J.B. // *J. Fluid Mech.* 1991. Vol. 224. P. 261–274.
- [18] Kulkarni A.A. // *Chem. Eng. Sci.* 2008. Vol. 63. P. 1710–1723.
- [19] Мюллеру В.А. // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 1996. Т. 3. С. 82–88.
- [20] Yamamoto F. // *Bull. JSME*. 1986. Vol. 29. P. 2055–2061.
- [21] Arcen B., Tanière A., Oesterlé B. // *Int. J. Multiphase Flow*. 2006. Vol. 32. P. 1326–1339.
- [22] Zheng X., Silber-Li Z. // *Appl. Phys. Lett.* 2009. Vol. 95. P. 124105/3.
- [23] Kim C. // *Korea-Australia Rheol. J.* 2001. Vol. 13. P. 19–27.
- [24] Lyon M.K., Leal L.G. // *J. Fluid Mech.* 1998. Vol. 363. P. 57–77.
- [25] van Riemsdijk L.E. et al. // *J. Food Eng.* 2010. Vol. 101. P. 394–401.
- [26] Saffman P.G. // *J. Fluid Mech.* 1956. Vol. 1. P. 249–275.
- [27] Wakaba L., Balachandar S. // *Int. J. Multiphase Flow*. 2005. Vol. 31. P. 996–1014.
- [28] Yapici K., Powell R.L., Phillips R. // *Phys. Fluids*. 2009. Vol. 21. P. 053302/16.
- [29] Титаренко П.А., Куничан В.А. // *Ползуновский вестник*. 2007. Т. 3. С. 150–152.